

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$ .

LÖSUNG: (I) Bestimmung der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3 - \lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also sind  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 4$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ .

(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**

a) Für  $\lambda_1 = -1$  gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2.$$

Also ist  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  die Menge aller Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = -1$  von  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Probe: } \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für  $\lambda_2 = 4$  gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Also ist  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  die Menge aller Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 4$  von  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Probe: } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(III) Es sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von  $\mathbf{B}$  lautet:  $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$  (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{4}.$$

Offensichtlich gilt:  $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$  und  $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$  ( $-1 = -1$  und  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ).

**Fazit:** Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}^{-1}$  sind die Kehrwerte der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ !

**Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**

a) Für  $\lambda_1 = -1$  gilt:

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  auch die Menge aller Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = -1$  von  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

b) Für  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$  gilt:

$$\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Also ist  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  auch die Menge aller Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$  von  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

**Fazit:** Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}^{-1}$  sind die Kehrwerte der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn  $\lambda_1$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  ist und  $\frac{1}{\lambda_1}$  folglich ein Eigenwert von  $\mathbf{A}^{-1}$ , so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.