Übungen zur Ingenieur-Mathematik III **WS 2012/13**
Blatt 1 **18.10.2012**

Aufgabe 1: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Aufgabe 3: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|} \, da = 2 \int_{\Omega} \frac{dx}{\|x\|} \,.$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

Aufgabe 4: Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

$$\int_0^5 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy.$$

D. h. geben Sie neue Integrationsgrenzen an, so daßgilt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^5 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dabei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 5: Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^4 \, dy \, dx \; .$$