Aufgabe 10: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

LÖSUNG:Um die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A zu berechnen, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha \\ &= -\cos^2\alpha + \lambda\cos\alpha - \lambda\cos\alpha + \lambda^2 - \sin^2\alpha \\ &= \lambda^2 - \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A lauten also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.
Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{aligned} & & Ax &= \lambda_{1,2}x \\ &\Leftrightarrow & (A - \lambda_{1,2}\mathbb{1})\,x &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos\alpha \pm 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos\alpha \pm 1)\,x_1 + x_2\sin\alpha &=& 0 \\ x_1 &=& \frac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha}x_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Setzt man x_1 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & & (\cos\alpha \pm 1)\,x_1 + x_2\sin\alpha &= 0 \\ &\Leftrightarrow & (\cos\alpha \pm 1)\,\tfrac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha}x_2 + x_2\sin\alpha &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \tfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha}x_2 + x_2\sin\alpha &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -x_2\sin\alpha + x_2\sin\alpha &= 0 \\ &\Leftrightarrow & 0 &= 0 \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \left\{\beta\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{\beta\begin{pmatrix} -\tan\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\beta\begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

denn mit Hilfe der Additionstheoreme läßt sich zeigen

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\tan\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{\beta\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta\in\mathbb{R}\right\} &= \left\{\beta\begin{pmatrix} \cot\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta\in\mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\beta\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta\in\mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

wobei man ebenfalls mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen kann, dass

$$\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Aufgabe 11: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta\in\mathbb{R} \\
C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos(-\gamma) - \sin\beta\sin(-\gamma) & -\cos\beta\sin(-\gamma) - \sin\beta\cos(-\gamma) \\ \sin\beta\cos(-\gamma) + \cos\beta\sin(-\gamma) & -\sin\beta\sin(-\gamma) + \cos\beta\cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma) & -\sin(\beta-\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.

Aufgabe 12: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

LÖSUNG:

a) Die Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 16 \\ -3 & 8 & 3 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-2) & \cdot 1 \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 6 & 2 & 18 \end{array}\right)}_{=L^{(1)}A} \begin{array}{|c} \\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)}_{=L^{(2)}L^{(1)}A=R}$$

(Die Bezeichnungen $L^{(2)}, L^{(1)}, R$ wurden hier für Teil b) schonmal notiert.) Rückwärtseinsetzen ergibt nun:

$$\begin{aligned} &-2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ &6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

b) Im ersten Gauß-Schritt wurde die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur zweiten addiert, demnach steht in der Matrix $L^{(1)}$ in der zweiten Zeile in der ersten Spalte eine -2 und in der zweiten Spalte eine 1. Analog steht in der dritten Zeile der ersten Spalte eine 1, da die erste Zeile mit 1 multipliziert wird und zur dritten addiert wird. Analoges gilt für $L^{(2)}$ und wir erhalten

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind:

$$\left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1} \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $R = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ haben wir schon bei der Gauß-Elimination berechnet. Multiplizieren wir von links mit L erhalten wir wieder A:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} = A$$

d) Vorwärtseinsetzen: $Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & y_1 = -4, \\ & 2y_1 + y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = 24, \\ & -y_1 + y_2 + y_3 = 22 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen: $Rx = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & -2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ & 6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 13: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen mit Hilfe von Spiegelungen. Berechnen Sie dabei nur die Matrix R und die Matrizen $Q^{(k)}$. Die Matrizen $Q^{(k)}$ können sie entweder explizit oder in der Form $Q^{(k)} = \mathbb{1} - cvv^T$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ angeben.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie den Rang der Matrizen A und B an.

d) Verwenden Sie die QR-Zerlegung, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = d$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

LÖSUNG:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Wir nehmen

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \|u_1\| &= \sqrt{5} \\ \alpha_1 &= -\text{sign }(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

hierbei sorgt das negative Vorzeichen für Stabilität, vgl. Skript

$$
\begin{aligned}
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1\, n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{10+2\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anschließend berechnen wir $R_1 = {Q^{(1)}}^T A$, indem wir die Matrix ${Q^{(1)}}^T$ nacheinander auf die Spalten der Matrix A anwenden.

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
R_1 = {Q^{(1)}}^T A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

Man sieht, dass

$$
\begin{aligned}
A &= Q^{(1)} R_1, \\
Q &= Q^{(1)}
\end{aligned}
$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Wie oben, setzen wir

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\|u_1\| &= \sqrt{2}, \\
\alpha_1 &= -\text{sign }(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{2} \\
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1\, n_1^T}{\|n_1\|^2} \\
&= \mathbb{1} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} n_1\, n_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} n_1\, n_1^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir wenden ${Q^{(1)}}^T$ auf die Spalten der Matrix B an:

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+2\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(6+3\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+3\sqrt{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow {Q^{(1)}}^T B &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
u_2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\|u_2\| &= \sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen v_2 als Ergäzung von u_2 mit 0 in der ersten Zeile um einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ zu bekommen.

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\|v_2\| &= \sqrt{6}, \\
\alpha_2 &= -\text{sign } (v_{22})\|v_2\| \\
n_2 &= v_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \\ -2 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_2\, n_2^T}{\|n_2\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} n_2\, n_2^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Um $R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T B$ zu berechnen, wenden wir ${Q^{(2)}}^T$ einzeln auf die Spalten der Matrix ${Q^{(1)}}^T B$ an:

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 0 \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{3}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$Q^{(2)^T}\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\\-2\end{pmatrix}(-6)$$
$$= \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = Q^{(2)^T}Q^{(1)^T}B = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6}\\0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

c) Nach Berechnung der QR-Zerlegung läßt sich einfach bestimmen, ob eine quadratische Matrix vollen Rang hat oder nicht, denn eine Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn sie invertierbar ist und eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Eigenwerte ungleich Null sind. Des weiteren ist das Matrixprodukt zweier Matrizen nur dann invertierbar, wenn beide einzelnen Matrizen invertierbar sind. Da die Matrizen $Q^{(k)}$ grundsätzlich invertierbar sind müssen wir nur noch prüfen, ob die Diagonaleinträge der Matrix R ungleich Null sind. Ist das gegeben, so hat die Matrix QR vollen Rang.
$\text{Rang}(A) = 2$, $\text{Rang}(B) = 3$

d) Um ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer QR-Zerlegung zu lösen, formt man das Gleichungssystem wie folgt um

$$\begin{aligned} Ax &= b\\ \Leftrightarrow\quad QRx &= b\\ \Leftrightarrow\quad Rx &= Q^Tb \end{aligned}$$

Wir berechnen also

$$Q^Tb = Qb = Q^{(1)}b = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\left(7+5\sqrt{5}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}-\frac{7}{\sqrt{5}}\\-\frac{9}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-5 & -4\\0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-7\\-9\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}5 & 4\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow\quad \begin{cases}5x_1 + 4x_2 = 7\\ 3x_2 = 9\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\quad \begin{cases}x_1 = \frac{1}{5}\left(7 - 4x_2\right) = -1\\ x_2 = 3\end{cases}& \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet also $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem $Bx = d$ lösen wir auf die gleiche Weise. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned}
Q^T d &= Q^{(2)} Q^{(1)} d \\
&= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2}\left(10\sqrt{2}+9\right) \right) \\
&= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{10\sqrt{2}+9}{1+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= Q^{(2)} \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \left(-2\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}+1\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Anschließend lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-10\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2 + 3\sqrt{2}x_3\right) \\ x_2 &= -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(4\sqrt{6} - \sqrt{6}x_3\right) \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Bx = d$ lautet also $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.