Aufgabe 10: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 11: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

Aufgabe 12: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

Aufgabe 13: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen mit Hilfe von Spiegelungen. Berechnen Sie dabei nur die Matrix R und die Matrizen $Q^{(k)}$. Die Matrizen $Q^{(k)}$ können sie entweder explizit oder in der Form $Q^{(k)} = \mathbb{1} - cvv^T$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ angeben.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie den Rang der Matrizen A und B an.

d) Verwenden Sie die QR-Zerlegung, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = d$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu lösen.