Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **13. August 2015**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte Note Datum Unterschrift

______________ _____ __________ __________________________

______________ _____ __________ __________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Definieren Sie die zu z komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$.

(1 Punkt)

b) Sei $z = re^{i\phi}$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten. Geben Sie die zu z komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ in Polarkoordinatendarstellung an.

(1 Punkt)

c) Bestimmen Sie zu $z_1 = i$ und $z_2 = \sqrt{i}$ die Polarkoordinatendarstellung.

(2 Punkt)

d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + (2 + 2i)z - 6i = 0$ und geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

(2 Punkte)

e) Bestimmen Sie zu $z = 1 - i$ die Polarkoordinatendarstellung.
Berechnen Sie z^2, z^3 und z^4 jeweils in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie z, z^2, z^3 und z^4 in die komplexe Ebene.

(4 Punkte)

Lösung: a) $\bar{z} = a - ib$

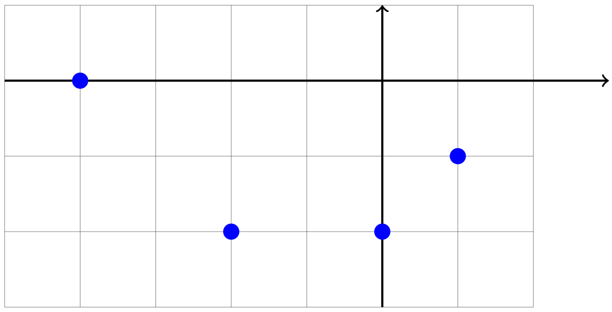
b) $\bar{z} = re^{-i\phi}$.

c) $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{i} = \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) Benutze aus Teil c) $\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ und berechne

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= -(1+i) \pm \sqrt{8i} \\
&= -(1+i) \pm 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -(1+i) \pm 2(1+i) \\
&\Rightarrow z_1 = 1 + i,\ z_2 = -3 - 3i
\end{aligned}$$

e) Für $z = 1 - i$: $r = \sqrt{2}$, $\phi = arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ bzw. $\phi = \frac{7\pi}{4}$
$z^2 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$
$z^3 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = -2 - 2i$
$z^4 = 4 \cdot e^{-i\pi} = -4$



Aufgabe 2: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx \, .$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx \, .$$

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2+8x^2} \, dx \, .$$

(2 Punkte)

Lösung: a) Benutze $(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left((\ln x)^2\right)' \, dx = \frac{1}{2} \left[(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

Variante mit partieller Integration:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx = [\ln x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2}$$

($2 \int = 1$)

b) mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx &= \left[-\cos(x) x^2\right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos(x) \, dx \\ &= \pi^2 + [2x \sin(x)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin(x) \, dx \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

c) Substituiere $y = 2x$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2+8x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2(1+y^2)} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2(1+y^2)} \, dy \\ &= \frac{1}{4} \left[arctan(y)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: a) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung l-ter Ordnung (d.h. mit Restglied $l+1$-ter Ordnung) von f um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung vierter Ordnung (d.h. mit Restglied fünfter Ordnung) von

$$f(x) = x \ln x$$

um den Punkt $x_0 = 1$.

(4 Punkte)

c) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung l-ter Ordnung (d.h. mit Restglied $l+1$-ter Ordnung) von g um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ an.

(1 Punkte)

d) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) von

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

um den Punkt $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(4 Punkte)

Lösung: a) $f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) h^i + \mathrm{O}(|h|^{l+1})$

bzw. $f(y) = \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(y - x_0)^i + \mathrm{O}(|y - x_0|^{l+1})$

b)

$$\begin{aligned}
&f(x) = x \ln(x) \quad f(1) = 0 \\
&f'(x) = \ln(x) + 1 \quad f'(1) = 1 \\
&f''(x) = x^{-1} \quad f''(1) = 1 \\
&f'''(x) = -x^{-2} \quad f'''(1) = -1 \\
&f^{(4)}(x) = 2x^{-3} \quad f^{(4)}(1) = 2 \\
&\Rightarrow f(1 + h) = h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{12}h^4 + \mathrm{O}(|h|^5)
\end{aligned}$$

c)

$$g(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha g(x_0) h^\alpha + \mathrm{O}(\|h\|^l) \qquad \alpha \text{ Multiindex}$$

d) $d(1,0) = 1$

$$\nabla d(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2)^{-1/2} \\ y(x^2+y^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla d(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 d(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^{-1/2} - x^2(x^2+y^2)^{-3/2} & -(x^2+y^2)^{-3/2}xy \\ -(x^2+y^2)^{-3/2}xy & (x^2+y^2)^{-1/2} - y^2(x^2+y^2)^{-3/2} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \nabla^2 d(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(1+h_x, h_y) = 1 + h_x + \frac{1}{2}h_y^2 + \mathrm{O}(\|\mathbf{h}\|^3)$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-2; 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

(1 Punkt)

b) Lösen Sie das Interpolationsproblem, indem Sie ein Polynom P maximal vierten Grades finden, dessen Funktionswert an den Knoten

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$$

mit dem von f übereinstimmt, d.h. $P(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ exakt.

(1 Punkt)

d) Geben Sie die Fassregel zur numerischen Approximation des Integrals $\int_a^b h(x)\, dx$ an.

(1 Punkt)

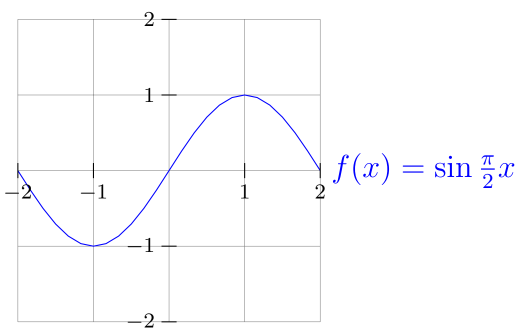
e) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$$

unter Verwendung der Fassregel auf den Teilintervallen $[-2, 0]$ und $[0, 2]$.

(3 Punkte)

Lösung: a)



b)

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$I)\ 0 = f(0) = e$$
$$II)\ 0 = f(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e = 16a - 8b + 4c - 2d$$

$$\begin{aligned} III)\ 0 &= f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e = 16a + 8b + 4c + 2d \\ IV)\ -1 &= f(-1) = a - b + c - d + e = a - b + c - d \\ V)\ 1 &= f(1) = a + b + c + d + e = a + b + c + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &IV) + V) \Rightarrow 0 = 2a + 2c \Rightarrow a = -c \\ &III) - II) \Rightarrow 0 = 16b + 4d \Rightarrow d = -4b \end{aligned}$$

Einsetzen in $V)$ ergibt

$$1 = -3b \Rightarrow b = -\frac{1}{3},\ d = \frac{4}{3}$$

Einsetzen in $III)$ ergibt

$$0 = -12c \Rightarrow a = c = 0$$

Damit

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$$

c) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$

d) $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(h(a) + 4h\left(\frac{a+b}{2}\right) + h(b)\right)$

e) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{2}{6}\left(f(-2) + 4f(-1) + f(0)\right) + \frac{2}{6}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right) = 0$

Aufgabe 5: Gegeben sei eine Parametrisierung

$$x(z,\varphi) = \begin{pmatrix} r(z)\cos(\varphi) \\ r(z)\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

wobei $r(z) = z$, $z \in [0,2]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a) Welches Fläche wird durch x parametrisiert?

(2 Punkte)

b) Geben Sie die Metrik der durch x parametrisierten Fläche an.

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

(4 Punkte)

Lösung:

a) Zunächst handelt es sich um eine Rotationsfläche mit Funktion $r(z) = z$, d.h. um einen Kegel.

b)

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -z\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & z\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

$$\text{Flächeninhalt} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{detg}\, dz\, d\varphi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}z\, dz\, d\varphi = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^2 = 4\sqrt{2}\pi$$

Aufgabe 6: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{t}y(t) + t^2,$$
$$y(1) = 1.$$

a) Hat das Anfangswertproblem in einer Umgebung von $t = 1$ eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1 Punkt)

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem (mit Hilfe von Variation der Konstanten).

(5 Punkte)

c) Betrachten Sie nun das System von Differentialgleichungen

$$\dot{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} v(t)$$

mit Anfangswert $v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie zwei Schritte des Cauchy-Euler Verfahrens mit $\tau = \frac{1}{2}$.

(4 Punkte)

Lösung:

a) Die rechte Seite $f(t, y) = \frac{1}{t}y^2 + t^2$ ist stetig differenzierbar in t und y in einer Umgebung von $t = 1$ und damit lokal Lipschitz-stetig in y. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert also eine Lösung.

b) Die Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{t}y(t) + t^2 = a(t)y(t) + b(t).$$

Zunächst berechnen wir die homogene Lösung:

$$x(t) = \exp\left(\int_1^t a(s)\, ds\right) = \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s}\, ds\right) = t.$$

Nun machen wir den Ansatz $y(t) = w(t)x(t)$ und berechnen $w(t)$ durch

$$w(t) = \int_1^t \frac{b(s)}{x(s)} ds + y_0 = \int_1^t s ds + 1 = \frac{1}{2}(t^2 + 1).$$

Somit gilt

$$y(t) = w(t)x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)t.$$

Probe:

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{1}{2}(1^2+1)1 = 1,\\
\dot{y}(t) &= \frac{1}{2}(t^2+1) + t^2 = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{t}y(t) + t^2.
\end{aligned}$$

c) Cauchy-Euler Verfahren mit Anfangswert v_0 und Zeitschritt τ:

$$\begin{aligned}
v_{i+\frac{1}{2}} &= v_i + \frac{\tau}{2} f(t_i, v_i)\\
v_{i+1} &= v_i + \tau f(t_i + \frac{\tau}{2}, v_{i+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

1.Schritt: $i = 0$

$$\begin{aligned}
v_{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
v_1 &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.Schritt: $i = 1$

$$\begin{aligned}
v_{\frac{3}{2}} &= \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\\
v_2 &= \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7:

a) Geben Sie den Transformationssatz der mehrdimensionalen Integralrechnung im $\mathbb{R}^3$ an.

(2 Punkte)

b) Geben Sie die konkrete Transformationsformel für die Integration in Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ an.

(2 Punkte)

c) Es sei
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 2],\ x^2 + y^2 \le z\right\}.$$
Berechen Sie das Volumen und den Schwerpunkt der Menge D.

(6 Punkte)

Lösung:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ invertierbar und stetig differenzierbar, $Dg(\cdot)$ gleichmäßig stetig auf Ω, $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann gilt
$$\int_{g(\Omega)} f(y)\, dy = \int_\Omega f((g(x))| \det Dg(x)|\, dx\,.$$

b) $g(r, \phi, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $Dg(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det Dg = r$
$$\int_{g(U)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_U f(g(r, \phi, z))\, r\, dr\, d\phi\, dz$$

c) $D = g(U)$ wobei $U = \{(r, \phi, z) \mid z \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{z}]\}$
$$\begin{aligned} M &= \int_D 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r\, dr\, d\phi\, dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \frac{1}{2}\left[z^2\right]_0^2 = 2\pi \end{aligned}$$

Schwerpunkt:
$$\begin{aligned} x_S &= 0, y_S = 0, \qquad \text{(Symmetrie)} \\ z_S &= \frac{1}{M} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} z\, r\, dr\, d\phi\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} z\, r\, dr\, d\phi\, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} z\, r\, dr\, dz = \frac{1}{2} \int_0^2 z^2\, dz = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ so, daß

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.
Berechnen Sie den Wert von f an dieser Stelle.

(10 Punkte)

Lösung: **QR-Verfahren:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\alpha_1 = -\operatorname{sign}(1) \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{9} = -3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} + \frac{1}{v_{11}} v_1 v_1^T = \mathbb{1} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = Q^{(1)} b^{(1)} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = -\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{25} = -5$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = Q^{(2)} b^{(2)} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Für $(x, y) = (2, 3)$ wird $f(x, y)$ minimal. Der Funktionswert ist $f(2, 3) = 900$.

1. Alternativlösung

Normalengleichung:

$$A^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^T b$$

Berechne $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 89 \end{pmatrix}$$

und $A^T b$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 315 \end{pmatrix}.$$

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 315 \end{pmatrix}.$$

2. Alternativlösung

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= 9x^2 + 48xy + 89y^2 - 180x - 630y - 2025. \end{aligned}$$

Berechnung Nullstelle vom Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 18x + 48y - 180 \\ 48x + 178y - 630 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 315 \end{pmatrix} \text{Normalengleichung.}$$

Des Weiteren gilt

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 18 & 48 \\ 48 & 178 \end{pmatrix} = A^T A$$

ist positiv definit, d.h. $f(x,y)$ ist an der Nullstelle minimal.

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Menge

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1 \right\}.$$

a) Begründen Sie, dass es sich bei der Menge E um eine Ellipse handelt.
(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Hauptachsen der Ellipse E,
d.h. deren Richtung und Länge.
(8 Punkte)

Lösung:

a) Zunächst gilt

$$x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Da

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4} > 0$$

und $a_{11} = 1 > 0$ ist die Matrix positiv definit und damit sind alle Eigenwerte positiv. Somit handelt es sich bei E um eine Ellipse.

b) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4}.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm 1,$$

d.h. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Die Matrix der orthonormierten Eigenvektoren lautet

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Somit hat die Ellipse eine Hauptachse in Richtung $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Länge $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{2}$ und eine Hauptache in Richtung $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ mit Länge $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Probe:
Da $A = UDU^T$, ergibt sich mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 1.$$

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Kreuzprodukt).}$$

a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, s.d. $f(x) = Ax$.

(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$.

(2 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen x und $f(x)$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$.

(3 Punkte)

Lösung: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\det(\lambda Id - A) = \lambda^3 + 25\lambda$ Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5i$, $\lambda_3 = -5i$.

c) Zu lösen ist die Gleichung $Ax = 0$.

Lösung: $x \in span \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\measuredangle(x, f(x)) = arccos\left(\frac{1}{\|Ax\|\cdot\|x\|} < Ax, x >\right) = arccos(0) = \frac{\pi}{2}$