Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **13.11.2012**.

Aufgabe 9. (Folgerungen zum Maximumsprinzip)

Sei L ein linearer elliptischer Differentialoperator.

a) Ist $Lu = f \geq 0$ in Ω, so nimmt u sein Minimum auf dem Rand von Ω an.

b) Wenn für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$$Lu \leq Lv \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$u \leq v \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

gilt, so folgt $u \leq v$ in Ω.

c) Die Lösung der linearen Gleichung $Lu = f$ mit Dirichlet-Randbedingungen hängt stetig von den Randwerten ab. Seien u_1 und u_2 Lösungen der linearen Gleichungen $Lu = f$ zu verschiedenen Randwerten, so ist

$$\sup_{x\in\Omega} |u_1(x) - u_2(x)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |u_1(z) - u_2(z)|.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 10. (Folgerungen zum Maximumsprinzip)

Sei L ein linearer elliptischer Differentialoperator.

a) Sei L gleichmäßig elliptisch in Ω. Dann gibt es eine nur von Ω und der Elliptizitätskonstanten α abhängige Zahl c, so dass für jedes $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$$|u(x)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |u(z)| + c \sup_{z\in\Omega} |Lu(z)|.$$

Tipp: Konstruieren Sie sich eine Funktion $w(x) = R^2 - \sum_i x_i^2$, wobei R der Radius eines Kreises ist, in dem Ω vollständig enthalten ist.

b) Für den allgemeineren Differentialoperator

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{d} a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + c(x)u \quad \text{mit } c(x) \geq 0$$

gilt ein abgeschwächtes Maximumsprinzip. Aus $Lu \leq 0$ folgt

$$\max_{x\in\Omega} u(x) \leq \max\left\{0, \max_{x\in\partial\Omega} u(x)\right\}.$$

Tipp: Der Hauptteil $Lu - cu$ ist ein elliptischer Operator.

(5 Punkte)

Aufgabe 11. (Finite Differenzen)

Die erste Ableitung u' einer reellen Funktion $u(x)$ kann auf einem Gitter der Maschenweite h durch folgenden Differenzenstern diskretisiert werden:

$$\frac{1}{12h}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die Näherung $u'_h(x_i)$ am Gitterpunkt x_i explizit an.

b) Ermitteln Sie die Konsistenzordnung dieser Diskretisierung. Verwenden Sie hierzu geeignete Taylor-Entwicklungen von u am Punkt x_i.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 2. Sei $\Omega = [0,1]^2$ und das Poisson-Problem mit

$$-a(x)\Delta u(x) = f \quad \text{in } \Omega, \tag{3}$$

$$u(x) = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{4}$$

gegeben. Führen Sie hierauf ein Diskretisierungsgitter mit $(N+1)\times(N+1)$ Gitterpunkten

$$\mathcal{X}_N = \left\{ x_{i,j} \,\middle|\, x_{i,j} = \left(i \cdot \frac{1}{N}, j \cdot \frac{1}{N} \right), i = 0 \dots N, j = 0 \dots N \right\},$$

d.h. mit einer Maschenweite $h = \frac{1}{N}$ in jede Raumrichtung, ein.

a) Diskretisieren Sie die obige Gleichung mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode. Führen Sie dies zunächst theoretisch durch und notieren Sie die Matrix-Darstellung der entsprechenden Diskretisierung. Bitte beachten Sie, dass Sie nach der Diskretisierung der Randbedingung (der Dirichlet-Randwert wird auf die rechte Seite gebracht) auf ein lineares Gleichungssystem mit $(N-1)^2$ Unbekannten und Zeilen kommen.

b) Implementieren Sie eine Funktion, die direkt die Anwendung der resultierenden dünnbesetzten Matrizen auf einen Vektor durchführt, ohne dabei Nullen zu Multiplizieren, bauen Sie diese in das bereits implmentierte CG-Verfahren ein und lösen Sie damit die entstehenden linearen Gleichungssysteme. Als a, f und g sollen

- $a(x) = 1, \quad f = 4\pi^2(x_1^2 + x_2^2)\sin(2\pi\, x_1\, x_2),$
  $g|_{x_1=0} = g|_{x_2=0} = 0, \quad g|_{x_1=1,x_2\neq 0} = \sin(2\pi x_2), \quad g|_{x_1\neq 0,x_2=1} = \sin(2\pi x_1)$
- $a(x) = (1 + x_1 + x_2), \quad f = 4\pi^2(1 + x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)\sin(2\pi\, x_1\, x_2),$
  $g|_{x_1=0} = g|_{x_2=0} = 1, \quad g|_{x_1=1,x_2\neq 0} = \sin(2\pi x_2)+1, \quad g|_{x_1\neq 0,x_2=1} = \sin(2\pi x_1)+1.$

verwendet werden. (Die analytisches Lösungen sind $u(x) = \sin(2\pi\, x_1\, x_2)$ und $u(x) = \sin(2\pi\, x_1\, x_2) + 1$.)

c) Plotten Sie für $h = 2^{-4}, 2^{-6}, 2^{-8}, 2^{-10}$ die Zahl der Iterationen gegen den l^∞-Fehler bzgl. der analytischen Lösung.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt im CIP-Pool (We6, 6. Stock) in der Woche vom 19.11. bis 23.11.2012.