

Aufgabe 17: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, \dots, u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

- a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$, dann ist $v = 0$.
ja nein
- b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) u_i$.
ja nein
- c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja nein
- d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$.
ja nein
- e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$.
ja nein

Aufgabe 18: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T A x = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

- a) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung.
ja nein
- b) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja nein
- c) Gilt Rang von A gleich n , dann ist $A^T A$ positiv definit.
ja nein
- d) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$.
ja nein

Aufgabe 19: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.
- b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

und für $k = 1, \dots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

- c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.