Übungen zur Ingenieur-Mathematik III **WS 2012/13**
Blatt 13 **20.03.2013**

Aufgabe 57: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$

Aufgabe 58:

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ in $\mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie $(5+6i)(7-3i)$.

c) Berechnen Sie $\frac{2-2i}{|2-2i|}$.

d) Berechnen Sie $(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Aufgabe 59: Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 60: Wann ist eine Abbildung f orthogonal und wann ist eine quadratische Matrix A orthogonal?

Aufgabe 61: Geben Sie auf dem offenen Intervall $(0,1)$ eine Quadraturformel mit 3 Knoten mit den Werten für die Gewichte explizit an.

Aufgabe 62: Wie differenziert man eine Funktion $f(t) = \int_0^t g(t,s)\mathrm{d}s$?

Aufgabe 63: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$,

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$.

Aufgabe 64: Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = 5x + 3$ mit $x(0) = 2$ an.

Aufgabe 65: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit bekannter Singulärwertzerlegung $A = UDV^T$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Singulärwerte an, damit A invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für diesen Fall die Singulärwertzerlegung von A^{-1}.

c) Für welche λ ist $A + \lambda I$ für symmetrisches A invertierbar?

d) Finden Sie dann die Singulärwertzerlegung von $(A+\lambda I)^{-1}$ im Fall, dass A symmetrisch ist.

Aufgabe 66: Wie lautet der Satz von Gauß? Wenden Sie dieses Satz auf die Vektorfelder $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

Aufgabe 67: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A^TA.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 68: Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Aufgabe 69: Wie berechnet man auf einem Dreieck mit Knoten p_0, p_1, p_2 die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \cdots, \lambda_2$ eines Punktes x?

Aufgabe 70: Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?

Aufgabe 71: Man löse die Differentialgleichung

a) $\dot{x} = \frac{1}{\sin(x)}$, $x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$

Aufgabe 72: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

Aufgabe 73: Berechnen Sie die quadratische Lagrangeinterpolation der Funktion $\cos(x)$ für Knoten $\phi/2$, 0, $-\phi/2$ für festes $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 74: Geben Sie die Formel der Lagrangeinterpolation für allgemeine Knotenmenge an.

Aufgabe 75: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = \int_{x}^{x-y} \exp(-t^2(x + y))\, dt$$

Aufgabe 76: Wie testet man, ob eine Zahl λ Eigenwert einer quadratischen Matrix A ist?

Aufgabe 77: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t), \qquad & x_1(0) &= -1, \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), \qquad & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp At$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 78: Für welches m gilt $\frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} - u'(t - \tau/2) = O(\tau^m)$ im Fall glatter Funktionen u?

Aufgabe 79: Sei $p \in \mathcal{P}_3$ die Hermite-Interpolation einer Funktion $f \in C^1$ an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$. Welche Bedingungen erfüllt p?

Aufgabe 80: Berechnen Sie das Volumen des Torus, der durch Rotation des Dreieckes

$$\Delta = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x \leq 3,\ y = 0,\ 2 - x \leq z \leq x - 2 \,\}$$

um die z-Achse entsteht,

a) indem Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers (aus der Vorlesung) benutzen.

b) indem Sie die Schnittflächen berechnen, die sich durch Schneiden des Torus mit Ebenen (im $\mathbb{R}^3$) ergeben, die senkrecht zur z-Achse sind, und über diese Schnittflächen (auf-) integrieren.

c) Berechnen Sie die Oberfläche dieses Torus.

Aufgabe 81: Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 82: Man berechne das Volumen des Körpers, der von den Flächen $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe 83: Geben Sie für die Differentialgleichung $\dot{x} = \sin(x)$ mit $x(0) = x_0$ ein numerisches Verfahren zweiter Ordnung an.

Aufgabe 84: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Aufgabe 85: Wann ist eine glatte Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ eine geodätische Kurve auf einer glatten Hyperfläche $\mathcal{M}$?

Aufgabe 86: Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x = (2, 2)$ ein lokales Maximum hat.

Aufgabe 87: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|} \, da = 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\|x\|} \, dx \, .$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

Aufgabe 88: Geben Sie die Definition der Absolutkrümmung einer bogenlängenparametrisierten Kurve an?

Aufgabe 89: Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an?

Aufgabe 90: Was sagt der Satz von Schwarz aus über eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 91: Existieren folgende Integrale (im Sinne des Kapitels über die Integration unbeschränkter Funktionen)?

a)
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

ja ☐ nein ☐

b)
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ja ☐ nein ☐

c)
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

d)
$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

e)
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\, dy\, dz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

ja ☐ nein ☐

Aufgabe 92: Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \mid \|x\| < 1\}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann gilt $\nabla f(a) = 0$. ja ☐ nein ☐

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann ist die Hesse-Matrix $H(a)$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

c) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann hat f ein globales Minimum bei a. ja ☐ nein ☐

d) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und hat $H(a)$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei a ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann ist jedes lokale Minimum auch globales Minimum. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 93: Geben Sie eine Basis des Tangentialraum an den Graphen einer glatten Funktion $(x, y) \to f(x, y)$ an.

Aufgabe 94: Gibt es neben Drehungen und Spiegelungen noch andere orthogonale Abbildungen im $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 95: Wie lauter der Transformationssatz der Integralrechnung in mehreren Dimensionen?

Aufgabe 96: Was ist der Gradient der Abbildung $f(x) = Ax \cdot x + b \cdot x$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $b, x \in \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 97: Was folgt aus dem Satz über implizite Funktionen bezüglich der Null-Niveaumenge der Funktion $f(x, y) = x^4 + y^4 - 1$?

Aufgabe 98: Was ist die Fläche des Einheitsdreiecks $\hat{T}^2$ und das Volumen des Einheitstetraeders $\hat{T}^3$?

Aufgabe 99: Geben Sie die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gehörende Diagonalmatrix D, d.h. $A = UDU^T$ mit $U^T = U^{-1}$ an. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D sowie die Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 100: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

Aufgabe 101: Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

Aufgabe 102: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Aufgabe 103: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 104: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\ g(x,y,z) &:= x - 1 = 0\,, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

c) Bestimmen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 105: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1,-1,0)$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 106: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s,v) \mapsto X(s,v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Aufgabe 107: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 108: Welche Kurve verbirgt sich hinter der Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy = 1 \right\}?$$

Aufgabe 109: Schreiben Sie $\sin^4 x$ und $\sin^2 x \cos^2 x$ als Linearkombination von 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x, \ldots$

Tipp: Verwenden Sie die Formeln

$$\sin(x) = \frac{1}{2\,i}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x}), \quad \cos(x) = \frac{1}{2}\,(e^{i\,x} + e^{-i\,x})$$

Aufgabe 110: Wie sieht die Spiegelungsmatrix aus, die im QR-Verfahren zur Elimination der ersten Spalte der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ verwendet wird?