

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: .....

Vorname: .....

Matrikel-Nr.: .....

Aufgabe:	1	2	3	$\emptyset$
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet.  
Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

**Aufgabe 1:** a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x}{x^2 - x - 6} dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 x^3 \ln |x| dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x - 3\pi) dx.$$

LÖSUNG:

a)

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{5x}{(x+2)(x-3)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \\
\Leftrightarrow 5x &= A(x-3) + B(x+2) \\
\Leftrightarrow 5x &= (A+B)x - 3A + 2B \\
\Leftrightarrow 3A &= 2B \text{ und } A+B=5 \\
\Leftrightarrow A &= \frac{2}{3}B \text{ und } \left(\frac{2}{3}+1\right)B=5 \\
\Leftrightarrow A &= \frac{2}{3}B \text{ und } B=3 \\
\Leftrightarrow A &= 2 \text{ und } B=3
\end{aligned}$$

$$\int \frac{5x}{x^2-x-6} dx = \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = 2 \ln(x+2) + 3 \ln(x-3)$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3 \ln|x| dx &= - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \frac{1}{x} dx + \left[ \frac{1}{4} x^4 \ln|x| \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx + 4 \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(1) \\
&= \left[ -\frac{1}{16} x^4 \right]_1^2 + 4 \ln(2) \\
&= -1 + \frac{1}{16} + 4 \ln(2) \\
&= -\frac{15}{16} + 4 \ln(2)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x-3\pi) dx &= \int_{-3\pi}^{-\pi} \sin(y) \frac{1}{4} dy \quad \left( y = 4x - 3\pi, \frac{dy}{dx} = 4 \right) \\
&= \left[ -\frac{1}{4} \cos(y) \right]_{-3\pi}^{-\pi} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied  $O(\|\cdot\|^3)$ ) für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)^2$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  an.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x)^2 \\
f'(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\
f''(x) &= 2 \cos(x)^2 - 2 \sin(x)^2
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + O(\|x - x_0\|^3) \\ &= \sin(x_0)^2 + 2\sin(x_0)\cos(x_0)(x - x_0) + (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)(x - x_0)^2 + O(\|x - x_0\|^3) \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$ .

- Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.
- Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion  $f(x)$  zu diesen Knoten.
- Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von  $-1$  bis  $1$  mit den Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  an.
- Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

an.

- Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion  $f$ ?
- Geben Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

an. (ohne Rechnung)

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x}{-1} \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1) \\ L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + 1}{1} \frac{x - 1}{-1} = -(x + 1)(x - 1) \\ L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x + 1}{1 + 1} \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}x(x + 1) \end{aligned}$$

b)

$$p(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) = L_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1$$

c)

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x) dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 + x) dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \left( \frac{1}{6}f(x_0) + \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{1}{6}f(x_2) \right)$$

d)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \left( \frac{1}{6}0 + \frac{2}{3}1 + \frac{1}{6}0 \right) = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

e) Oberer Halbkreis.

f)  $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \approx 1.57$

### Formelsammlung:

- Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x)g'(x) dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

- Substitutionsregel

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds.$$

- Taylorentwicklung

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + R_{n+1}(y)$$

- Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$