Aufgabe 23: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \ \text{ mit } \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x) w(x) \, \mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$

LÖSUNG:Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei a, $b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\begin{aligned} \sin(ax) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \\ \sin(bx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \sin(ax)\sin(bx) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)}{2} - \frac{\left(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x}\right)}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right) \end{aligned}$$

a)

$$g(\sin(ax), \sin(bx)) = \int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\left[\sin\left((a-b)x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)}\left[\sin\left((a+b)x\right)\right]_0^\pi = 0.$$

weil $a-b \neq 0$ und $a+b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ orthogonal sind.

b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3, erhalten wir wie folgt:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x),\,\sin(x))}}\sin(x)$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x),\,\sin(2x))}}\sin(2x)$$
$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x),\,\sin(3x))}}\sin(3x)$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$g(\sin(ax), \sin(ax)) = \int_0^\pi \sin(ax)\sin(ax)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left((2a)x\right)\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}[x]_0^\pi - \frac{1}{2a}\left[\sin\left(2ax\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

und dann

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)$$
$$w_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$$
$$w_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot,\cdot)$ analog zum Vorgehen im $\mathbb{R}^3$.

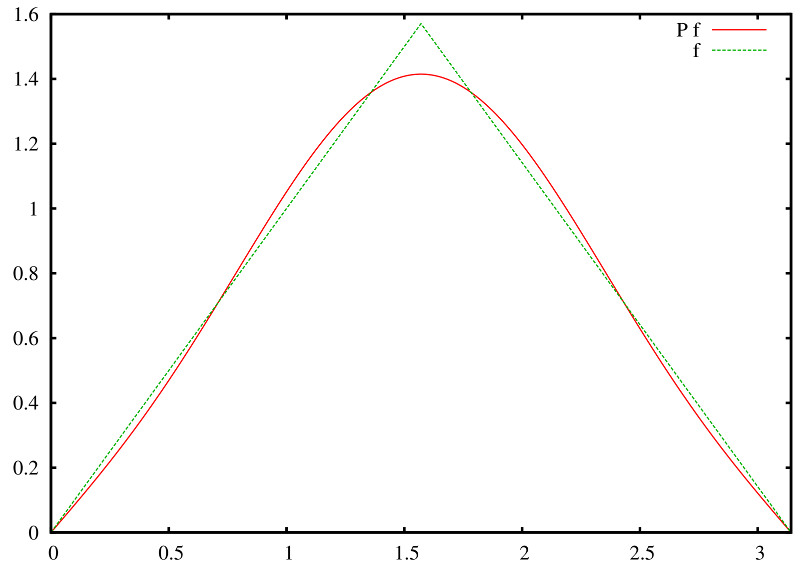
c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x), w_1(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x), w_2(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \\
g(f(x), w_3(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}w_1(x) - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(x) - \frac{4}{9\pi}\sin(3x)
\end{aligned}
$$



Aufgabe 24: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und berechnen Sie die Hessematrix. Welche Eigenwerte hat die Hessematrix an den kritischen Punkten?

LÖSUNG:Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: grad $f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 6x - 5y \ , \\ f_y(x, y) &= -5x - 4y \ . \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0 \ .$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Die Hessematrix:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} (6 - \lambda)(-4 - \lambda) - 25 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49 \ , \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 50 &\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50} \, . \end{aligned}$$

Aufgabe 25: Berechnen Sie $\operatorname{grad} f,\ D^2 f$, für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

LÖSUNG:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & -\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ -\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26: Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $D^2 f$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \|x-a\|, \quad a \in \mathbb{R}^n, x \neq a\,.$$

LÖSUNG: $f(x) = \|x-a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2} \Rightarrow$

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le n} = \left(\frac{x_i-a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2}}\right)_{1\le i\le n} = \frac{x-a}{\|x-a\|}$$

und

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij} \\ &= \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2}} - \frac{(x_i-a_i)(x_j-a_j)}{(\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2)^{3/2}}\right)_{ij} \\ &= \frac{I}{\|x-a\|} - \frac{(x-a)\otimes(x-a)}{\|x-a\|^3} \end{aligned}$$

wobei I die Identität und $u \otimes v$ das Tensorprodukt $u \otimes v = (u_i v_j)_{ij}$ ist.