Aufgabe 57: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$

LÖSUNG:

a)

$$\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left. \frac{-\cos 2x}{2} \right|_0^\pi = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

b)

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left. \left(x - \ln(1+x^2) \right) \right|_0^1 = 1 - \ln 2$$

c)

$$\int\limits_0^1 x^2 e^x dx = \left. x^2 e^x \right|_0^1 - \int\limits_0^1 2x e^x dx = e - \left. (2x e^x) \right|_0^1 + \int\limits_0^1 2 e^x dx = e - 2$$

Aufgabe 58: a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ in $\mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie $(5+6i)(7-3i)$.

c) Berechnen Sie $\frac{2-2i}{|2-2i|}$.

d) Berechnen Sie $(\cos\phi + i \sin\phi)(\cos\psi + i \sin\psi)$.

LÖSUNG:

a)

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R},\ r \geq 0$$

Wir können die Gleichung $z^4 = 16$ also aufspalten in zwei Gleichungen

$$r^4 = 16 \text{ und } z_1^4 = 1,$$

wobei sich die Lösungen z als Produkt von r und z_1 ergeben.

$$r^4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2$$

$$\begin{array}{rcccc}
z_1^4 = 1 & \Leftrightarrow z_1^4 = e^0 & \Leftarrow & z_1 = e^0 = 1 & \Leftrightarrow & z = 2 \\
z_1^4 = 1 & \Leftrightarrow z_1^4 = e^{i2\pi} & \Leftarrow & z_1 = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i & \Leftrightarrow & z = 2i \\
z_1^4 = 1 & \Leftrightarrow z_1^4 = e^{i4\pi} & \Leftarrow & z_1 = e^{i\pi} = -1 & \Leftrightarrow & z = -2 \\
z_1^4 = 1 & \Leftrightarrow z_1^4 = e^{i6\pi} & \Leftarrow & z_1 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i & \Leftrightarrow & z = -2i
\end{array}$$

b)

$$\begin{aligned}
(5+6i)(7-3i) &= 35 + 42i - 15i + 18 \\
&= 53 + 28i
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{2-2i}{|2-2i|} &= \frac{2-2i}{\sqrt{(2+2i)(2-2i)}} \\
&= \frac{2-2i}{\sqrt{8}} \\
&= \frac{1-i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi) &= \cos\phi\cos\psi + i\sin\phi\cos\psi + i\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\psi \\
&= \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)
\end{aligned}$$

Aufgabe 59: Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \\
-2f(x) &= -2f(x) \\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h)$$

Durch Grenzübergang folgt, dass der Grenzwert gleich $f''(x)$ ist.

Aufgabe 60: Wann ist eine Abbildung f orthogonal und wann ist eine quadratische Matrix A orthogonal?

LÖSUNG:
Definition einer orthogonalen Abbildung:
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt „$\cdot$" und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, dann heißt eine lineare Abbildung $f : V \to V$ *orthogonal*, falls $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$ gilt (längentreue Abbildung).

Eine Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn gilt $A^T = A^{-1}$.

Aufgabe 61: Geben Sie auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ eine Quadraturformel mit 3 Knoten mit den Werten für die Gewichte explizit an.

LÖSUNG: Zuerst wählen wir drei Knoten im Intervall $(0, 1)$: zum Beispiel $t_0 = \frac{1}{4}$, $t_1 = \frac{1}{2}$ und $t_2 = \frac{3}{4}$. Die zugehörigen Lagrangebasisfunktionen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \\ L_1(x) &= -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \\ L_2(x) &= 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nun lassen sich die zugehörigen Gewichte berechnen:

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_0^1 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)\,dx \\ &= 8\int_0^1 x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\,dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^1 -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)\,dx \\ &= -16\int_0^1 x^2 - x + \frac{3}{16}\,dx \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_0^1 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\,dx \\ &= 8\int_0^1 x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\,dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Int}_h(f) = \frac{2}{3}\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) - \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 62: Wie differenziert man eine Funktion $f(t) = \int_0^t g(t,s)\mathrm{d}s$?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t,t)\cdot 1 - g(t,0)\cdot 0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,s)\,ds \\ &= g(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,s)\,ds \end{aligned}$$

Aufgabe 63: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$,

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$.

LÖSUNG:

$$r(x) = \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$$

heißt Rayleigh-Quotient und laut Skript gilt

$$\lambda_1 \le r(x) \le \lambda_n,$$

wobei λ_1 der kleinste und λ_n der größte Eigenwert der Matrix A ist und Minimum und Maximum wirklich angenommen werden.

Die Eigenwerte der Matrix A lassen sich blockweise berechnen, da A nur aus Diagonalblöcken besteht. Auf den ersten Blick sieht man, dass -1 ein Eigenwert der Matrix A ist. Zudem berechnet man die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, die -1 und 12 sind. -1 ist also ein doppelter Eigenwert und 12 der maximale Eigenwert von A ist. Daraus ergibt sich:

a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x} = 12$

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x} = -1$

Aufgabe 64: Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = 5x + 3$ mit $x(0) = 2$ an.

LÖSUNG: Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 5x(t) + 3 \quad \text{mit} \quad x(0) = 2$$

läßt sich auch schreiben als

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t)g(x) \qquad \text{mit } f(t) = 1,\ g(x) = 5x + 3 \quad \text{und } x(0) = 2.$$

Daraus ergibt sich mit Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x} \tfrac{1}{g(\tilde{x})} d\tilde{x} &=& \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\, d\tilde{t} \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{x_0}^{x} \tfrac{1}{5\tilde{x}+3} d\tilde{x} &=& \int_{t_0}^{t} 1\, d\tilde{t} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{5}\left(\ln(5x+3) - \ln(13)\right) &=& t - t_0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{5} \ln \tfrac{5x+3}{13} &=& t \\
\Leftrightarrow\quad & x(t) &=& \tfrac{13}{5} e^{5t} - \tfrac{3}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 65: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit bekannter Singulärwertzerlegung $A = UDV^T$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Singulärwerte an, damit A invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für diesen Fall die Singulärwertzerlegung von A^{-1}.

c) Für welche λ ist $A + \lambda I$ für symmetrisches A invertierbar?

d) Finden Sie dann die Singulärwertzerlegung von $(A+\lambda I)^{-1}$ im Fall, dass A symmetrisch ist.

LÖSUNG:

a) i) Sei A invertierbar. Dann gilt:

$$\text{Rang } A = n \quad \text{bzw.} \quad \det A \neq 0\ .$$

Nach einem Satz der Vorlesung gilt:

$$\text{Rang } A = \text{Rang } D = \text{ Anzahl der Singulärwerte von } A\ .$$

Also haben wir:

$$n = \text{Rang } A = \text{Rang } D = \text{ Anzahl der Singulärwerte } ,$$

d.h. die Matrix A muss n Singulärwerte haben (die definitionsgemäß größer Null sind und nicht unbedingt verschieden sein müssen)!

ii) Umgekehrt: Wenn die Matrix A n Singulärwerte besitzt, dann gilt:

$$\text{Rang } D = n$$

und deshalb auch

$$n = \text{Rang } D = \text{Rang } A\ ,$$

also ist A invertierbar.

Alternativ: A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Wegen $A = UDV^T$ gilt:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(UDV^T) \\ &= \det U \det D \det V^T \\ &= \det U \det V \det D \\ &= \pm \det D\ ; \end{aligned}$$

denn da U , V orthogonale Matrizen sind, gilt: $UU^T = I = VV^T$ und daher $1 = (\det U)^2 = (\det V)^2$.

Also haben wir:

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ Singulärwerte } !$$

b) Es sei $A = UDV^T$ invertierbar.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{-1} &= (UDV^T)^{-1} \\ &= (V^T)^{-1}D^{-1}U^{-1} \\ &= (V^{-1})^T D^{-1}U^T \\ &= (V^T)^T D^{-1}U^T \\ &= VD^{-1}U^T\ . \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt: Genau dann, wenn A n Singulärwerte besitzt, ist A invertierbar und die Singulärwertzerlegung von A^{-1} lautet:

$$A^{-1} = VD^{-1}U^T\ .$$

Bei den obigen Umformungen haben wir die Regeln für das Matrizenprodukt

$$(V^T)^{-1} = (V^{-1})^T \quad , \quad (V^T)^T = V,$$

welche für allgemeine quadratische Matrizen gelten, und

$$V^{-1} = V^T$$

für orthogonale Matrizen benutzt.

Beachte auch: Wenn wir n Singulärwerte $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ haben und

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}\ .$$

c) Behauptung: $A + \lambda I$ ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-\mu_1, \ldots, -\mu_n\}$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A bezeichnen.

Denn: $A + \lambda I$ ist invertierbar, genau dann, wenn $\det(A + \lambda I) \neq 0$.

Aber $\det(A + \lambda I) = 0$ bedeutet, es existiert ein $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax + \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = -\lambda x \ ,$$

d.h. $-\lambda$ ist ein Eigenwert von A.

Folglich ist $\det(A + \lambda I) \neq 0$, falls $-\lambda \neq \mu_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Anders ausgedrückt: Wenn $y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu_i \in \mathbb{R}$ ist, d. h. es gilt:

$$Ay = \mu_i y \ ,$$

so folgt

$$Ay + \lambda y = (\mu_i + \lambda)y = 0 \ ,$$

falls $\mu_i + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\mu_i!$

Bemerkung: An Stelle der Argumentation über die Determinante kann man auch mit dem Rang argumentieren!

d) Da A symmetrisch ist, folgt aus dem Satz über die Hauptachsentransformation, dass es ein orthogonales V gibt mit $A = VDV^T$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, in der die Eigenwerte von A stehen.

Wegen $VV^T = I$ gilt auch $\lambda I = \lambda VV^T = V\lambda IV^T$, also auch

$$A + \lambda I = VDV^T + V\lambda IV^T = V(D + \lambda I)V^T \ .$$

$$\Rightarrow \quad (A + \lambda I)^{-1} = V(D + \lambda I)^{-1}V^T \ ,$$

falls $\lambda \neq -\mu_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und μ_i die Eigenwerte von A sind.

Beachte, dass $A^T = A$ impliziert: Singulärwertzerlegung = Zerlegung im Satz über die Hauptachsentransformation.

Denn: Die singulären Werte von A sind gleich der Wurzeln der Eigenwerte von A^TA = Wurzeln der Eigenwerte von A^2 und die sind (hier in diesem Fall) gleich den Beträgen der Eigenwerte von A.

Aufgabe 66: Wie lautet der Satz von Gauß? Wenden Sie dieses Satz auf die Vektorfelder $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

LÖSUNG: Satz von Gauß:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ eine glatte Fläche (in dem Sinn, dass der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt), mit $N(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$

$$\int_\Omega \mathrm{div} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\, da.$$

$$0 = \int_\Omega \partial_x 1\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f(x,y) \cdot N(x,y)\, ds = \int_{\partial\Omega} N_1(x,y)\, ds$$

$$0 = \int_\Omega \partial_y 1\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} g(x,y) \cdot N(x,y)\, ds = \int_{\partial\Omega} N_2(x,y)\, ds$$

Aufgabe 67: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von $A^T A$. ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! A orthogonal $\Rightarrow AA^T = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte von AA^T sind gleich 1 $\Rightarrow$ die Singulärwerte von A sind gleich $\sqrt{1} = 1$

b) Nein! Die Matrix $A = -\mathbb{1}$ ist orthogonal und ihre Eigenwerte sind -1. Da in diesem Fall $A^T A = \mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A jedoch gleich 1.

c) Ja! Die Singulärwerte von A ergeben sich aus den Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A = \mathbb{1}$ und $\sqrt{1} = 1$.

d) Nein! Betrachten Sie die Matrix $A = 2\mathbb{1}$. Da in diesem Fall $A^T A = 4\mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A gleich 2.

e) Nein! A symmetrisch $\Rightarrow A = A^T$

$$\Rightarrow AA^T = A^2 = UD^2U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^T$$

$\Rightarrow$ Für die Singulärwerte σ_i von A gilt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$ (siehe auch b))

f) Ja! Begründung siehe oben.

Aufgabe 68: Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

LÖSUNG: Sind alle Eigenwerte der Matrix A positiv, so ist die Matrix A positiv definit. Die Eigenwerte der Matrix berechnen wir blockweise, da A nur aus Diagonalblöcken besteht:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (5-\lambda)(3-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 14 \\ &= (\lambda - 4)^2 - 2 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{2} > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \pm 1 > 0$$

Somit sind alle Eigenwerte von A positiv und A ist positiv definit.

Aufgabe 69: Wie berechnet man auf einem Dreieck mit Knoten p_0, p_1, p_2 die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \cdots, \lambda_2$ eines Punktes x?

LÖSUNG: Seien $p_i = \begin{pmatrix} p_{i0} \\ p_{i1} \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
Die baryzentrischen Koordinaten λ_1 und λ_2 berechnet man, indem man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} p_{10} - p_{00} & p_{20} - p_{00} \\ p_{11} - p_{01} & p_{21} - p_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - p_{00} \\ x_1 - p_{01} \end{pmatrix}$$

löst. Anschließend berechnet man λ_0 wie folgt:

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Aufgabe 70: Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?

LÖSUNG: Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0, ..., n$, das nicht konstant ist hat mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 71: Man löse die Differentialgleichung

a) $\dot{x} = \frac{1}{\sin(x)}$, $x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$

LÖSUNG: Durch Separation der Variablen erhält man

a)
$$x(t) = \arccos\left(\cos(x_0) - t\right)$$

b)
$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

Aufgabe 72: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

LÖSUNG:

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2}f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Aufgabe 73: Berechnen Sie die quadratische Lagrangeinterpolation der Funktion $\cos(x)$ für Knoten $\phi/2$, 0, $-\phi/2$ für festes $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

LÖSUNG: $t_0 = \frac{\phi}{2}$, $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{\phi}{2}$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \left(\frac{x-0}{\frac{\phi}{2}-0}\right)\left(\frac{x+\frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}+\frac{\phi}{2}}\right) = \frac{2}{\phi^2}x\left(x+\frac{\phi}{2}\right) \\
L_1(x) &= \left(\frac{x-\frac{\phi}{2}}{0-\frac{\phi}{2}}\right)\left(\frac{x+\frac{\phi}{2}}{0+\frac{\phi}{2}}\right) = -\frac{4}{\phi^2}\left(x^2-\frac{\phi^2}{4}\right) \\
L_2(x) &= \left(\frac{x-\frac{\phi}{2}}{-\frac{\phi}{2}-\frac{\phi}{2}}\right)\left(\frac{x-0}{-\frac{\phi}{2}-0}\right) = \frac{2}{\phi^2}x\left(x-\frac{\phi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\frac{2}{\phi^2}x\left(x+\frac{\phi}{2}\right) - \cos(0)\frac{4}{\phi^2}\left(x^2-\frac{\phi^2}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right)\frac{2}{\phi^2}x\left(x-\frac{\phi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\frac{2}{\phi^2}x\left(x+\frac{\phi}{2}+x-\frac{\phi}{2}\right) - \frac{4}{\phi^2}\left(x^2-\frac{\phi^2}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\frac{4}{\phi^2}x^2 - \frac{4}{\phi^2}\left(x^2-\frac{\phi^2}{4}\right) \\
&= 1 - \left(1-\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\frac{4x^2}{\phi^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 74: Geben Sie die Formel der Lagrangeinterpolation für allgemeine Knotenmenge an.

LÖSUNG: Für eine Knotenmenge $x_0, \ldots, x_n$ sieht die Lagrangeinterpolation einer Funktion f wie folgt aus

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

mit

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Aufgabe 75: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = \int_{x}^{x-y} \exp(-t^2(x+y))\, dt$$

LÖSUNG: Wir setzen

$$g(u, v, w) = \int_{u}^{v} \exp(-t^2 w)\, dt$$

Es folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g(x, x-y, x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot (-1) + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot 1 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= -\exp(-x^2(x+y)) \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \exp(-(x-y)^2(x+y)) \\ \frac{\partial g}{\partial w} &= -\int_{x}^{x-y} t^2 \exp(-t^2(x+y))\, dt \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\exp(-x^2(x+y)) + \exp(-(x-y)^2(x+y)) - \int_{x}^{x-y} t^2 \exp(-t^2(x+y))\, dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\exp(-(x-y)^2(x+y)) - \int_{x}^{x-y} t^2 \exp(-t^2(x+y))\, dt$$

Hinweis: Das Integral auf der rechten Seite kann auf das Integral in der Aufgabenstellung zurückgeführt werden, was aber nicht verlangt ist.

Aufgabe 76: Wie testet man, ob eine Zahl λ Eigenwert einer quadratischen Matrix A ist?

LÖSUNG: Man prüft nach, ob

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

gilt.

Aufgabe 77: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) &= -1, \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp At$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG: Die Lösung lautet

$$x(t) = \exp Atx(0)$$

Es gilt: $e^{At} = \exp At = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots$
Um die Berechnung zu vereinfachen führen wir zunächst eine Diagonalisierung durch:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= UDU^T \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Potenzen von At leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} A^2 &= (UDU^T)^2 = (UDU^T)(UDU^T) = UD^2U^T \\ A^3 &= (UDU^T)^3 = \ldots = UD^3U^T \\ &\vdots \\ A^k &= (UDU^T)^k = \ldots = UD^kU^T \end{aligned}$$

Damit gilt nun:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k UD^kU^T}{k!} = U \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{D^k}{k!} U^T \\ &= U \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{3^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{1^k}{k!} \end{pmatrix} U^T \\ &= U \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & -e^{3t} + e^t \\ e^t - e^{3t} & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Beachten Sie: Diese Methode funktioniert nur bei diagonalisierbaren Matrizen. Für einige andere Klassen von Matrizen lässt sich e^{tA} ebenfalls leicht berechnen.)
Damit folgt

$$x(t) = \exp At \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3e^{3t} + e^t \\ e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 78: Für welches m gilt $\frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} - u'(t-\tau/2) = O(\tau^m)$ im Fall glatter Funktionen u?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} - u'(t-\frac{\tau}{2}) &\overset{h:=\frac{\tau}{2}}{=} \frac{u(t)-u(t-2h)}{2h} - u'(t-h) \\ &\overset{x:=t-h}{=} \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} - u'(x) \end{aligned}$$

An dieser Stelle sieht man, dass es sich um einen zentralen Differenzenquotienten handelt und folglich gilt $m = 2$.

Alternativ: Taylorentwicklung um $t_0 = t - \frac{\tau}{2}$.

Aufgabe 79: Sei $p \in \mathcal{P}_3$ die Hermite-Interpolation einer Funktion $f \in C^1$ an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$. Welche Bedingungen erfüllt p?

LÖSUNG:

$$\mu_i(p) = \mu_i(f)$$

mit $\mu_i(f) := f^{(d_i)}(x_i)$, wobei $d_i := \max\{j \,|\, x_i = x_{i-j}\}$. Das heißt, p und f stimmen an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ in Funktionswert und Ableitung überein: $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$.

Aufgabe 80: Berechnen Sie das Volumen des Torus, der durch Rotation des Dreieckes

$$\Delta = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x \leq 3,\ y = 0,\ 2 - x \leq z \leq x - 2 \,\}$$

um die z-Achse entsteht,

a) indem Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers (aus der Vorlesung) benutzen.

b) indem Sie die Schnittflächen berechnen, die sich durch Schneiden des Torus mit Ebenen (im $\mathbb{R}^3$) ergeben, die senkrecht zur z-Achse sind, und über diese Schnittflächen (auf-) integrieren.

c) Berechnen Sie die Oberfläche dieses Torus.

LÖSUNG:

a) Das Dreieck Δ liegt in der x, z-Ebene. Der hier betrachtete Torus ergibt sich durch Rotation dieses Dreiecks um die z-Achse.

Die Formel zur Berechnung des Volumens V eines Rotationskörpers, der um die z-Achse rotiert, lautet

$$V = \pi \int_{z_0}^{z_1} f^2(z)\, dz\,,$$

wobei $f(z)$ der Radius der Kreisscheibe ist, der durch die Rotation um die z-Achse entsteht.

Hier ist: $z_0 = -1$, $z_1 = 1$ Dies erkennt man sehr leicht an Hand einer Skizze oder man überprüft dies auf Grund der Definition von Δ.

Sowie: $f_a(z) = 3 \quad$ für $-1 \leq z \leq 1$ für den Rotationskörper, der durch Rotation der äußeren Kante des Dreiecks entsteht und
$f_i(z) = \begin{cases} 2 - z & \text{für} \quad -1 \leq z \leq 0, \\ 2 + z & \text{für} \quad 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$ für den Rotationskörper, der durch Rotation der inneren Kanten des Dreiecks entsteht.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ V &= \pi \int_{-1}^{1} f_a^2(z)\, dz - \pi \int_{-1}^{1} f_i^2(z)\, dz \\
&= \pi \int_{-1}^{1} 3^2\, dz - \pi \int_{-1}^{0} (2 - z)^2\, dz - \pi \int_{0}^{1} (2 + z)^2\, dz \\
&= 18\pi - \pi \int_{-1}^{0} (4 - 4z + z^2)\, dz - \pi \int_{0}^{1} (4 + 4z + z^2)\, dz \\
&= 18\pi - \pi \cdot \left\{ \left(4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(4z + 2z^2 + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} \right\} \\
&= 18\pi - \pi \cdot \left\{ -\left(-4 - 2 - \frac{1}{3}\right) + \left(4 + \frac{7}{3}\right) \right\} \\
&= 18\pi - \frac{38}{3} \cdot \pi \\
&= \frac{16}{3}\pi.
\end{aligned}$$

b) Die Schnittfläche des „Dreiecks“-Torus mit Ebenen senkrecht zur z-Achse liefert für $z = -1$ und $z = 1$ jeweils einen Kreis von Radius 3 und für $-1 < z < 1$ ergeben sich Kreisringe von unterschiedlicher Dicke. Die Schnittflächen $F(z)$ sind also gegeben durch

$$F(z) = \pi r_a^2(z) - \pi r_i^2(z),$$

wobei $r_a(z)$ den Radius des äußeren Kreises und $r_i(z)$ den Radius des inneren Kreises bezeichnet.
Integriert man diese Schnittflächen für $-1 \leq z \leq 1$ auf, so erhält man die in Aufgabenteil a) verwendete Formel.

c) Die innere Oberfläche des „Dreiecks“-Torus ist z. B. parametrisiert durch:

$$x(u, \varphi) = \begin{pmatrix} (2 + |u|) \cos\varphi \\ (2 + |u|) \sin\varphi \\ u \end{pmatrix}$$

für $-1 \le u \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Denn:

$$x(u,0) = \begin{pmatrix} 2+|u| \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \text{ da } \cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0\,.$$

$$x(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(-1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark.$$

$$\begin{aligned}
x_u &= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \le u \le 1, \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } -1 \le u \le 0, \\
x_\varphi &= \begin{pmatrix} -(2+|u|)\sin\varphi \\ (2+|u|)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ g_{11} &= |x_u|^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1 = 2, \\
g_{22} &= |x_\varphi|^2 = (2+|u|)^2 \sin^2\varphi + (2+|u|)^2 \cos^2\varphi = (2+|u|)^2, \\
g_{12} = g_{21} &= x_u \cdot x_\varphi = x_\varphi \cdot x_u = 0\,.
\end{aligned}$$

D. h. die Metrik g lautet:

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (2+|u|)^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \det g &= 2(2+|u|)^2, \\
\sqrt{\det g} &= \sqrt{2}\cdot(2+|u|) = |x_u \times x_\varphi|\,! \\
\Rightarrow\ F &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{2}\cdot(2+|u|)\,du\,d\varphi \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ -1 \le u \le 1. \end{pmatrix} \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_{-1}^{1} (2+|u|)\,du \\
&= 2\sqrt{2}\pi \cdot 2 \int_0^1 (2+u)\,du \\
&= 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2+u)\,du \\
&= 4\sqrt{2}\pi \cdot \left(2u + \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}\pi \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 10\sqrt{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

Nun addiert man die äußere Oberfläche des „Dreiecks“-Torus $F_a = 2\pi r \cdot 2$ mit $r = 3$, d.h. $F_a = 12\pi$ und erhält als Oberfläche

$$F = F_i + F_a = 12\sqrt{2}\pi + 12\pi = 12(\sqrt{2}+1)\pi$$

.

Aufgabe 81: Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

LÖSUNG: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist *allgemein diagonalisierbar* falls es eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gibt, sowie eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit

$$A = BDB^{-1} \qquad (AB = BD).$$

Aufgabe 82: Man berechne das Volumen des Körpers, der von den Flächen $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 0$ begrenzt wird.

LÖSUNG: *1. Möglichkeit - geometrisch*
Bei den drei Flächen handelt es sich um folgendes: $z = 0 \ldots$ x,y-Ebene
$x^2 + y^2 = 1 \ldots$ ein senkrecht stehender Zylinder mit Radius eins und der z-Achse als Mittelachse
$x + y + z = 2 \ldots$ eine schräg im Raum liegende Ebene
Der Körper ist also ein schräg abgeschnittener, senkrecht stehender Zylinder, dessen Mittelachse die z-Achse ist. Setzen wir den gleichen Körper umgekehrt darauf, so verdoppeln wir das Volumen und erhalten einen gerade abgeschnittenen Zylinder. Dieser Zylinder ist doppelt so hoch wie die mittlere Höhe des ersten Zylinders. Die mittlere Höhe des ersten Zylinders ist der Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems zum Schnittpunkt der z-Achse mit der schräg im Raum liegenden Ebene.

$$x + y + z = 2 \text{ an der Stelle } x = y = 0 \implies z = 2$$

Die Höhe des glatt abgeschnittenen Zylinders ist also $h = 4$. Das Volumen des gesuchten Zylinders ist $\frac{h}{2} * A$, wobei A die Grundfläche ist.

$$\text{Vol}_3(Zylinder) = \frac{4}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi$$

2. Möglichkeit
Da es sich um einen schräg abgeschnittenen Zylinder handelt, führen Zylinderkoordinaten auf einfache Integrationsgrenzen. Um diese einzuführen und das Volumen zu berechnen benötigen wir zwei Dinge:
Transformationsregel für mehrfache Integrale (Skript!)

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(g(x))|\det Dg(x)|dx$$

Volumen eines n-dimensionalen Körpers

$$\text{Vol}_n(A) = \int_A 1dx, \text{ mit } A \subset \mathbb{R}^n$$

Für die Zylinderkoordinaten ergibt sich für die Transformationsregel folgendes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \; |\det Dg(x)| = r$$

Damit folgt für das Volumen des Zylinders:

$$\mathrm{Vol}_3(Zyl) = \int_{Zyl} 1 \;\; dx\, dy\, dz = \int_{Zyl} r \;\; dr\, d\varphi\, dz$$

Die Grenzen lauten

$$0 \leq r \leq 1, \;\; -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$
$$0 \leq z \leq 2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi \quad (\text{aus } z = 2 - x - y)$$

Nun können wir das Volumen berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_3(Zyl) &= \int_{Zyl} r \;\; dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{2-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r \;\; dz\, d\varphi\, dr \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi \;\; d\varphi\, dr \\
&= \int\limits_0^1 \left[2r\varphi - r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} \;\; dr \\
&= \int\limits_0^1 4\pi r \;\; dr \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 83: Geben Sie für die Differentialgleichung $\dot{x} = \sin(x)$ mit $x(0) = x_0$ ein numerisches Verfahren zweiter Ordnung an.

Lösung: Das Cauchy-Euler-Verfahren ist ein Verfahren zweiter Ordnung, mit dem man die gegebenen Differentialgleichung lösen kann.
Mit $f(t_i, x_i) = \sin(x_i)$ lautet die Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned}
x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + \frac{\tau_i}{2}\sin(x_i) \\
x_{i+1} &= x_i + \tau_i \sin(x_{i+\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Die ersten Iterationsschritte sehen also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
x_{\frac{1}{2}} &= x_0 + \frac{\tau_0}{2}\sin(x_0)\\
x_1 &= x_0 + \tau_0 \sin(x_{\frac{1}{2}})\\
x_{\frac{3}{2}} &= x_1 + \frac{\tau_1}{2}\sin(x_1)\\
x_2 &= x_1 + \tau_1 \sin(x_{\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

Aufgabe 84: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

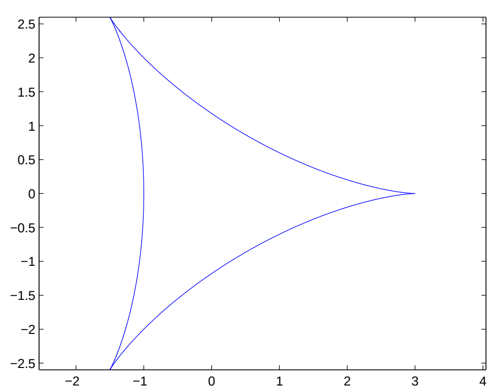
$0 \le t \le 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Lösung: Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1 dx = \int_\Omega \operatorname{div} F dx\,dy \quad \text{mit } \operatorname{div} F = 1, \text{ z.B. } F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= \int_\Gamma F \cdot N\,dl \quad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale}\\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} ||\dot\gamma(t)||\,dt\,, \quad N = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||}\begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t + 2\cos t\cos 2t - 2\cos^2 2t)dt
\end{aligned}
$$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$,
also $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_0^{2\pi} [(2\cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)]dt \\
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 85: Wann ist eine glatte Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ eine geodätische Kurve auf einer glatten Hyperfläche $\mathcal{M}$?

LÖSUNG: Eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $x : [0,1] \to \mathcal{M}$ auf einer glatten Hyperfläche $\mathcal{M}$ heißt *geodätische Kurve*, falls

$$
\dot x(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad \ddot x(t) - [\ddot x(t) \cdot n(x(t))]\, n(x(t)) - \left[\ddot x(t) \cdot \frac{\dot x(t)}{\|\dot x(t)\|}\right] \frac{\dot x(t)}{\|\dot x(t)\|} = 0.
$$

Hierbei ist $n(x(t))$ die Flächennormale auf $\mathcal{M}$.

Aufgabe 86: Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x = (2,2)$ ein lokales Maximum hat.

LÖSUNG: Der Gradient der Funktion f an der Stelle $(2,2)$ muss gleich Null sein: $\mathrm{grad} f(2,2) = 0$ und die Hesse-Matrix von f an der Stelle $x = (2,2)$ muss negativ definit sein.

Aufgabe 87: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$
\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|}\, da = 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\|x\|}\, dx\ .
$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

LÖSUNG: Nach dem Gauß'schen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gilt:
$\int_{\partial\Omega} F \cdot N da = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, F\, dx$
N = äußere Normale von $\partial\Omega$.
Wähle hier $F(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und zeige: $\mathrm{div}\, F = \frac{2}{\|x\|}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div} F &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i \cdot x_i}{\|x\|^3}\right] \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{2}{\|x\|}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 88: Geben Sie die Definition der Absolutkrümmung einer bogenlängenparametrisierten Kurve an?

LÖSUNG: Es sei x eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann nennen wir $\kappa(t) = \|\ddot{x}(t)\|$ die *Absolutkrümmung* oder einfach *Krümmung* der Kurve im Punkt $x(t)$.

Aufgabe 89: Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an?

LÖSUNG:

$$
f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + O(\|\xi\|^3)
$$

α ist ein Multiindex,
$\vartheta \in (0,1)$ ist abhängig von f, x und ξ.

Aufgabe 90: Was sagt der Satz von Schwarz aus über eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

LÖSUNG: Satz von Schwarz:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$
D^2 f(x)(v,w) = D^2 f(x)(w,v).
$$

D.h. die Bilinearform $D^2 f(x)$ ist symmetrisch und damit ist dann auch $D^2 f(x)$ eine symmetrische Matrix:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}(x).
$$

Aufgabe 91: Existieren folgende Integrale (im Sinne des Kapitels über die Integration unbeschränkter Funktionen)?

a)

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

ja ☐ nein ☐

b)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ja ☐ nein ☐

c)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

d)

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

e)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! Singularität (bei $x = 2$) ist vom Typ $r^{-1/2}$, der Integrationsbereich beschränkt im R^1, und $\frac{1}{2} < 1$.

b) Ja! Integral wurde in der Vorlesung berechnet.

c) Nein! Verhalten bei $r \to \infty$ ist vom Typ r^{-1}, der Integrationsbereich unbeschränkt im R^2, und $1 < 2$.

d) Ja! Keine Singularität.

e) Nein! Verhalten bei $r \to \infty$ ist vom Typ r^{-2}, der Integrationsbereich unbeschränkt im R^3, und $2 < 3$.

Aufgabe 92: Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \mid \|x\| < 1\}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann gilt $\nabla f(a) = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann ist die Hesse-Matrix $H(a)$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

c) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann hat f ein globales Minimum bei a. ja ☐ nein ☐

d) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und hat $H(a)$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei a ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann ist jedes lokale Minimum auch globales Minimum. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja, da D eine offene Menge ist.

b) Nein! $f(x, y) = x^4 + y^4$ besitzt an der Stelle $(0, 0)$ ein globales Minimum, aber $H(0, 0)$ ist semidefinit.

c) Wir definieren eine Funktion

$$g(t) = f(a + tv).$$

Da

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(a + tv)\, v \\ g''(t) &= Hf(a + tv)v \cdot v \ > 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g'(0) &= 0 \\ g''(t) &> 0 \qquad \text{für alle } t \text{ mit } a + tv \in D \end{aligned}$$

hat die Funktion g bei $t = 0$ ein globales Minimum. Da dies für alle Richtungen v gilt, hat die Funktion f an der Stelle a ein globales Minimum.

d) Ja! Da $H(a)$ nur positive Eigenwerte hat, ist $H(a)$ positiv definit und somit liegt ein lokales Minimum vor.

e) Ja! Argument siehe Aufgabenteil c).

Aufgabe 93: Geben Sie eine Basis des Tangentialraum an den Graphen einer glatten Funktion $(x, y) \to f(x, y)$ an.

LÖSUNG:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 94: Gibt es neben Drehungen und Spiegelungen noch andere orthogonale Abbildungen im $\mathbb{R}^2$?

LÖSUNG: Nein! Siehe Skript.

Aufgabe 95: Wie lauter der Transformationssatz der Integralrechnung in mehreren Dimensionen?

LÖSUNG: Sei Ω ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $Dg(\cdot)$ gleichmäßig stetig auf Ω, $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann gilt

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\, dy = \int_{\Omega} f(g(x)) |\det Dg(x)|\, dx.$$

Aufgabe 96: Was ist der Gradient der Abbildung $f(x) = Ax \cdot x + b \cdot x$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $b, x \in \mathbb{R}^n$?

LÖSUNG:

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + b$$

Aufgabe 97: Was folgt aus dem Satz über implizite Funktionen bezüglich der Null-Niveaumenge der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 1$?

LÖSUNG: Es ist $Df(x) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}$, das heißt der Rang von $Df(x)$ ist gleich 1 auf der Null-Niveaumenge der Funktion f.
Damit handelt es sich um eine eindimensionale stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$, das heißt es ist eine stetig differenzierbare Kurve, die sich lokal als Graph über der $x-$ oder $y-$Achse darstellen lässt.

Aufgabe 98: Was ist die Fläche des Einheitsdreiecks $\hat{T}^2$ und das Volumen des Einheitstetraeders $\hat{T}^3$?

LÖSUNG: Fläche des Einheitsdreiecks $\hat{T}^2$: $\frac{1}{2}$

Volumen des Einheitstetraeders $\hat{T}^3$: $\frac{1}{6}$

Aufgabe 99: Geben Sie die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gehörende Diagonalmatrix D, d.h. $A = UDU^T$ mit $U^T = U^{-1}$ an. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D sowie die Eigenvektoren der Matrix A.

LÖSUNG: Die zu A gehörende Diagonalmatrix hat auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)^2-(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2-1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)=0
\end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot 3\cdot 3+0+0-0-1\cdot 1\cdot 1-0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1\cdot 2\cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1+3+3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1+2+4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 100: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

LÖSUNG: Angenommen die Grundfläche des Kegels liegt in der x_1, x_2-Ebene und die Spitze zeigt nach oben, d.h. in Richtung der positiven x_3-Achse. Um den Schwerpunkt $x_s = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ dieses Kegels K berechnen zu können, müssen wir als erstes seine

Masse M_K berechnen

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K dx \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} z\right)^2 \, d\varphi \, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \int_0^{2\pi} 1 - \frac{2}{5} z + \frac{1}{25} z^2 \, d\varphi \, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 2\pi \left(1 - \frac{2}{5} z + \frac{1}{25} z^2\right) \, dz \\
&= \pi \left(z - \frac{1}{5} z^2 + \frac{z^3}{75}\right) \Bigg|_0^5 \\
&= \pi \left(5 - 5 + \frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{5}{3} \pi
\end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir komponentenweise, unter Benutzung der Zylinderkoordinaten, den Schwerpunkt.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{3}{5\pi} \int_K x_1 \, dx \\
&= \frac{3}{5\pi} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r \left(r \cos \varphi\right) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \frac{3}{5\pi} \int_0^5 \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi\right)}_{=0} \, dr \, dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da der Kegel achsensymmetrisch zur x_3-Achse ist, gilt

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 = 0.$$

Wir müssen also nur noch die dritte Komponente des Schwerpunktes berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_3\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} rz\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,dz \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 z-\frac{2}{5}z^2+\frac{z^3}{25}\,dz \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{15}z^3+\frac{z^4}{100}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{50}{3}+\frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes lauten also

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Symmetrieachse in der Höhe $\frac{5}{4}$ über dem Boden.

Aufgabe 101: Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

LÖSUNG: Die Kurve Γ ist eine Schraubenlinie um die z-Achse, die im Punkt $(1, 0, 0)$ startet, den Radius 1 hat und innerhalb von zwei Umdrehungen die Höhe 2 erreicht.

Die Länge l der Kurve Γ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^2 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \\
&= \int_0^2 \left\| \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2\left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right) + 1}\, dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2 + 1}\, dt \\
&= 2\sqrt{4\pi^2+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 102: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1)
\end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

LÖSUNG:

a) Die Parametrisierung beschreibt einen Zylindermantel. Der Zylinder hat eine Grundfläche von Radius 1, die Höhe 1 und die Symmetrieachse des Zylinders liegt auf der z-Achse des Koordinatensystems.

b)

$$
\begin{aligned}
x \circ \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\
x \circ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1)
\end{aligned}
$$

Bei der Kurve $x \circ \gamma_1$ handelt es sich um eine Strecke vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt $(1,0,1)$. Sie verläuft parallel zur Symmetrieachse des Zylinders und steht senkrecht auf der $x-y-$Ebene und somit senkrecht auf der Grundfläche des Zylinders.
Die Kurve $x \circ \gamma_2$ ist eine geschlossene Kreiskurve auf dem Zylindermantel. Sie liegt auf Höhe $\frac{1}{2}$ und verläuft parallel zur Grundfläche des Zylinders.

c) Mit Hilfe der beiden Kurven aus dem vorherigen Aufgabenteil sollen zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt

$$
x\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

berechnet werden. Da $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(x \circ \gamma_1(t)\right)\Big|_{t=\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\frac{d}{dt}\left(x \circ \gamma_2(t)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ lauten also $v_1 = (0,0,1)^T$ und $v_2 = (0, 2\pi, 0)^T$. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den ganzen Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ auf.

d) Da die beiden Vektoren v_1 und v_2 den Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ aufspannen, berechnet sich der Normalenvektor an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ wie folgt:

$$
n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.
$$

$$
v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \quad n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Der metrische Tensor G auf der Mantelfläche des Zylinders berechnet sich wie folgt

$$G = (Dx)^T Dx$$

und

$$Dx = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) Aus dem Skript wissen wir, dass sich die Länger l_1 der Kurve $x \circ \gamma_1$ auf dem Zylindermantel wie folgt mit Hilfe des metrischen Tensors berechnen läßt.

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_1(t)\cdot\dot\gamma_1(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die Länge l_2 der Kurve $x \circ \gamma_2$ auf dem Zylindermantel ergibt sich

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_2(t)\cdot\dot\gamma_2(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 2\pi\,dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

g) Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $x\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Um den Winkel α zu berechnen, in dem sie sich schneiden, benötigen wir die beiden Tangentialvektoren v_1 und v_2. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\pi\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}0\\2\pi\\0\end{pmatrix}\right\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die beiden Kurven schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 103: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: $\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 6x - 5y\ , \\
f_y(x, y) &= -5x - 4y\ .
\end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix}6 & -5\\-5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \det\begin{pmatrix}6 & -5\\-5 & -4\end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0\ .$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -5\\-5 & -4\end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned}
(6 - \lambda)(-4 - \lambda) - 25 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49\ , \\
\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 50 &\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50}\,.
\end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0, 0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0,0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3\ , \\ f(t,0) &= 3t^2 + 3 > 3\ , \\ f(0,t) &= -2t^2 + 3 < 3\ , \end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Aufgabe 104: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\ g(x,y,z) &:= x - 1 = 0\,, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

c) Bestimmen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:

a) $h(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt eine Kugel $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 2$ ($R^2 = 4\,!$) und Mittelpunkt $M = (2,0,0)^T$.

   $g(x,y,z) = x - 1 = 0$ beschreibt die Ebene $x = 1$, die parallel zur y-z-Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene $x = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = h(1, y, z) &= (1-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ \Leftrightarrow \;\; y^2 + z^2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius $\tilde{R} = \sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\tilde{M} = (1, 0, 0)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \;\Rightarrow\; z = z(y) = \pm\sqrt{3 - y^2} \quad \text{für } |y| \leq \sqrt{3}$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \;\Rightarrow\; y = y(z) = \pm\sqrt{3 - z^2} \quad \text{für } |z| \leq \sqrt{3}\,.$$

Beachte: Wegen der $\pm$ erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3 - z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3 - z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3 - y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_3(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3 - y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,.$$

c)

$$\begin{aligned} &y^2 + z^2 = 3 \quad \text{und} \quad z = z(y) \\ \Rightarrow\; &2y + 2zz' = 0 \;\Rightarrow\; z' = -\frac{y}{z}\,. \end{aligned}$$

Also gilt: $z'(y) = -\frac{y}{z(y)} = -\frac{y}{\pm\sqrt{3-y^2}}\,.$

Probe:

$$\begin{aligned} z(y) &= \pm\sqrt{3-y^2} \\ \Rightarrow \; z'(y) &= \pm\frac{1}{2\sqrt{3-y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{z(y)} \,. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für $y = y(z)$:

$$2yy' + 2z = 0 \;\Rightarrow\; y'(z) = -\frac{z}{y(z)} = -\frac{z}{\pm\sqrt{3-z^2}} \,.$$

Dies führt auf die oben schon berechneten Tangentenvektoren $\dot\gamma_1$ bis $\dot\gamma_4$ an die Schnittmenge:

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,. \\ \dot\gamma_2(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,. \\ \dot\gamma_3(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,. \\ \dot\gamma_4(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis (bis auf eine Skalierung der Tangentialvektoren) ergibt sich aus dem Satz über implizite Funktionen (und seinen Folgerungen): Wir setzen $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{f}(x,y,z) = 0\}$ und beachten, dass

$$\nabla g(x,y,z) = (1,0,0)\,,\; \nabla h(x,y,z) = 2(x-2,y,z)$$

ist. Auf M gilt deshalb

$$D\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla h(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-2) & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese 2×3 - Matrix hat auf M überall den Rang 2! Daraus ergibt sich (wie in der Vorlesung und im Skript)

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\overset{\substack{(x,y,z)\in M \\ \Rightarrow x=1}}{=} \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Beachte: Tangentialvektoren an die Schnittmenge sind die Vektoren, die gleichzeitig senkrecht zu $\nabla h(x,y,z)$ und $\nabla g(x,y,z)$ stehen. Einen solchen Vektor erhält man, indem man das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\nabla h(x,y,z)$ und $\nabla g(x,y,z)$ bildet.

Aufgabe 105: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1,-1,0)$ den kleinsten Abstand hat.

LÖSUNG: Minimieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

f ist das Quadrat des Abstandes!
Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned}
&\partial_x F =: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0\,, \\
&\partial_y F =: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y+1) - 2\lambda y = 0\,, \\
&\partial_z F =: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0\,, \\
&\partial_\lambda F = F_\lambda = -g = 0\,. \\
&\qquad \Rightarrow \begin{cases} 2z(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y(1-\lambda) = -1 \\ 2x(1-\lambda) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1-\lambda) = 1 \end{cases} \\
&\qquad \Rightarrow 1 - \lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} \\
&\qquad \Leftrightarrow \boxed{x = -y} \quad (\lambda \neq 1\,!)
\end{aligned}$$

und ($\boxed{z = 0}$ oder $\boxed{\lambda = -1}$).

Fall 1: $x = -y$ und $z = 0$:

$$\Rightarrow\ 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} \\ &= (\sqrt{2}-1)^2\,. \\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 \\ &= \frac{2(2+\sqrt{2})^2}{4} = (1+\sqrt{2})^2\,. \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda = -1 \ \Rightarrow\ 1 - \lambda = 2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y + 2 = 0 \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{2}\,, \\ 4x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \text{keine Lösung!}$$

Der minimale Wert ist also: $(\sqrt{2}-1)^2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Beachte: Die Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2$ ist stetig und für jedes feste $z_0 \in \mathbb{R}$ ist $M_{z_0} = \{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z_0^2\}$ ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt $M = (0,0,z_0)$ und Radius $R = \sqrt{1+z_0^2}$, also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt f in M_{z_0} sowohl Minimum als auch Maximum.
Bemerkung: Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor $(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ parallel zu $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ liegt.

Aufgabe 106: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

LÖSUNG:

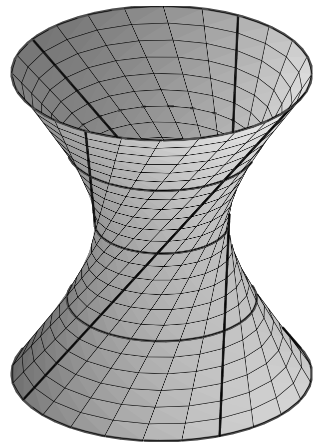
a) Mit

$$\begin{aligned} x &= \cos s - v \sin s \\ y &= \sin s + v \cos s \\ z &= v \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (\cos s - v \sin s)^2 + (\sin s + v \cos s)^2 - v^2 \\ &= \cos^2 s - 2v \cos s \sin s + v^2 \sin^2 s \\ &\quad + \sin^2 s + 2v \cos s \sin s + v^2 \cos^2 s - v^2 \\ &= 1 + v^2 - v^2 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z^2 = x^2 + y^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,.$



b) $\gamma_1(s) = X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{1 + v_0^2}$:

$$\left\| \gamma_1(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + v_0^2$$

$\gamma_2(v) = X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $v = 0$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf obigem einschaligen Drehhyperboloid liegt.

c) Die Absolutkrümmung $\kappa_1(s)$ von $\gamma_1(s)$ ergibt sich als

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + v_0^2}}\,.$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s - v_0 \cos s \\ \cos s - v_0 \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\dot\gamma_1(s)\| &= (\sin^2 s + 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \cos^2 s \\
&\quad + \cos^2 s - 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \sin^2 s)^{1/2} \\
&= \sqrt{1+v_0^2}\,, \\
\|\dot\gamma_1(s)\|^3 &= \sqrt{1+v_0^2}^{\,3}\,, \\
\ddot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} -\cos s + v_0 \sin s \\ -\sin s - v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot\gamma_1(s) \times \ddot\gamma_1(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sin s - v_0 \cos s)(-\sin s - v_0 \cos s) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\cos s + v_0 \sin s)(\cos s - v_0 \sin s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+v_0^2 \end{pmatrix}, \\
\|\dot\gamma_1(s) \times \ddot\gamma_1(s)\| &= 1+v_0^2\,, \\
\Rightarrow\ \kappa_1(s) &= \frac{\|\dot\gamma_1(s) \times \ddot\gamma_1(s)\|}{\|\dot\gamma_1(s)\|^3} = \frac{1+v_0^2}{(1+v_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies sollte auch so sein, da ein Kreis die Krümmung $\kappa = \frac{1}{\text{Radius}}$ hat!

Die Absolutkrümmung $\kappa_2(s)$ von $\gamma_2(s)$ lautet dementsprechend

$$\kappa_2(v) \equiv 0\,.$$

Anschaulich ist das klar, da $\gamma_2(s)$ eine Gerade beschreibt!

In Formeln:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_2(v) &= \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konstanter Vektor!} \\
\Rightarrow\ \ddot\gamma_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \dot\gamma_2(v) \times \ddot\gamma_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \kappa_2(v) = 0\,!
\end{aligned}$$

Beachte: $\|\dot{\gamma}_2(v)\| = \sqrt{2} > 0\,!$

Aufgabe 107: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{12} v_1 v_1^T$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 6 \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 \qquad = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = -5, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{40} v_2 v_2^T$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 0 \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 40 \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 40 \qquad = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$R = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 108: Welche Kurve verbirgt sich hinter der Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy = 1 \right\}?$$

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
&& \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}y^2 + xy &= 1 \\
\Leftrightarrow && \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\
\Leftrightarrow && \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\
\Leftrightarrow && \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & 1\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & 1\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1
\end{aligned}
$$

Es handelt sich also um eine Ellipse mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{2}$, die um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ gedreht ist.

Aufgabe 109: Schreiben Sie $\sin^4 x$ und $\sin^2 x \cos^2 x$ als Linearkombination von $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$

Tipp: Verwenden Sie die Formeln

$$\sin(x) = \frac{1}{2\,i}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x}), \quad \cos(x) = \frac{1}{2}\,(e^{i\,x} + e^{-i\,x})$$

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \frac{1}{16}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x})^4 \\
&= \frac{1}{16}\,(e^{4\,i\,x} - 4\,e^{3\,i\,x}\,e^{-i\,x} + 6\,e^{2\,i\,x}\,e^{-2\,i\,x} - 4\,e^{i\,x}\,e^{-3\,i\,x} + e^{-4\,i\,x}) \\
&= \frac{1}{16}\,((e^{4\,i\,x} + e^{-4\,i\,x}) - 4\,(e^{2\,i\,x} + e^{-2\,i\,x}) + 6) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\,x) - \frac{1}{2}\,\cos(2\,x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x)\,\cos^2(x) &= -\frac{1}{4}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x})^2 \cdot \frac{1}{4}\,(e^{i\,x} + e^{-i\,x})^2 \\
&= -\frac{1}{16}\,(e^{4\,i\,x} - 2 + e^{-4\,i\,x}) \\
&= -\frac{1}{8}\,\cos(4\,x) + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8}\,(1 - \cos(4\,x))
\end{aligned}
$$

andere Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= -\frac{1}{4}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x})^2 = -\frac{1}{4}\,(e^{2\,i\,x} + e^{-2\,i\,x} - 2) \\
&= \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x)) \\
\Rightarrow \sin^2(x)\,\cos^2(x) &= \sin^2(x)\,(1 - \sin^2(x)) = \sin^2(x) - \sin^4(x) \\
&= \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2\,x)) - \left[\frac{1}{8}\cos(4\,x) - \frac{1}{2}\cos(2\,x) + \frac{3}{8}\right] \\
&= -\frac{1}{8}\cos(4\,x) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,(1 - \cos(4\,x))
\end{aligned}$$

Aufgabe 110: Wie sieht die Spiegelungsmatrix aus, die im QR-Verfahren zur Elimination der ersten Spalte der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ verwendet wird?

LÖSUNG: Die i-te Spalte der Matrix A nennen wir $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Nun definieren wir

$$\alpha_1 := -\mathrm{sign}\,(a_{11})\,\|a_1\|$$

und setzen

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} - \alpha_1 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_1 - \alpha_1 e_1$$

Die Matrix, mit der man im QR-Verfahren die erste Spalte der Matrix A eliminiert sieht nun wie folgt aus:

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} + \frac{v_1 v_1^T}{\alpha_1 v_{11}}.$$

Wendet man diese Matrix auf die Matrix A an, so erhält man

$$Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & | & & | \\ 0 & | & & | \\ \vdots & Qa_2 & \cdots & Qa_n \\ 0 & | & & | \end{pmatrix}.$$