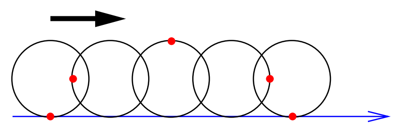
Aufgabe 53: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

Aufgabe 54: Berechnen Sie die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 55: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) \;&:=\; X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) \;&:=\; X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Aufgabe 56: Betrachten Sie die durch $X : [0, 2\pi) \times [0, 100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2(t) := X(t, 10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3(t) := X(t, t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_i(t)$, $\ddot{\gamma}_i(t)$ und $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.