Aufgabe 35: Thema: Differenzierbarkeit

a) Was bedeutet für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dass f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist?

b) Wie hängen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zusammen?

c) Welche Voraussetzung an die partiellen Ableitungen impliziert die Differenzierbarkeit?

d) Welche geometrische Interpretation hat der Gradient von f an der Stelle x_0?

e) Wie berechnet man den Gradienten?

f) Was besagt der Satz von Schwarz?

g) Was ist eine Richtungsableitung?

h) Was ist ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum einer Funktion vom $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$?

i) Welches Gleichungssystem muss man lösen, um solche lokalen Extremwerte zu finden?

j) Was ist eine positiv (bzw. negativ) definite $(n \times n)$-Matrix?

k) Was ist die Hesse-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

l) Was folgt, wenn der Gradient an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches verschwindet und die Hessematrix dort positiv definit ist? Was gilt, wenn sie dort negativ definit ist?

Lösung:

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls es eine lineare Abbildung $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\frac{o(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

b) Differenzierbare Funktionen sind stetig, aber nicht umgekehrt.

Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist stetig an $x_0 = 0$, aber nicht differenzierbar an der Stelle.

c) Wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

d) Die Richtung des Gradienten von f an der Stelle x_0 ist die Richtung des steilsten Anstieges von f, und seine Länge ist dieser steilste Anstieg.

e) grad $f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$.

f) Satz von Schwarz:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$D^2 f(x)(v, w) = D^2 f(x)(w, v).$$

D.h. die Bilinearform $D^2 f(x)$ ist symmetrisch und damit ist dann auch $D^2 f(x)$ eine symmetrische Matrix:

$$\frac{\partial^2}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial_{x_j} \partial_{x_i}} f(x).$$

g) Sei v ein Vektor; Die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ eine Funktion f an der Stelle x_0 ist die Variation dieser Funktion in der Richtung v.

$$\partial_v f(x_0) = \partial_t f(x_0 + tv)|_{t=0} = \text{grad } f(x_0) \cdot v.$$

Man bezeichnet auch die partielle Ableitung als Richtungsableitung.

h) Ein lokales Minimum einer Funktion f ist ein Punkt x_0, zu dem es eine Umgebung $V(x_0)$ gibt mit der Bedingung $\forall x \in V(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$.

Ebenso ist ein lokales Maximum einer Funktion f ein Punkt x_0, zu dem es eine Umgebung $V(x_0)$ gibt mit der Bedingung $\forall x \in V(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$

i) Um solche lokalen Extremwert zu finden, sucht man nach kritischen Punkten, das heißt, man löst die Gleichung $\nabla f(x) = 0$. Dann ist zu entscheiden, ob es sich um einen Sattelpunkt oder ein lokales Extremum handelt.

j) Eine symmetrische Matrix A heißt positiv definit, falls die Eigenwerte von A alle positiv sind.
Eine symmetrische Matrix A heißt negativ definit, falls die Eigenwerte von A alle negativ sind.

k) Die Hesse-Matrix von f ist die die Ableitung des Gradienten dieser Funktion.

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial_{x_j} \partial_{x_i}}\right)_{i,j}$$

l) Wenn der Gradient an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches einer Funktion f verschwindet und die Hessematrix dort positiv definit ist, dann ist f ein lokales Minimum, wenn die Hessematrix dort statt dessen negativ definit ist, ist der Punkt ein lokales Maximum.

Aufgabe 36: Thema: Differenzierbarkeit bei vektorwertigen Funktionen

a) Wie ist Differenzierbarkeit für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ definiert?

b) Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

c) Was versteht man unter der Jacobimatrix einer differenzierbaren Abbildung an einer Stelle x_0?

d) Was besagt die mehrdimensionale Kettenregel ?

e) Sind differenzierbare Abbildungen immer stetig?

f) Wie sind Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ definiert?

g) Was sind Kugel-, was Zylinderkoordinaten ?

LÖSUNG:

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare Abblidung $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\frac{o(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

b) f ist differenzierbar genau dann wenn f partiell differenzierbar nach alle Variablen ist und alle partielle Ableitungen stetig sind.

c) Die Jacobimatrix einer differenzierbaren Abbildung an einer Stelle x_0 ist die Darstellung von $Df(x_0)$ in Matrixform.

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_j}} f_i(x_0) \right)_{i,j}$$

d) Sei $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D(f \circ g)(x) = (Df)\,(g(x))\,(Dg(x))$
Bemerkung: Dg ist eine $(n \times p) -$ Matrix, Df ist eine $(m \times n) -$ Matrix, und $D(f \circ g)$ ist eine $(m \times p) -$ Matrix.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

e) Ja, differenzierbare Abbildungen sind immer stetig.

f) **Definition von Polarkoordinaten im** $\mathbb{R}^2$**:** Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x, y) im kanonischen Koordinatensystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand zwischen M und dem Ursprungspunkt $O = (0, 0)$ von $\mathbb{R}^2$, und θ den Winkel zwischen die $x-$Achse und $\overrightarrow{OM}$. Die Polarkoordinaten von M sind (r, θ), ihre Verbindung mit den kartesischen Kordinaten von M ist

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \end{cases}$$

g) **Definition von Zylinderkoordinaten im** $\mathbb{R}^3$**:** Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) im kanonischen Koordinatsystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Abstand zwischen der Projektion N von M auf den (x, y)-Ebene und dem Ursprungspunkt $O = (0, 0, 0)$ von $\mathbb{R}^3$, und θ den Winkel zwischen der $x-$Achse und $\overrightarrow{ON}$. Die Zylinderkoordinaten von M sind (r, θ, z) und ihre Verbindung mit den kartesische Kordinate von M ist

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \\ z = & z \end{cases}$$

Definition von Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$**:** Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) im kanonischen Koordinatensystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den Abstand zwischen M und dem Ursprungspunkt $O = (0, 0, 0)$ von $\mathbb{R}^3$, N die Projektion von M auf den $(x, y)-$Achse, θ den Winkel zwischen x-Achse und $\overrightarrow{ON}$, und ϕ den Winkel zwischen den y-Achse und $\overrightarrow{OM}$. Die Kugelkoordinaten von M sind (r, ϕ, θ) und ihre Verbindung mit den kartesischen Kordinaten von M ist

$$\begin{cases} x & = r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y & = r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z & = r\cos(\phi) \end{cases}$$

Aufgabe 37: Geben Sie den Satz von Gauß an

a) einmal mit Differentialoperatoren und

b) und einmal mit ausgeschriebenen partiellen Ableitungen und ausgeschriebenem Skalarprodukt.

LÖSUNG:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ sein Rand, unter Voraussetzung daß es eine glatte Fläche ist; (in dem Sinn, daß der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, Stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt). Wir bezeichnen mit $N(x)$ die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V(x)$ auf $\overline{\Omega}$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(V(x))\,dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot N(x) da$$

b) Die Gleichung ist explizit

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x) \right) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^n V_i(x) N_i(x) \right) da$$

wobei $V(x) = (V_1(x), V_2(x), \cdots, V_n(x))$ and $N(x) = (N_1(x), N_2(x), \cdots, N_n(x))$.

Aufgabe 38: Geben Sie die Formel für die Integration einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einer Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ an.

LÖSUNG:Die Formel für die Integration der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über eine stetige differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist.

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Aufgabe 39: Geben Sie das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ an.

LÖSUNG:Laut Skript ist das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}.$$

Aufgabe 40:

a) Was ist die Definition einer orthogonalen linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

b) Wann ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal?

LÖSUNG:

a) Eine orthogonale lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine längentreue Abbildung $(\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n)$.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist orthogonal, falls $A^{-1} = A^T$.

Aufgabe 41: Geben Sie die Formel der Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bis zur Ordnung 2 an.

LÖSUNG:Die Formel der Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 bis zur Ordnung 2 lautet:

$$f(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(D^2 f(x_0)(x - x_0) \right) \cdot (x - x_0) + O(|x - x_0|^3)$$

wobei $D^2 f$ die Hesse-Matrix ist.

Aufgabe 42: Berechnen Sie die Hessematrix zu:

a) $f(x, y, z) = \sin(x) e^{2y} z^2$,

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}}$ mit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $a_i > 0$.

LÖSUNG:

a) $f(x,y,z) = \sin(x)e^{2y}z^2 \Rightarrow$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} -\sin(x)e^{2y}z^2 & 2\cos(x)e^{2y}z^2 & 2\cos(x)e^{2y}z \\ 2\cos(x)e^{2y}z^2 & 4\sin(x)e^{2y}z^2 & 4\sin(x)e^{2y}z \\ 2\cos(x)e^{2y}z & 4\sin(x)e^{2y}z & 2\sin(x)e^{2y} \end{pmatrix}$$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{x_i}{a_i^2 g(x)} \Rightarrow$

$$D^2 g = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2 g(x)} - \frac{x_1^2}{a_1^4 g(x)^3} & -\frac{x_1x_2}{a_1^2a_2^2 g(x)^3} & -\frac{x_1x_3}{a_1^2a_3^2 g(x)^3} \\ -\frac{x_1x_2}{a_1^2a_2^2 g(x)^3} & \frac{1}{a_2^2 g(x)} - \frac{x_2^2}{a_2^4 g(x)^3} & -\frac{x_2x_3}{a_2^2a_3^2 g(x)^3} \\ -\frac{x_1x_3}{a_1^2a_3^2 g(x)^3} & -\frac{x_2x_3}{a_2^2a_3^2 g(x)^3} & \frac{1}{a_3^2 g(x)} - \frac{x_3^2}{a_3^4 g(x)^3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 43: Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(R,0)$ mit Restglied der Ordnung 3.
Tipp: Finden Sie eine Funktion $h(\cdot)$, so dass $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

LÖSUNG: $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $h(\rho) = \sqrt{r^2 - (\rho - R)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= h'(d(x,y))\, d_x(x,y) \\ g_y(x,y) &= h'(d(x,y))\, d_y(x,y) \\ g_{xx}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_x(x,y)^2 + h'(d(x,y))\, d_{xx}(x,y) \\ g_{xy}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_x(x,y)\, d_y(x,y) + h'(d(x,y))\, d_{xy}(x,y) \\ g_{yy}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_y(x,y)^2 + h'(d(x,y))\, d_{yy}(x,y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_x(x,y) &= \frac{x}{d(x,y)} \\ d_y(x,y) &= \frac{y}{d(x,y)} \\ d_{xx}(x,y) &= \frac{y^2}{d(x,y)^3} \\ d_{xy}(x,y) &= -\frac{xy}{d(x,y)^3} \\ d_{yy}(x,y) &= \frac{x^2}{d(x,y)^3} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
h'(\rho) &= \frac{R-\rho}{h(\rho)} \\
h''(\rho) &= -\frac{r^2}{h(\rho)^3}
\end{aligned}
$$

An der Stelle $(R, 0)$:

$$
\begin{aligned}
& d(R,0) = R \\
& d_x(R,0) = 1 \\
& d_y(R,0) = 0 \\
& d_{xx}(R,0) = d_{xy}(R,0) = 0 \\
& d_{yy}(R,0) = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& h(d(R,0)) = h(R) = r \\
& h'(R) = 0 \\
& h''(R) = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
& g(R,0) = h(d(R,0)) = r \\
& g_x(R,0) = h'(R)\, d_x(R,0) = 0 \\
& g_y(R,0) = h'(R)\, d_y(R,0) = 0 \\
& g_{xx}(R,0) = -\frac{1}{r} \cdot 1^2 + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{r} \\
& g_{xy}(x,y) = -\frac{1}{r} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\
& g_{yy}(x,y) = -\frac{1}{r} \cdot 0^2 + 0 \cdot \frac{1}{R} = 0
\end{aligned}
$$

Die Taylor-Entwicklung ist dann

$$
g(x,y) = r - \frac{1}{2r}(x-R)^2 + \mathrm{O}(\|(x-R,y)\|^3)
$$

Aufgabe 44: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$
g(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^3
$$

im Punkt $(1,1,0)$ mit Restglied der Ordnung 5. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
&g(1,1,0) = 2\\
&g_x(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^3 \Rightarrow g_x(1,1,0) = 4\\
&g_y(x,y,z) = 2xy \Rightarrow g_y(1,1,0) = 2\\
&g_z(x,y,z) = 3xz^2 \Rightarrow g_z(1,1,0) = 0\\
&g_{xx}(x,y,z) = 6x \Rightarrow g_{xx}(1,1,0) = 6\\
&g_{xy}(x,y,z) = 2y \Rightarrow g_{xy}(1,1,0) = 2\\
&g_{xz}(x,y,z) = 3z^2 \Rightarrow g_{xz}(1,1,0) = 0\\
&g_{yy}(x,y,z) = 2x \Rightarrow g_{yy}(1,1,0) = 2\\
&g_{yz}(x,y,z) = 0\\
&g_{zz}(x,y,z) = 6xz \Rightarrow g_{zz}(1,1,0) = 0\\
&g_{xxx}(x,y,z) = 6\\
&g_{xxy}(x,y,z) = g_{xxz}(x,y,z) = 0\\
&g_{xyy}(x,y,z) = 2\\
&g_{xyz}(x,y,z) = 0\\
&g_{xzz}(x,y,z) = 6z \Rightarrow g_{xzz}(1,1,0) = 0\\
&g_{yyy}(x,y,z) = g_{yyz}(x,y,z) = g_{yzz}(x,y,z) = 0\\
&g_{zzz}(x,y,z) = 6x \Rightarrow g_{zzz}(1,1,0) = 6\\
&g_{xzzz}(x,y,z) = 6\\
&\text{alle anderen vierte Ableitungen } = 0
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z) &= 2 + 4(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right)\\
&+\frac{1}{6}\left(6(x-1)^3 + 3\cdot 2(x-1)(y-1)^2 + 6z^3\right) + \frac{1}{24}\cdot 4\cdot 6(x-1)z^3 + \mathrm{O}(\|(x-1,y-1,z)\|^5)
\end{aligned}
$$

Ausmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
2 + 4(x-1) + 2(y-1) &+ \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right)\\
&+ \frac{1}{6}\left(6(x-1)^3 + 6(x-1)(y-1)^2 + 6z^3\right) + \frac{1}{24}\cdot 24(x-1)z^3\\
&= 2 + (4x + 2y - 6) + \left(3x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 4y + 6\right)\\
&+ \left(x^3 + xy^2 + z^3 - 3x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2y - 2\right) + (xz^3 - z^3)\\
&= x^3 + xy^2 + xz^3 \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Funktion

$$f(x,y) = \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right)$$

auf der Einheitskugel $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$ im $\mathbb{R}^2$.
Tipp: Anstatt die Hessematrix zu bestimmen, beachten Sie den Wert von f an den kritischen Pukten.

LÖSUNG: $f(x,y) = \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right) \Rightarrow$

$$f_x(x,y) = -4\pi x \cos\left(\pi(x^2+y^2)\right) \sin\left(\pi(x^2+y^2)\right) = -2\pi x \sin\left(2\pi(x^2+y^2)\right)$$
$$f_y(x,y) = -4\pi y \cos\left(\pi(x^2+y^2)\right) \sin\left(\pi(x^2+y^2)\right) = -2\pi y \sin\left(2\pi(x^2+y^2)\right)$$

Der Punkt (x,y) ist kritisch, wenn

$$f_x(x,y) = 0 \text{ und } f_y(x,y) = 0 \Rightarrow \sin\left(2\pi(x^2+y^2)\right) = 0 \text{ oder } x = y = 0$$

- $(x,y) = (0,0)$ ist ein Maximum, weil $f(0,0) = 1 \geq \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\sin\left(2\pi(x^2+y^2)\right) = 0 \Rightarrow 2\pi(x^2+y^2) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+y^2 \in \{0, \frac{1}{2}, 2\}$ (weil $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$)
  - $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ist ein Maximum (wie oben)
  - $x^2+y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x,y) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0 \leq \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und damit die Kritischen Punkte $\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 = \frac{1}{2}\}$ sind Minima.
  - $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = \cos^2(\pi) = 1 \geq \cos^2\left(\pi(x^2+y^2)\right)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und damit die Kritischen Punkte $\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 = 1\}$ sind Maxima.

Frohe Festtage!