



Algorithmische Mathematik

Wintersemester 2013
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
Dr. Einar Smith
Patrick Diehl und Daniel Wissel



Übungsblatt 13.

Abgabe am **27.01.2014**.

Aufgabe 1. (Matrixnormen)

Für eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ sei die zugehörige Matrixnorm ebenfalls mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|B\| < 1$, und bezeichne I die Einheitsmatrix. Zeigen Sie:

a. $(I - B)$ ist nichtsingulär;

b. $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$;

c. $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$.

(1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

Aufgabe 2. (Pivotstrategien)

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine symmetrisch positiv definite (**spd**) Matrix, d.h.

$$A = A^T \quad \text{und} \quad \langle Ax, x \rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N, \quad x \neq 0.$$

Zeigen Sie:

$$\max_{i,j=1,\dots,N} |a_{ij}| = \max_{i=1,\dots,N} a_{ii}.$$

Angenommen, Sie kennen die Cholesky-Zerlegung nicht, sondern nur die LR-Zerlegung mit Pivotisierung. Interpretieren Sie das Resultat entsprechend in Bezug auf Pivotstrategien, insbesondere der vollständigen Pivotstrategie.

(4 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 3. (Cholesky-Zerlegung)

Gegeben sei die symmetrisch positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Geben Sie die LR-Zerlegung $A = LR$ der Matrix A an.

b. Geben Sie die Cholesky-Zerlegung $A = CC^T$ der Matrix A an.

(2 + 2 = 4 Punkte)

Aufgabe 4. (Inversenbestimmung durch LR -Zerlegung)

Gegeben sei die tri-diagonale $(N \times N)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,N} > 0$, d.h.:

$$\tilde{a}_{ij} > 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, N.$$

Nutzen Sie hierfür die LR -Zerlegung der Matrix A , sowie die zugehörigen Inversen L^{-1}, R^{-1} .

(6 Punkte)