Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **17. März 2015**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte Note Datum Unterschrift

______________ _____ __________ ________________________

______________ _____ __________ ________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Geben Sie den Quotienten zweier komplexer Zahlen $\dfrac{a+ib}{c+id}$ (wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

(1 Punkt)

b) Geben Sie den Quotienten zweier komplexer Zahlen $\dfrac{se^{i\psi}}{te^{i\theta}}$ (wobei $s, t, \psi, \theta \in \mathbb{R}_0^+$, $t \neq 0$) in der Form $re^{i\phi}$ mit $r, \phi \in \mathbb{R}_0^+$ an.

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^8 = 16$$

und skizzieren Sie ihre Lage in der komplexen Ebene.

(2+1 Punkte)

d) Berechnen Sie i^{42}.

(2 Punkte)

e) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 = i$$

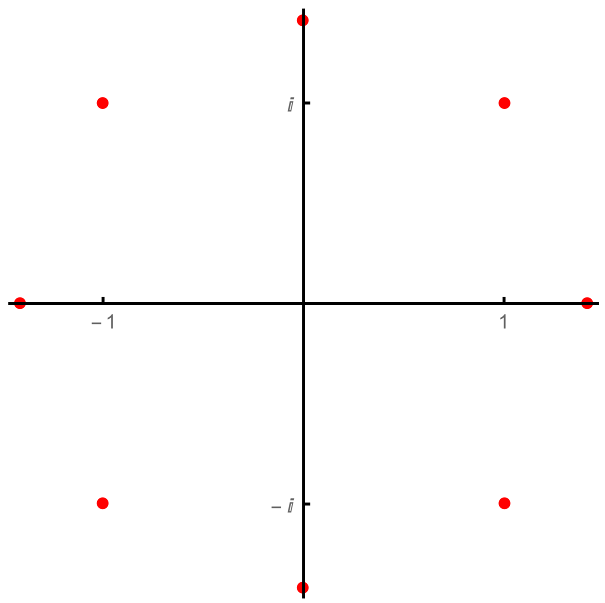
und skizzieren Sie ihre Lage in der komplexen Ebene.

(2+1 Punkte)

Lösung: a) $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

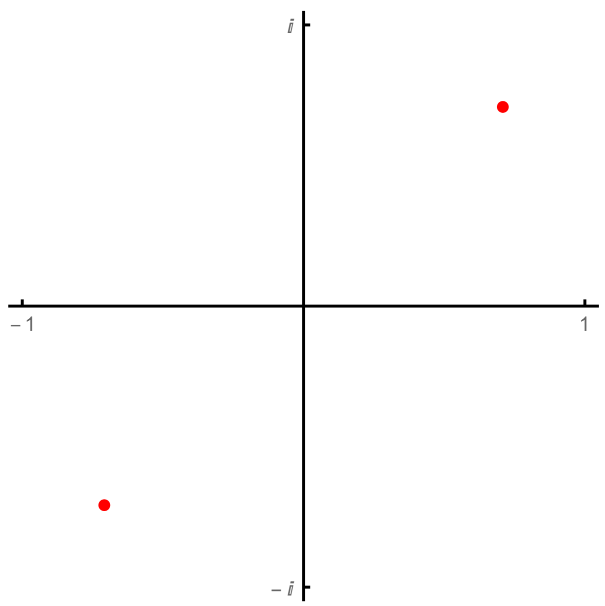
b) $\dfrac{se^{i\psi}}{te^{i\theta}} = \frac{s}{t}e^{i(\psi-\theta+2k\pi)}$; k so groß, dass $\psi - \theta + 2k\pi \geq 0$.

c) $z_k = 16^{1/8}\exp(ik\frac{2\pi}{8}) = \sqrt{2}\exp(ik\frac{\pi}{4})$, $k = 0, \ldots, 7 \Rightarrow z_k = \begin{cases} \sqrt{2} \\ 1+i \\ i\sqrt{2} \\ -1+i \\ -\sqrt{2} \\ -1-i \\ -i\sqrt{2} \\ 1-i \end{cases}$



d) $i^{42} = i^{4\times 10+2} = (i^4)^{10}\, i^2 = 1^{10} \times (-1) = -1$

e) $z^2 = i \Rightarrow r^2 \exp(2\phi i) = \exp(\frac{\pi}{2} i) \Rightarrow r = 1, \quad 2\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\phi_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$
$\phi_2 = \frac{1}{2}(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$



Aufgabe 2: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x \ln x \, dx \, .$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{3x+3}{x^2-8x+7} \, dx \, .$$

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} \, dx \, .$$

(3 Punkte)

Lösung: a)

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{1+e^2}{4}$$

b)

$$\int \frac{3x+3}{x^2-8x+7} \, dx = \int \frac{3x+3}{(x-1)(x-7)} \, dx =$$
$$= \int \frac{4}{(x-7)} \, dx - \int \frac{1}{x-1} \, dx = 4 \ln|x-7| - \ln|x-1|$$

c) $(1+\cos^2 x)' = -2 \cos x \sin x \Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos^2 x)'}{1+\cos^2 x} \, dx$$
$$= -\frac{1}{2} \left[\ln(1+\cos^2 x)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 2) = 0$$

Aufgabe 3: a) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung k-ter Ordnung (d.h. mit Restglied $k+1$-ter Ordnung) von f um dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung vierter Ordnung (d.h. mit Restglied fünfter Ordnung) von

$$f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

um den Punkt 0.

(3 Punkte)

c) Betrachten Sie eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) von g um dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ an.

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) von

$$g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

um den Punkt $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(4 Punkte)

Lösung: a) $f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) h^i + \mathrm{O}(|h|^{k+1})$

b)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = {} & 2\sin x_0 \cos x_0 + h\left(2\cos^2 x_0 - 2\sin^2 x_0\right) - \frac{8}{2} h^2 \sin x_0 \cos x_0 \\ & - \frac{8}{6} h^3 \left(\cos^2 x_0 - \sin^2 x_0\right) + \frac{32}{24} h^4 \sin x_0 \cos x_0 + \mathrm{O}\left(|h|^5\right) \end{aligned}$$

$$f(0 + h) = 2h - \frac{4}{3} h^3 + \mathrm{O}\left(|h|^5\right)$$

c)

$$\begin{aligned} g(x_0 + h) &= \sum_{|\alpha| \le 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha g(x_0) h^\alpha + \mathrm{O}(\|h\|^3) \qquad \alpha \text{ Multiindex} \\ &= g(x_0) + \mathrm{grad} g(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot \left(D^2 f(x_0) h\right) + \mathrm{O}(\|h\|^3) \end{aligned}$$

d) $g(1, 0) = \log(1) = 0$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g(1+h_1,h_2) = 0 + 2h_1 + \frac{1}{2}\left(-2h_1^2 + 2h_2^2\right) + \mathrm{O}(\|\mathbf{h}\|^3) = 2h_1 - h_1^2 + h_2^2 + \mathrm{O}(\|\mathbf{h}\|^3)$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-2; 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{4 - x^2}\,.$$

a) Finden Sie das Polynom P maximal zweiten Grades, dessen Funktionswert an den Knoten

$$x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$$

mit dem von f übereinstimmt, d.h. $P(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

unter Verwendung der Fassregel. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

unter Verwendung der Trapezregel auf den Teilintervallen $[-2, 0]$ und $[0, 2]$.

(3 Punkte)

d) Polynome bis zu welchem Grad kann man mit Hilfe der Trapezregel exakt integrieren?

(1 Punkt)

Lösung: a)

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{pmatrix} (-2)^2 & -2 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-2) \\ f(0) \\ f(2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = 2 \text{ und } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c = 2$ und $8a = -4$ und $4b = 0$
$(a, b, c) = (-\frac{1}{2}, 0, 2) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x(x-2)}{(-2)(-4)} = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x+2)(x-2)}{2 \cdot (-2)} = -\frac{x^2}{4} + 1$$

$P_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x + 2)x}{4 \cdot 2} = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$

$P(x) = \sum_{i=1}^{2} f(x_i)P_i(x) = 0 \cdot P_1(x) + 2 \cdot P_2(x) + 0 \cdot P_3(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$

(P_1 und P_3 müssen nicht ausgerechnet werden.)

b) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx \approx \frac{2 - (-2)}{6} \left(f(-2) + 4f(0) + f(2)\right) = \frac{4}{6} \cdot 8 = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$

c) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x}\, dx + \int_{0}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx \approx 2\frac{0 + 2}{2} + 2\frac{2 + 0}{2} = 4$

($\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2\pi \approx 6{,}28$)

c) Polynome ersten Grades.

Aufgabe 5: Betrachten Sie für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ die Matrix

$$A = \mathbb{1} - \frac{2vv^T}{\|v\|^2}\,.$$

a) Welche geometrische Operation wird durch die Matrix A beschrieben? Welche Rolle spielt dabei der Vektor v?

(2 Punkte)

b) Ist A symmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(2 Punkte)

c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1 Punkte)

d) Geben Sie die Definition an, wann ein Vektor $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenvektor und Eigenwert von A sind. (1 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von A ist.
Was ist der zugehörige Eigenwert? (2 Punkte)

f) Bestimmen Sie den zweiten Eigenwert der Matrix A und einen zugehörigen Eigenvektor. (2 Punkte)

Lösung: a) A beschreibt eine Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, die senkrecht auf v steht.

b) Ja. $A^T = \mathbb{1}^T - \frac{2(vv^T)^T}{\|v\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2(v^T)^T v^T}{\|v\|^2} = A$

c) Ja, reelle symmetrische Matrizen sind stets diagonalisierbar.

d) $Ax = \lambda x$

e) $Av = v - 2\frac{v^T v}{\|v\|^2}v = v - 2v = -v$, also ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1.

f) Für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ mit $w \perp v \Rightarrow w^T v = 0$, gilt $Aw = w - 2\frac{v^T w}{\|v\|^2}w = w$, also ist w ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.
Alternativ: A symmetrisch, also gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Also ist w mit $w \perp v$ Eigenvektor, weiter wie oben.
Alternativ: $A = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{v_1^2}{\|v\|^2} & -2\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} \\ -2\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} & 1 - 2\frac{v_2^2}{\|v\|^2} \end{pmatrix}$
Eigenwerte von A:

$$\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} A + \det A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (2 - 2\frac{v_1^2 + v_2^2}{\|v\|^2})\lambda + (1 - 2\frac{v_1^2}{\|v\|^2})(1 - 2\frac{v_2^2}{\|v\|^2}) - 4\frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^4} &= 0 \Leftrightarrow \\
\lambda^2 - 0\lambda + 1 - 2\frac{v_1^2 + v_2^2}{\|v\|^2} &= 0 \Leftrightarrow \\
\lambda^2 - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
\lambda &= \pm 1
\end{aligned}$$

Eigenwert $\lambda = -1$ ist bereits bekannt, der fehlende ist also $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
Aw &= w \Leftrightarrow \\
w - 2(v \cdot w)\frac{v}{\|v\|^2} &= w \Leftrightarrow \\
2(v \cdot w)\frac{v}{\|v\|^2} &= 0 \Leftrightarrow \\
v \cdot w &= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t)(10 - x(t)),$$
$$x(0) = 2.$$

a) Hat das Anfangswertproblem lokal (d.h. für kleine t) eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem (mit Hilfe von Separation der Variablen). (4 Punkte)

c) Berechnen Sie drei Schritte des Eulerschen Polygonzugverfahrens mit $\tau = \frac{1}{8}$. (2 Punkte)

d) Geben Sie Konsistenzordnung und Konvergenzordnung des Eulerschen Polygonzugverfahrens an. (2 Punkte)

Lösung: a) Die rechte Seite ist stetig differenzierbar und damit lokal Lipschitz-stetig. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert also eine eindeutige Lösung für $t \in (-\delta, \delta)$.

b) Separation der Variablen, Integration mit Partialbruchzerlegung

$$\frac{dx}{dt} = x(10-x) \Rightarrow \int_2^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi(10-\xi)} = \int_0^t ds \Rightarrow \int_2^{x(t)} \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - 10}\right) d\xi = \int_0^t ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}\left(\ln|\xi| - \ln|\xi - 10|\right)\Bigg|_2^{x(t)} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\xi}{\xi - 10}\right|\Bigg|_2^{x(t)} = t \Rightarrow \left|\frac{x(t)}{x(t) - 10}\right| = \frac{2}{8}e^{10t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\pm\frac{10}{4}e^{10t}}{1 \pm \frac{1}{4}e^{10t}}$$

Man erhält für die beiden potentiellen Lösungen $x(0) = 2$ oder $x(0) = -\frac{10}{3}$, d.h. nur die Variante mit positiven Vorzeichen erfüllt die Anfangswerte. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $\boxed{x(t) = \frac{10e^{10t}}{e^{10t} + 4}}$.

c) $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 2$, $f(t_0, x_0) = 2(10 - 2) = 16$,

$$x_1 = x_0 + \tau f(t_0, x_0) = 2 + \frac{1}{8} \times 16 = 4$$

$t_1 = \tau$, $f(t_1, x_1) = 4(10 - 4) = 24$,

$$x_2 = x_1 + \tau f(t_1, x_1) = 4 + \frac{1}{8} \times 24 = 7$$

$t_2 = 2\tau$, $f(t_2, x_2) = 7(10 - 7) = 21$,

$$x_3 = x_2 + \tau f(t_2, x_2) = 7 + \frac{1}{8} \times 21 = \frac{77}{8}$$

d) 1 bzw. 1

Aufgabe 7: a) Geben Sie den Transformationssatz der mehrdimensionalen Integralrechnung im $\mathbb{R}^2$ an.

(2 Punkte)

b) Geben Sie die konkrete Transformationsformel für die Integration in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}.$$

Skizzieren Sie die Menge D. (5+1 Punkte)

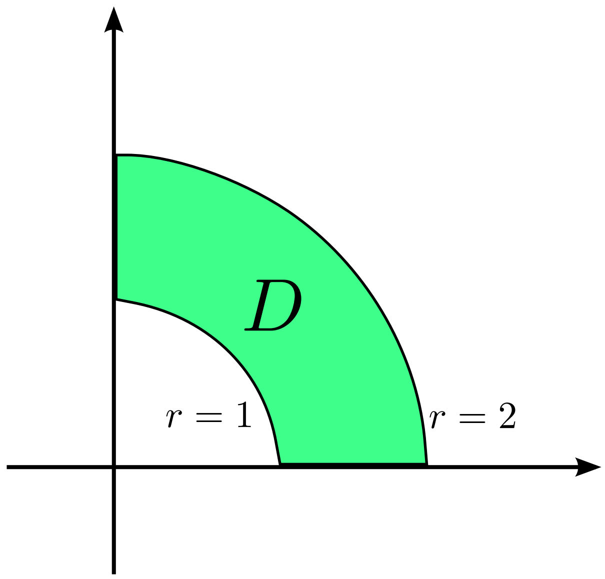
Lösung: a) Sei Ω ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ invertierbar und stetig differenzierbar, $Dg(\cdot)$ gleichmäßig stetig auf Ω, $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann gilt

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\, dy = \int_{\Omega} f((g(x))|\det Dg(x)|\, dx\,.$$

b) $g(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$,

$$\int_{g(U)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_U f(g(r, \phi))\, r dr\, d\phi$$

c)



$D = g(U)$ mit $U = \{(r, \phi) \,:\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\, 1 \leq r \leq 2\}$. Nach b) ergibt sich

$$M_D = \int_D dx\, dy = \int_U r dr\, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r dr\, d\phi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M_D} \int_D x dx\, dy = \frac{1}{M_D} \int_U r^2 \cos\phi\, dr\, d\phi \\ &= \frac{1}{M_D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi \int_1^2 r^2 dr = \frac{4}{3\pi} \times 1 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M_D} \int_D y dx\, dy = \frac{1}{M_D} \int_U r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi \\ &= \frac{1}{M_D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\, d\phi \int_1^2 r^2 dr = \frac{4}{3\pi} \times 1 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi} \end{aligned}$$

($y_S = x_S$ wegen Symmetrie bzgl. Vertauschen von x- und y-Achse)

Aufgabe 8: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

mittels QR-Zerlegung.

(10 Punkte)

Lösung: a)
Seien a_1, a_2, a_3 die Spalten der Matrix A.

$\alpha_1 = -\operatorname{sign}(a_{11})\|a_1\| = 3 \Rightarrow v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{2v_1v_1^T}{v_1^Tv_1} = \mathbb{1} + \frac{v_1v_1^T}{\alpha_1 v_{11}} = \mathbb{1} - \frac{1}{12}v_1v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Anwendung auf die Spalten der Matrix: $Q^{(1)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A^{(2)} = Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist bereits in Dreiecksform, also ist die QR-Zerlegung fertig: $Q = Q^{(1)}$, $R = A^{(2)}$.

$Ax = b \Rightarrow Rx = Q^Tb$, also

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.
(2 Punkte)

b) Warum sind die Fourier-Koeffizienten

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gleich Null?
Warum kann man hier von $-\pi$ bis π (statt von 0 bis 2π wie in der Vorlesung definiert) integrieren ohne dass sich das Ergebnis ändert? (2 Punkte)

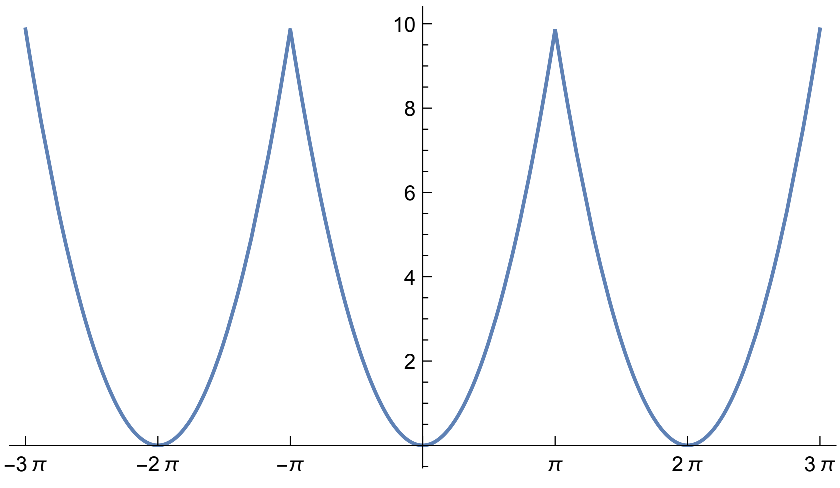
c) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

für $k = 0$ sowie (mittels partieller Integration)
für $k > 0$ und werten Sie diese für $k = 1, 2$ aus.
(4 Punkte)

d) Geben Sie mit diesen Koeffizienten eine Fourier-Approximation von f an.
(2 Punkte)

Lösung: a)



b) f ist gerade, $\sin(kx)$ ungerade, das Produkt also ungerade. Daher ist das Integral von $-\pi$ bis π gleich Null.

Da man über genau eine Periode der periodischen Funktion integriert, sind der konkrete Anfangs- und Endpunkt egal.
c) $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\dfrac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{2\pi^2}{3}$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \left(\frac{1}{k} \sin(kx) \right)' \, dx \\
&= \left[\frac{1}{k\pi} x^2 \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k\pi} x \sin(kx) \, dx \\
&= \left[\frac{1}{k\pi} x^2 \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k\pi} x \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \right)' \, dx \\
&= \left[\frac{1}{k\pi} x^2 \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{2}{k^2\pi} x \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k^2\pi} \cos(kx) \, dx \\
&= \left[\frac{1}{k\pi} x^2 \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{2}{k^2\pi} x \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{2}{k^3\pi} \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 + \frac{4\pi}{k^2\pi} \cos(k\pi) + 0 = \frac{4}{k^2} (-1)^k
\end{aligned}$$

Also $a_1 = -4$, $a_2 = 1$.

d)

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x)$$

Aufgabe 10: Betrachten Sie die durch

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}, \quad u^2+v^2 \leq 1$$

parametrisierte Fläche.

a) Um welche Fläche handelt es sich?

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die zugehörige Metrik.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche.

(3 Punkte)

d) Betrachten Sie zu gegebenem $\alpha \in \mathbb{R}$ die Kurve

$$\gamma_\alpha(t) = x(t,\alpha)\,.$$

Berechnen Sie, ob es sich für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ jeweils um eine geodätische Kurve handelt. (3 Punkte)

Lösung: a) Rotationsparaboloid um die z-Achse.

b)

$$Dx(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \Rightarrow G(u,v) = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

c) $\det G(u,v) = (1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2 = 1 + 4(u^2+v^2)$
Sei $U = \{(u,v)\ :\ u^2+v^2 \leq 1\}$, dann

$$\begin{aligned} A &= \int_U |\det G(u,v)|^{1/2}\, du\, dv = \int_U \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r dr\, d\phi = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) \end{aligned}$$

d) Bedingung:

$$\ddot{\gamma}(t) - (\ddot{\gamma}(t) \cdot n(\gamma(t)))\, n(\gamma(t)) - \left(\ddot{\gamma}(t) \cdot \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = 0$$

Ableitungen: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \alpha \\ t^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}$: $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$
und $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $x_u \times x_v = (-2u, -2v, 1) \Rightarrow n(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$ also

$n(\gamma(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4(t^2+\alpha^2)}} \begin{pmatrix} -2t \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$
Also:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+4(t^2+\alpha^2)} \begin{pmatrix} -2t \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4t}{1+4t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} = 0$$

Gilt für $\alpha = 0$, aber nicht für $\alpha = 1$.

Bedingung (Variante):

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot (\dot{\gamma}(t) \times \tilde{n}(\gamma(t))) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2t \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot (-2\alpha) = 0 \text{ für } \alpha = 0$$