Aufgabe 35: Thema: Differenzierbarkeit

a) Was bedeutet für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dass f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist?

b) Wie hängen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zusammen?

c) Welche Voraussetzung an die partiellen Ableitungen impliziert die Differenzierbarkeit?

d) Welche geometrische Interpretation hat der Gradient von f an der Stelle x_0?

e) Wie berechnet man den Gradienten?

f) Was besagt der Satz von Schwarz?

g) Was ist eine Richtungsableitung?

h) Was ist ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum einer Funktion vom $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$?

i) Welches Gleichungssystem muss man lösen, um solche lokalen Extremwerte zu finden?

j) Was ist eine positiv (bzw. negativ) definite $(n \times n)$-Matrix?

k) Was ist die Hesse-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

l) Was folgt, wenn der Gradient an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches verschwindet und die Hessematrix dort positiv definit ist? Was gilt, wenn sie dort negativ definit ist?

Aufgabe 36: Thema: Differenzierbarkeit bei vektorwertigen Funktionen

a) Wie ist Differenzierbarkeit für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ definiert?

b) Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

c) Was versteht man unter der Jacobimatrix einer differenzierbaren Abbildung an einer Stelle x_0?

d) Was besagt die mehrdimensionale Kettenregel ?

e) Sind differenzierbare Abbildungen immer stetig?

f) Wie sind Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ definiert?

g) Was sind Kugel-, was Zylinderkoordinaten ?

Aufgabe 37: Geben Sie den Satz von Gauß an

a) einmal mit Differentialoperatoren und

b) und einmal mit ausgeschriebenen partiellen Ableitungen und ausgeschriebenem Skalarprodukt.

Aufgabe 38: Geben Sie die Formel für die Integration einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einer Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 39: Geben Sie das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 40:

a) Was ist die Definition einer orthogonalen linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

b) Wann ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal?

Aufgabe 41: Geben Sie die Formel der Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bis zur Ordnung 2 an.

Aufgabe 42: Berechnen Sie die Hessematrix zu:

a) $f(x,y,z) = \sin(x)e^{2y}z^2$,

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}}$ mit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $a_i > 0$.

Aufgabe 43: Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(R,0)$ mit Restglied der Ordnung 3.
Tipp: Finden Sie eine Funktion $h(\cdot)$, so dass $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Aufgabe 44: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$g(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^3$$

im Punkt $(1,1,0)$ mit Restglied der Ordnung 5. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Funktion

$$f(x,y) = \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right)$$

auf der Einheitskugel $\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$ im $\mathbb{R}^2$.
Tipp: Anstatt die Hessematrix zu bestimmen, beachten Sie den Wert von f an den kritischen Pukten.

Frohe Festtage!