Aufgabe 27: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\operatorname{grad} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha)$$

$$P_0 = (0,0),\ P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}$$

Für $P_0 = (0,0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 \ &\Leftrightarrow\ (\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\quad \lambda_1 \lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunk handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha, -\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} (6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$. D.h. $(\alpha,-\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha,-\alpha) = \alpha^3+\alpha^3-3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 3x^2-3 \\ 3y^2-12 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{array} \right\} \\
\Rightarrow & P_0 = (-1,-2),\ P_1 = (-1,2),\ P_2(1,-2),\ P_3(1,2) \\
D^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i) Für $P_0 = (-1,-2)$ gilt: $D^2 f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.
$f(-1,-2) = -1-8+3+24+20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1 = (-1,2)$ gilt: $D^2 f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.
$f(-1,2) = -1+8+3-24+20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.
Für $P_2 = (1,-2)$ gilt: $D^2 f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,
$f(1,-2) = 1-8-3+24+20 = 34$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

iii) Für $P_3 = (1,2)$ gilt: $D^2 f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.
$f(1,2) = 1+8-3-24+20 = 2$
$\Rightarrow$ (lokales)Minimum.

Aufgabe 28: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0,2\pi) \times [0,2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

LÖSUNG:Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x,y) mit $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{3\pi}{2} \\ x = 0, \quad \text{oder} \quad x = \pi, \quad \text{oder} \quad y = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pi \end{cases}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, d.h. A_1 ist ein Maximum

$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, d.h. A_2 ist ein Minimum

$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, d.h. A_3 ist ein Minimum

$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, d.h. A_4 ist ein Maximum

$D^2 f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, d.h. A_5 ist ein Sattelpunkt

$D^2 f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, d.h. A_6 ist ein Sattelpunkt

$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, d.h. A_7 ist ein Sattelpunkt

$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, d.h. A_8 ist ein Sattelpunkt

Aufgabe 29: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

LÖSUNG:

a)

$$x_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 \\ r_0 \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \|x_0 - x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi \\ r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi \\ z_0 - z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi)^2 + (r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \partial_\varphi d(\varphi, z) &= 2\,(r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi) \sin\varphi + 2\,(r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)\,(-\cos\varphi) \\ &= 2r_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi - 2\cos\varphi \sin\varphi - 2r_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2r_0\,(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi) \\ &= 2r_0\,(\cos(-\varphi_0) \sin\varphi + \sin(-\varphi_0)\cos\varphi) \\ &= 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \partial_z d(\varphi, z) &= -2\,(z_0 - z) \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\nabla d(\varphi, z) = 0.$$

Für $r_0 \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi = \varphi_0 \text{ oder } \varphi_0 + \pi \text{ und } z = z_0$$

$\Rightarrow$ (φ_0, z_0) und $(\varphi_0 + \pi, z_0)$ sind kritische Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

Im Fall $r_0 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z_0$$

Kritische Punkte sind in diesem Fall also alle Punkte (φ, z_0) mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

d)

$$D^2 d(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $\underline{r_0 \neq 0}$

$$D^2 d(\varphi_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit} \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

$$D^2 d(\varphi_0 + \pi, z_0) = \begin{pmatrix} -2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \;\Rightarrow\; \text{Sattelpunkt}$$

Im Fall $r_0 \neq 0$ gilt

$$x_Z = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $r_0 = 0$ ist die Matrix $D^2 d$ positiv semidefinit, so dass wir keine allgemeine Aussage machen können. Allerdings gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + (z_0 - z)^2 \\ &= 1 + (z_0 - z)^2, \end{aligned}$$

d.h. der Abstand hängt nicht mehr von φ sondern nur noch von z ab. Da für $d(z) = d(\varphi, z)$ die zweite Ableitung $d''(z) = 2$ größer Null ist, handelt es sich bei allen kritischen Punkten um Minima. Es gibt in diesem Fall also nicht nur einen Punkt x_z, der auf dem Zylinder Z liegt und minimalen Abstand zum Punkt x_0 hat sondern eine Menge M_Z von Punkten, die alle auf Z liegen und minimalen Abstand zum Punkt x_0 haben.

$$M_Z = \{(\varphi, z_0) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Aufgabe 30: Finden Sie den Quader mit Kantenlängen $a, b, c > 0$ und

$$4(a + b + c) = 1,$$

das maximale Volumen abc hat.
Tipp: Schreiben Sie c als Funktion von a,b und betrachten das Volumen als Funktion von nur zwei Variablen.

Lösung:

$$4(a + b + c) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4} - a - b$$

und dann

$$\begin{aligned} V(a, b) &= abc = ab\left(\frac{1}{4} - a - b\right) \\ \Rightarrow \operatorname{grad} V(a, b) &= \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} b(8a + 4b - 1) \\ a(4a + 8b - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil $a, b > 0$,

$$\operatorname{grad} V = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b - 1 = 0 \\ 4a + 8b - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow a = b = \frac{1}{12} \Rightarrow c = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

Die Hessematrix ist

$$D^2V(a,b) = \begin{pmatrix} V_{aa} & V_{ab} \\ V_{ab} & V_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & \frac{1}{4} - 2a - 2b \\ \frac{1}{4} - 2a - 2b & -2a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^2V(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Die Eigenwerte $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{12})$ von $\mathbf{A}$ sind beide negativ, also das Volumen des Quaders $(a,b,c) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ maximal ist.