Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **08.01.2012**.

Aufgabe 27. (Vorkonditionierung)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt zeilenäquilibriert, falls gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}| = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zeilenäquilibriert und regulär. Dann gilt für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Abschätzung $\text{cond}_\infty(A) \leq \text{cond}_\infty(DA)$.

b) Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiere die Diagonalmatrix $T := \text{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$ mit $\alpha_j = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|$. Dann gilt $\text{cond}_\infty(TA) \leq \text{cond}_\infty(A)$.
(Hinweis: b) folgt aus a) durch Verwendung einer geeigneten Diagonalmatrix.)

(5 Punkte)

Aufgabe 28. (ILU(0))

Berechnen Sie die unvollständige LU-Zerlegung ohne "fill-in", ILU(0), der nachfolgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 5. In dieser Aufgabe wollen wir die Lösung des 2D-Poisson-Problems

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

auf einem beliebig geformten polygonalen Gebiet mit linearen finiten Elementen approximieren. In Vorbereitung zu dieser Programmieraufgabe wurde bereits eine Triangulierung des Gebietes in drei verschiedenen Auflösungsstufen mit Hilfe des Programmes `triangle`, siehe `http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html`, durchgeführt. Die Knoten und Dreiecke sind in `.node`- und `.ele`-Dateien auf der Webseite der Vorlesung abgelegt. Deren Format wird auf der zuvor genannten Webseite ausführlich beschrieben. Bitte beachten Sie auch, dass mit dem Programm `showme`, das ebenfalls auf der Webseite erhältlich ist, die Triangulierung visualisiert werden kann.

a) Implementieren Sie notwendige Methoden, um zwei auf der Kommandozeile angegebene `.node`- und `.ele`- Dateien einzulesen und die P1 Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix im in der Vorlesung eingeführten CSR-Format für dünnbesetzte Matrizen aufzustellen. Verwenden Sie den in der Vorlesung beschriebenen Ansatz, alle Berechnungen durch Transformation auf ein Referenzelement durchzuführen.

b) Modifizieren Sie das CG-Verfahren aus den vorangegangenen Programmieraufgaben derart, dass es auch eine Vorkonditionierung erlaubt und nun eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit CSR-Matrix benutzt wird. Lösen Sie nun das entsprechende lineare Gleichungssystem aus a) mit

   (a) ohne Vorkonditionierung und
   (b) mit der gelumpten Massenmatrix als Vorkonditionierer

   und vergleichen Sie Laufzeiten und Iterationszahlen. Die gelumpte Massenmatrix (Diagonalmatrix) erhalten Sie durch die Multiplikation der eigentlichen Massenmatrix mit einer Matrix die auf der Diagonalen nur Einsen stehen hat. Brechen Sie das vorkonditionierte CG-Verfahren mit Null-Start-Vektor bei einer realtiven Reduktion des Residuums um 10^{-8} ab. Berechnen Sie die L_2- und H^1-Norm der Lösung für alle drei Eingangsgitter.

c) Implementieren Sie nun die in der Vorlesung eingeführte unvollständige LU-Zerlegung ohne "fill-in" (ILU(0)) für CSR-Matrizen und nutzen Sie diese ebenfalls als Vorkonditionierer in den Laufzeitvergleichen.

d) Verwenden Sie `triangle` für weitere Verfeinerungen (beachten Sie dazu die Kommandozeile jeweils am Ende der `.node`- und `.ele`-Dateien). Wie wachsen die Laufzeiten von

   - Einlesen und Berechnen des Sparsity-Patterns,
   - Aufstellen der Steifigkeitsmatrix A,
   - Ausführen einer Multiplikation $v \mapsto Av$

   mit der Anzahl der Elemente?

Hinweis: Mit den Aufgabenteilen a) und b) erhalten Sie bereits 10 der Punkte. Bitte beachten Sie, dass diese Augabe einen Wert von **20 Punkten** hat.

(20 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in der Woche vom **21.01.** bis **25.01.2013**.

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!