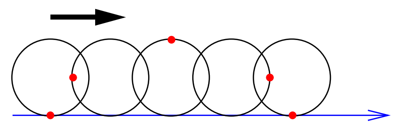
Aufgabe 53: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

LÖSUNG:

a) Sei G der Mittelpunkt dieses Kreises und $G(t) = G_0 + vt = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Parametrisierung der Bewegung von G, wobei t die Zeit ist.

P rotiert um G und daraus kann man $X - G$ als $X - G = \begin{pmatrix} -r\sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ parametrisieren, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die sich als $\omega = \frac{1}{r}$ ergibt. Dies wird anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass bei gleicher Geschwindigkeit ein halb so großer Kreis doppelt so oft rotiert.

Damit schließen wir, dass die Parametrisierung von X sich schreiben lässt als
$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin(\frac{1}{r}t) \\ -r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin(\frac{1}{r}t) \\ r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt P berührt immer dann die x-Achse, wenn die y-Komponente von $X(t)$ gleich Null ist, das heißt wenn
$$\begin{aligned} & r - r\cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{r}t = 2\pi j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = 2\pi r j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ berührt der Punkt P die x-Achse also zum erstenmal und die zweite Berührung findest zur Zeit $t = 2\pi r$ statt.

c) Die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P von der ersten bis zur zweiten Berührung mit der x-Achse bewegt hat, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= \int_0^{2\pi r} \|\dot{X}(\xi)\| \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{r}\xi\right) \end{pmatrix} \right\| d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(\left(1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{1}{r}\xi\right) \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(2 - 2\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)} \, d\xi
\end{aligned}$$

Da $\sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \geq 0$ für $\xi \in [0, 2\pi r]$ gilt

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= 2 \int_0^{2\pi r} \sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \, d\xi \\
&= -4r \cos\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \Big|_0^{2\pi r} \\
&= -4r\,(-1 - 1) \\
&= 8r
\end{aligned}$$

Aufgabe 54: Berechnen Sie die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung: Der Tangentialvektor an diese Kurve ist

$$T = \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

und seine Bogenlänge ist

$$s(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2}dt = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$$

Im Spezialfall $h = 0$ ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir haben einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius $r \geq 0$. Wir finden hier den wohlbekannnten Kreisumfang $2\pi r$.

Grundsätzlich ist es so, dass die Schraubenlinie auf einer Zylinderfläche liegt, deren Grundfläche den Radius r hat. Stellt man sich die Zylinderfläche abgewickelt vor, so erhält man ein Rechteck mit den Seitenlängen $2\pi r$ und $2\pi h$. Beginnt man die Zylinderfläche an der richtigen Stelle abzuwickeln, so entspricht die Kurve $\gamma(t)$ auf dem Rechteck der Diagonalen und ihre Länge lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.

Aufgabe 55: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

LÖSUNG:

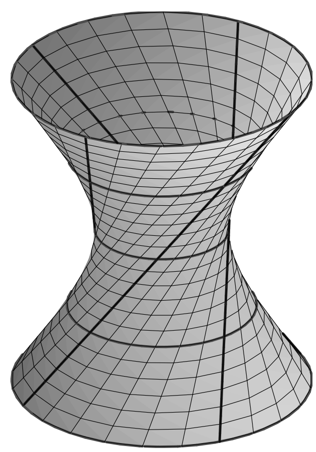
a) Mit

$$\begin{aligned} x &= \cos s - v\sin s \\ y &= \sin s + v\cos s \\ z &= v \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2+y^2-z^2 &= (\cos s - v\sin s)^2 + (\sin s + v\cos s)^2 - v^2 \\ &= \cos^2 s - 2v\cos s\sin s + v^2\sin^2 s \\ &\quad + \sin^2 s + 2v\cos s\sin s + v^2\cos^2 s - v^2 \\ &= 1 + v^2 - v^2 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: $x^2+y^2-z^2=1 \;\Leftrightarrow\; z^2 = x^2+y^2-1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2+y^2-1}\,.$



b) $\gamma_1(s) \;=\; X(s,v_0) \;=\; \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{1+v_0^2}$:

$$\left\| \gamma_1(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos s - v_0\sin s \\ \sin s + v_0\cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + v_0^2$$

$\gamma_2(v) \;=\; X(s_0,v) \;=\; \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $v=0$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf obigem einschaligen Drehhyperboloid liegt.

c) Die Absolutkrümmung $\kappa_1(s)$ von $\gamma_1(s)$ ergibt sich als

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,.$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s - v_0\cos s \\ \cos s - v_0 \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\dot\gamma_1(s)\| &= (\sin^2 s + 2v_0\cos s\sin s + v_0^2\cos^2 s \\
&\quad + \cos^2 s - 2v_0\cos s\sin s + v_0^2\sin^2 s)^{1/2} \\
&= \sqrt{1+v_0^2}\,, \\
\|\dot\gamma_1(s)\|^3 &= \sqrt{1+v_0^2}^{\,3}\,, \\
\ddot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} -\cos s + v_0\sin s \\ -\sin s - v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot\gamma_1(s)\times\ddot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sin s - v_0\cos s)(-\sin s - v_0\cos s) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\cos s + v_0\sin s)(\cos s - v_0\sin s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+v_0^2 \end{pmatrix}, \\
\|\dot\gamma_1(s)\times\ddot\gamma_1(s)\| &= 1+v_0^2\,, \\
\Rightarrow \quad \kappa_1(s) &= \frac{\|\dot\gamma_1(s)\times\ddot\gamma_1(s)\|}{\|\dot\gamma_1(s)\|^3} = \frac{1+v_0^2}{(1+v_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies sollte auch so sein, da ein Kreis die Krümmung $\kappa = \frac{1}{\text{Radius}}$ hat!

Die Absolutkrümmung $\kappa_2(s)$ von $\gamma_2(s)$ lautet dementsprechend

$$\kappa_2(v) \equiv 0\,.$$

Anschaulich ist das klar, da $\gamma_2(s)$ eine Gerade beschreibt!

In Formeln:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konstanter Vektor!} \\
\Rightarrow \ \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ \dot{\gamma}_2(v) \times \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ \kappa_2(v) = 0\,!
\end{aligned}$$

Beachte: $\|\dot{\gamma}_2(v)\| = \sqrt{2} > 0\,!$

Aufgabe 56: Betrachten Sie die durch $X : [0, 2\pi) \times [0, 100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_2(t) := X(t, 10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_3(t) := X(t, t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_i(t)$, $\ddot{\gamma}_i(t)$ und $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.

LÖSUNG:

a) Drehzylinder mit $x^2 + y^2 = 4$ und Höhe $h = 100$:

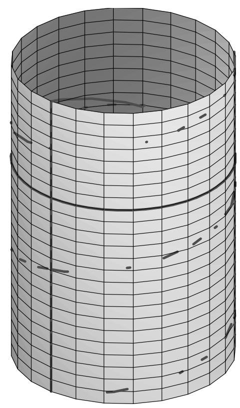
Mit

$$\begin{aligned} x &= 2\cos u\,, \\ y &= 2\sin u \end{aligned}$$

ergibt sich

$$x^2+y^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4 \quad \checkmark$$

$v \in [0,100] \;\Rightarrow\; h = 100\,.$



b) $\gamma_1(t) = X(0,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (für $t=0$) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \partial_t X$, welche ganz auf dem Drehzylinder liegt. Es handelt sich um eine Mantellinie.

$\gamma_2(t) = X(t,10) = 2\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 5 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und Radius $r=2$, welcher ganz auf dem Drehzylinder liegt.

Es handelt sich um einen Breitenkreis des Drehzylinders in der Höhe $h = z = 10$.

$\gamma_3(t) = X(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie, die auf dem Drehzylinder liegt.

c) $\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ddot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot\gamma_1 \times \ddot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ddot\gamma_2 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot\gamma_2 \times \ddot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\dot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \; \ddot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dot{\gamma_3} \times \ddot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}
N_1(t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_1 \perp \dot{\gamma_1}\,! \\
N_1(t) \cdot (\dot{\gamma_1}(t) \times \ddot{\gamma_1}(t)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_1 \perp (\dot{\gamma_1} \times \ddot{\gamma_1})\,! \\
N_2(t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_2 \perp \dot{\gamma_2}\,! \\
N_2(t) \cdot (\dot{\gamma_2}(t) \times \ddot{\gamma_2}(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_2 \perp (\dot{\gamma_2} \times \ddot{\gamma_2})\,! \\
N_3(t) \cdot \dot{\gamma_3}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_3 \perp \dot{\gamma_3}\,! \\
N_3(t) \cdot (\dot{\gamma_3}(t) \times \ddot{\gamma_3}(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_3 \perp (\dot{\gamma_3} \times \ddot{\gamma_3})\,!
\end{aligned}$$