Aufgabe 14: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T Ax = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Das Normalengleichungssystem ist für alle $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar.
ja ☐ nein ☐

b) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung.
ja ☐ nein ☐

c) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja ☐ nein ☐

d) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit.
ja ☐ nein ☐

e) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 15: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \;\text{ mit }\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x) w(x) \,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \; x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \; x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} \left(\cos((a - b)x) - \cos((a + b)x) \right).$$

Aufgabe 16: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17: Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, daß für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad$ und $\quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$