Aufgabe 23: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \ \text{ mit } \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x) w(x) \,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} \left(\cos((a - b)x) - \cos((a + b)x) \right).$$

Aufgabe 24: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und berechnen Sie die Hessematrix. Welche Eigenwerte hat die Hessematrix an den kritischen Punkten?

Aufgabe 25: Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$, $D^2 f$, für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Aufgabe 26: Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $D^2 f$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \|x - a\|, \quad a \in \mathbb{R}^n, x \neq a\,.$$