Aufgabe 1: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi.$$

LÖSUNG:Kurve $\Gamma : \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi) \\ \gamma_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Normale $N = \frac{1}{||\gamma'(\varphi)||}\begin{pmatrix} \gamma_2'(\varphi) \\ -\gamma_1'(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{||\gamma'(\varphi)||}\begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Sei Ω die von Γ eingeschlossene Fläche.

Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1 dx\, dy$

Setze $F(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt div $F = 1$ und der Gaußsche Integralsatz liefert:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1 dx\, dy &= \int_\Omega \mathrm{div} F \, dx\, dy \\
&= \int_\Gamma F \cdot N \, dl \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\varphi)\|}\begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (r(\varphi)\cos\varphi(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi) \\
&\quad + r(\varphi)\sin\varphi(-r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi))d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

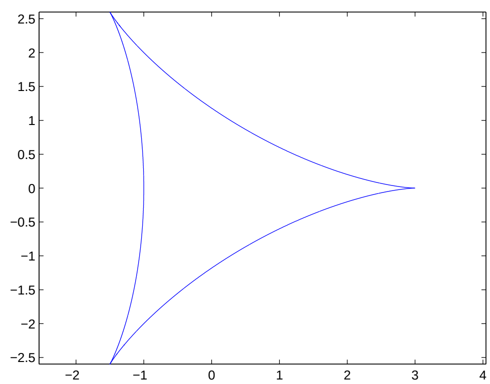
$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

LÖSUNG:Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1 dx = \int_\Omega \operatorname{div} F dx\, dy \quad \text{mit div } F = 1, \text{ z.B. } F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_\Gamma F \cdot N\, dl \qquad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} ||\dot\gamma(t)||\, dt\,, \quad N = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t + 2\cos t \cos 2t - 2\cos^2 2t) dt
\end{aligned}$$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$,
also $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_0^{2\pi} [(2\cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)] dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|}\, da = 2 \int_{\Omega} \frac{dx}{\|x\|} \ .$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

Lösung:
Nach dem Gauß'schen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gilt:
$\int_{\partial\Omega} F \cdot N da = \int_{\Omega} \mathrm{div} F dx$
$N =$ äußere Normale von $\partial\Omega$.
Wähle hier $F(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und zeige: $\mathrm{div} F = \frac{2}{\|x\|}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div} F &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i \cdot x_i}{\|x\|^3}\right] \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{2}{\|x\|}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy.$$

D. h. geben Sie neue Integrationsgrenzen an, so daßgilt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^5 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy.$$

Dabei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

Lösung:

Das Ergebnis lautet

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 \int_x^5 f(x,y)\,dy\,dx.$$

Begründung: Auf der linken Seite wird über

$$M_1 := \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq y \leq 5\}$$

integriert. Auf der rechten Seite dagegen über

$$M_2 := \{(x,y) : 0 \leq x \leq 5 \wedge x \leq y \leq 5\}.$$

Zu zeigen ist also, dass

$$M_1 = M_2.$$

- zu M_1: Wähle $y_0 \in [0,5]$ fest. Dann enthält M_1 die Strecke $\{(x,y_0) : 0 \leq x \leq y_0\}$. Also folgt, dass M_1 das von der y-Achse und den beiden Geraden $y = x$ und $y = 5$ begrenzte Dreieck im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ ist. (Man fertige hierzu und zu dem Folgenden eine Skizze an!)

- zu M_2: Wähle $x_0 \in [0,5]$ fest. Dann enthält M_2 die Strecke $\{(x_0,y) : x_0 \leq y \leq 5\}$. Also folgt wieder, dass M_2 das von der y-Achse und den beiden Geraden $y = x$ und $y = 5$ begrenzte Dreieck im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ ist. Daher gilt $M_1 = M_2$!

Aufgabe 5: Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^4\,dy\,dx\ .$$

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^4 \, dy \, dx &= \int_0^1 x^2 \cdot \left(\int_0^{1-x} y^4 \, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{(1-x)^5}{5} \, dx \\
&= \frac{1}{5} \int_0^1 x^2 (1-x)^5 \, dx \\
&= \frac{1}{5} \int_0^1 x^2 (1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5) \, dx \\
&= \frac{1}{5} \int_0^1 (x^2 - 5x^3 + 10x^4 - 10x^5 + 5x^6 - x^7) \, dx \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{4} x^4 + 2x^5 - \frac{5}{3} x^6 + \frac{5}{7} x^7 - \frac{1}{8} x^8 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + 2 - \frac{5}{3} + \frac{5}{7} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{19}{7} - \frac{4}{3} - \frac{11}{8} \right) \\
&= \frac{1}{5} \, \frac{19 \cdot 24 - 4 \cdot 56 - 11 \cdot 21}{168} \\
&= \frac{1}{5} \, \frac{456 - 224 - 231}{168} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{168} \\
&= \frac{1}{840} \approx 0,001190\ldots
\end{aligned}
$$