Ingenieur-Mathematik I, II
Skript zur Vorlesung im Studiengang Geodäsie

Prof. Dr. Martin Rumpf, Dr. Martin Lenz

9. Februar 2015

Vorwort

Dieses Skript ist entstanden aus den Vorlesungen zur Ingenieurmathematik, die die Autoren an der Universität Bonn seit dem Wintersemester 2005 im Studiengang Geodäsie gelesen haben. Das Skript behandelt den Grundkanon der Mathematik in den Bereichen Analysis, lineare Algebra und einige zentrale numerische Methoden. Die Anordnung des Stoffes erfolgt dabei nicht in strikter Trennung der Gebiete sondern in einer verzahnten Form und in kleineren Kapiteln. Besonderes Gewicht liegt auf der Verknüpfung von Analysis und linearer Algebra. Sehr früh schon wird die Differentialrechnung in mehreren Dimensionen eingeführt um dann schrittweise immer weiter vertieft zu werden. Die Integralrechnung in mehreren Dimensionen wird in einer algorithmisch orientierten Form hergeleitet. Schließlich liegt ein besonderes Gewicht auf der Einführung der zentralen Konzepte der Differentialgeometrie. Dies geschieht gleichermaßen für parametrische und implizite Flächendarstellung.
An vielen Stellen greift das Skript auf Vorlesungsausarbeitungen von H.-P. Helfrich zurück, dem wir für seine Unterstützung in der Ausarbeitung des Vorlesungszyklus Ingenieurmathematik herzlich danken. Ferner danken wir Herrn O. Nemitz und Frau J. Dohmen, die das sorgfältige Setzen des Textes und die Erstellung der vielen Abbildungen für die erste Version dieses Skripts übernommen hatten.

Martin Rumpf, Martin Lenz

Inhaltsverzeichnis

0 Ein wenig Motivation vorab **9**
0.1 Messen mit Abweichungen . . . 9
0.2 Regression . . . 11
0.3 Entfernungen auf der Erde . . . 13
0.4 Lichtbeugung in der Atmosphäre . . . 13
0.5 Bewegung von Satelliten . . . 15
0.6 Das Gravitationsfeld der Erde . . . 16
0.7 Übungen . . . 16

Literatur zur Vorlesung **19**

1 Die Axiome der reellen Zahlen **21**
1.1 Eine kleine Geschichte der Zahlen . . . 21
1.2 Körperaxiome . . . 23
1.3 Anordnung von Zahlen . . . 29
1.4 Folgen und Grenzwerte . . . 32
1.5 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 39
1.6 Übungen . . . 42

2 Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit **49**
2.1 Reelle Funktionen . . . 49
2.2 Stetigkeit . . . 52
2.3 Differenzierbarkeit . . . 60
2.4 Potenzreihen . . . 71
2.5 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . 81
2.6 Übungen . . . 83

3 Vektorräume **93**
3.1 Vektorräume und Untervektorräume . . . 93
3.2 Skalarprodukte, Winkel- und Längenmessung . . . 100
3.3 Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . 108
3.4 Linearkombination und Basis . . . 109
3.5 Übungen . . . 118

4 Lineare Abbildungen und Matrizen **127**
4.1 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen und ihre Darstellung . . . 127
4.2 Verkettung von linearen Abbildungen und das Matrizenprodukt . . . 134
4.3 Lineare Gleichungssysteme . . . 143
4.4 Inverse Matrizen . . . 149
4.5 Die Gauß-Elimination als LR-Zerlegung . . . 152
4.6 Determinanten . . . 154

4.7 Übungen 167

5 Mehrdimensionale Differentialrechnung 177
5.1 Skalare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ 178
5.2 Kurven im $\mathbb{R}^m$ 183
5.3 Vektorwertige Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ 186
5.4 Die Geometrie von Funktionsgraphen 190
5.5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit 195
5.6 Nullstellen nichtlinearer Funktionen in höherer Dimension 197
5.7 Übungen 199

6 Integration von Funktionen in einer Dimension 205
6.1 Definition über Riemann-Summen 205
6.2 Zusammenhang Integration und Differentiation 210
6.3 Weitere Integrationsregeln 212
6.4 Übungen 219

7 Taylorentwicklung, Interpolation und numerische Integration 223
7.1 Taylorentwicklung 223
7.2 Differenzenquotienten 228
7.3 Interpolation von Funktionen 230
7.4 Exkurs: Interpolation von Ableitungen und mehrdimensionale Interpolation 241
7.5 Numerische Integration 249
7.6 Übungen 254

8 Komplexe Zahlen 261
8.1 Der Körper der komplexen Zahlen 261
8.2 Die komplexe Exponentialfunktion 264
8.3 Der Fundamentalsatz der Algebra 267
8.4 Vektorräume über $\mathbb{C}$ 268
8.5 Übungen 270

9 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen 273
9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren 273
9.2 Symmetrische Matrizen 276
9.3 Positiv definite, symmetrische Matrizen und das Skalarprodukt 281
9.4 Diagonalisierbare Matrizen 289
9.5 Singulärwertzerlegung 293
9.6 Übungen 297

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen 307
10.1 Typen von Differentialgleichungsproblemen 307
10.2 Anfangswertprobleme 310
10.3 Flußformulierung und numerische Approximation 324

10.4 Übungen 331

11 Integration in mehreren Dimensionen 337
11.1 Parameterabhängige Integrale 337
11.2 Riemannsummen zur Volumenbestimmung 342
11.3 Integration über Volumen im $\mathbb{R}^n$ 344
11.4 Der Transformationssatz 350
11.5 Exkurs: Integration unbeschränkter Funktionen 363
11.6 Integration über Kurven und Flächen 367
11.7 Der Satz von Gauß 381
11.8 Übungen 389

12 Orthogonale Abbildungen und Matrizen 401
12.1 Eigenschaften orthogonaler Abbildungen 401
12.2 Schiefsymmetrische Matrizen als Erzeugende von Drehungen 409
12.3 QR-Zerlegung zum Lösen linearer Gleichungssysteme 411
12.4 QR-Verfahren für Ausgleichsprobleme 417
12.5 Orthogonale Projektion und Orthonormalisierung 422
12.6 Fourier-Entwicklung und FFT 426
12.7 Übungen 434

13 Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$ 447
13.1 Zweite Ableitung und Hesse-Matrix 449
13.2 Lokales Verhalten in der Nähe von Extremstellen 451
13.3 Lineare Gleichungssystem und Minimierungsaufgaben 455
13.4 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$ 456
13.5 Der Satz über implizite Funktionen 463
13.6 Geometrie impliziter Flächen 472
13.7 Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen 474
13.8 Übungen 479

14 Ein kurzer Ausflug in die Differentialgeometrie 489
14.1 Krümmung von Kurven 489
14.2 Mannigfaltigkeiten, Karten und Atlanten 495
14.3 Geodätische Kurven auf Flächen 499
14.4 Krümmung auf Flächen 502
14.5 Übungen 507

Index 511

Symbolverzeichnis 521

Lösungen 523
0 Ein wenig Motivation vorab 523

1 Die Axiome der reellen Zahlen 524
2 Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit 538
3 Vektorräume 568
4 Lineare Abbildungen und Matrizen 593
5 Mehrdimensionale Differentialrechnung 617
6 Integration von Funktionen in einer Dimension 633
7 Taylorentwicklung, Interpolation und numerische Integration 641
8 Komplexe Zahlen 663
9 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen 671
10 Gewöhnliche Differentialgleichungen 701
11 Integration in mehreren Dimensionen 715
12 Orthogonale Abbildungen und Matrizen 744
13 Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$ 783
14 Ein kurzer Ausflug in die Differentialgeometrie 820

Zur besseren Übersicht werden in diesem Skript folgende Farbhinterlegungen verwendet:

Satz, Lemma, Folgerung	
Definition, Notation	
Schema	
Merkregel	
Übung	

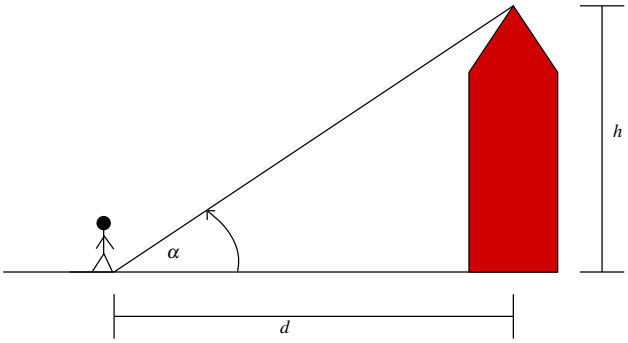
0 Ein wenig Motivation vorab

Wo wird Mathematik in der Geodäsie gebraucht?
Wir wollen einige Beispiele geben, die verschiedene Aspekte der Mathematik ansprechen.

Achtung: Dies soll Ihnen lediglich eine erste Idee vermitteln. Sie sollen die Themen keinesfalls bereits jetzt vollständig durchdringen und alle Argumente komplett verstehen.

0.1 Messen mit Abweichungen

Aufgabe sei es beispielsweise, die Höhe eines Kirchturms zu bestimmen.



Sind der Winkel α und die Distanz d bekannt, so lässt sich bekanntermaßen die Höhe durch den Tangens berechnen:

$$h = d \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)$$

Hier wird vorausgesetzt, dass der Winkel in Grad angegeben wird. Das Argument der Tangens-Funktion wird im Bogenmaß angegeben, die zum Winkel α gehörende Bogenlänge ist $\frac{\pi\alpha}{180^\circ}$.

Beispiel 0.1 *Die Distanz betrage $d = 44.31\,\mathrm{m}$, der Winkel sei $\alpha = 37.25^\circ$, dann ergibt sich eine Höhe von $h = 33.6941\,\mathrm{m}$.*

Nun ist aber jede Messung mit Abweichungen behaftet. Es seien zum Beispiel für den Winkel und die Distanz folgende Schwankungen bekannt:

$$\alpha = 37.25^\circ \pm 0.01^\circ, \quad d = 44.31\,\mathrm{m} \pm 1\,\mathrm{mm}$$

Verwendet man die Werte mit den größtmöglichen Abweichungen, ergeben sich folgende Höhen:

$\alpha \backslash d$	$-1\,\mathrm{mm}$	$+1\,\mathrm{mm}$
-0.01°	$33.6811\,\mathrm{m}$	$33.6827\,\mathrm{m}$
$+0.01^\circ$	$33.7056\,\mathrm{m}$	$33.7071\,\mathrm{m}$

Es ergeben sich also Schwankungen im Intervall $[33.6811, 33.7071]$, d.h. die Abweichung der berechneten Höhe liegt bei Rundung auf 7 Stellen nach dem Komma im Intervall $[-0.0129639, 0.0129677]$.

Eine direkte Auswertung der Abweichungen so wie in obiger Tabelle ist allerdings unpraktikabel, da

- meist viele Messgrößen mit Abweichungen behaftet sind, und dann alle Möglichkeiten durchgespielt werden müssten, und
- uns in der Geodäsie meist die mittlere und nicht die maximale Abweichung interessiert.

Generelle Frage: Gegeben sei eine Abbildung $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ (hier $x = d, y = \alpha$, $f = h, h(d,\alpha) = d\tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)$). Wie wirken sich Störungen in x und y auf $f(x,y)$ aus?

Zur Beantwortung dieser Frage bekommt man Hilfe aus der *Differentialrechnung*:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} &\approx \frac{d}{dx}f(x,y) \\ \Rightarrow |f(x+\Delta x,y)-f(x,y)| &\approx \left|\frac{d}{dx}f(x,y)\right||\Delta x| \end{aligned}$$

Der Term auf der linken Seite gibt hier die Abweichung von f bei einer Störung Δx in der Variablen x an. Wir betrachten nun Störungen in beiden Variablen:

$$\begin{aligned} & f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \\ = \; & f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y) \\ \approx \; & \frac{d}{dx}f(x,y+\Delta y)\Delta x+\frac{d}{dy}f(x,y)\Delta y \\ \approx \; & \frac{d}{dx}f(x,y)\Delta x+\frac{d}{dy}f(x,y)\Delta y+\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\Delta x\right)\Delta y \end{aligned}$$

Hierbei wird der letzte Summand für kleine Störungen $\Delta x, \Delta y$ sehr klein. Die Abweichung lässt sich also folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} & |f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)| \\ \leq \; & \left|\frac{d}{dx}f(x,y)\Delta x+\frac{d}{dy}f(x,y)\Delta y\right| + \text{Terme höherer Ordnung} \\ \leq \; & \left|\frac{d}{dx}f(x,y)\right||\Delta x|+\left|\frac{d}{dy}f(x,y)\right||\Delta y| + \text{Terme höherer Ordnung} \end{aligned}$$

In unserem Beispiel sind die Funktion und ihre Ableitungen dann gegeben durch:

$$h : (d,\alpha) \mapsto h(d,\alpha) = d\tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right),$$
$$\frac{dh}{dd}(d,\alpha) = \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right), \quad \frac{dh}{d\alpha}(d,\alpha) = \frac{\pi d}{180\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass für $\tan(s) = \frac{\sin(s)}{\cos(s)}$ mit der Quotientenregel der Differentialrechung für Ableitung $\tan'(s) = \frac{\cos^2(s)+\sin^2(s)}{\cos^2(s)} = \frac{1}{\cos^2(s)}$ gilt. Ferner wurde die Kettenregel angewandt. Setzen wir dann eine Distanz von $d = 44.31\,\mathrm{m}$ und einen Winkel von $\alpha = 37.25°$ voraus, so können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} |\text{Abweichung}| &\leq \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)|\Delta d| + \frac{\pi d}{180\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)}|\Delta\alpha| + \text{Terme höherer Ordnung} \\ &= 0.7604\,|\Delta d| + 1.2205\,|\Delta\alpha| + \text{Terme höherer Ordnung} \end{aligned}$$

Wenn wir dort nun die oben angenommenen Störungen von α und d einsetzen, so erhalten wir als Abschätzung für den Betrag der Abweichung den Wert 0.0130, eine sehr gute Näherung für die Größe des oben berechneten Abweichungsintervalls $[-0.0120, 0.0140]$. Insbesondere erkennen wir, dass eine höhere Sensitivität gegenüber Störungen in α vorliegt.

Falls die Störungen in d und α unabhängig und δ_d, bzw. δ_α die mittleren Störungen sind, so erhält man für die *mittlere Störung* in der Höhe δ_h

$$\delta_h = \sqrt{\left(\frac{dh}{d\alpha}\right)^2 \delta_\alpha^2 + \left(\frac{dh}{dd}\right)^2 \delta_d^2}\,.$$

Die Sensitivität der Funktion h wird auch in Aufgabe 0.3 betrachtet, eine Modifikation der Funktion h in Aufgabe 0.1.

0.2 Regression

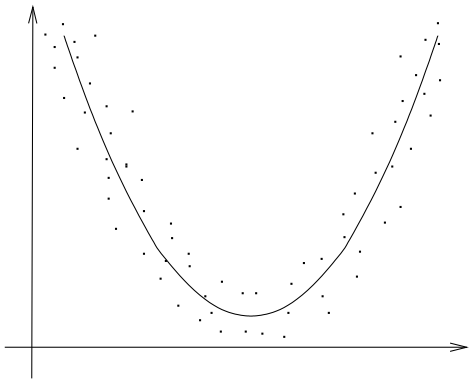
Gegeben ist eine Reihe von Messdaten

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n).$$

Ziel ist es, eine *einfache* Funktion f zu finden, so dass

$$Y_i \approx f(X_i)$$

für alle $i = 1, \ldots n$.



Beispiel 0.2 *Ist zum Beispiel eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Faktoren a, b und c gesucht, so dass $Y_i = f(X_i)$, so erhält man das folgende System von linearen Gleichungen:*

$$(*) \qquad \left.\begin{array}{l} Y_1 = aX_1^2 + bX_1 + c \\ Y_2 = aX_2^2 + bX_2 + c \\ \quad\vdots \\ Y_n = aX_n^2 + bX_n + c \end{array}\right\} \quad \textit{n lineare Gleichungen in den Variablen } a, b, c$$

Dazu stellen sich die folgenden Fragen:

- Gibt es Lösungen?

  In unserem Beispiel gibt es eine Lösung, falls $n = 3$ gilt und die X_i paarweise verschieden sind (drei Gleichungen mit drei Unbekannten). Im Allgemeinen gibt es typischerweise für $n > 3$ keine Lösung und für $n < 3$ unendlich viele Lösungen. Ein Beispiel für eine Situation mit eindeutiger Lösung findet sich in Übung 0.4.

- Falls es keine Lösung gibt: Wie findet man gute Approximationen, so dass ein mittlerer Fehler klein ist?

  Hilfe aus der Linearen Algebra: $(*) \quad \Leftrightarrow \quad Az = y$, wobei:

$$A = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 & 1 \\ X_2^2 & X_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^2 & X_n & 1 \end{pmatrix} \qquad n \times 3 \text{ Matrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{Vektor mit 3 Komponenten}$$

$$y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad \text{Vektor mit } n \text{ Komponenten}$$

Falls $Az = y$ keine Lösung hat, so suchen wir eine approximative Lösung, d.h. einen Vektor z, für den der Fehler

$$\|Az - y\|$$

minimal wird. Dabei bezeichnet $\|.\|$ die euklidische Norm (die Länge des Vektors) im $\mathbb{R}^n$.

Wir werden sehen, dass dies äquivalent ist dazu, das 3×3 Gleichungssystem

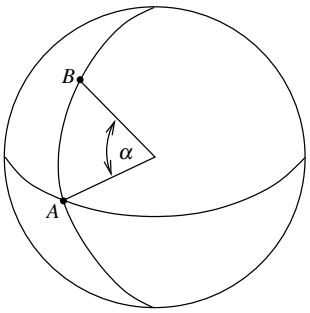
$$A^T Az = A^T y$$

zu lösen, wobei

$$A^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

die zu A transponierte Matrix bezeichnet.

0.3 Entfernungen auf der Erde



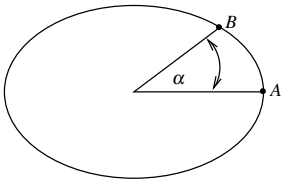
Sei R der Radius der „runden“ Erde, dann gilt für die Entfernung d von A nach B:

$$d_{AB} = \underbrace{\frac{\pi\alpha}{180}}_{\text{Bogenlänge}} R$$

Beispiel 0.3 *Sei zum Beispiel* $R = 6378\,\text{km}$, $\alpha = 50°43'52'' = 50.7311°$ *(das entspricht gerade dem Breitengrad von Bonn), dann ergibt sich für die Entfernung von Bonn zum Äquator* $5647.2402\,\text{km}$.

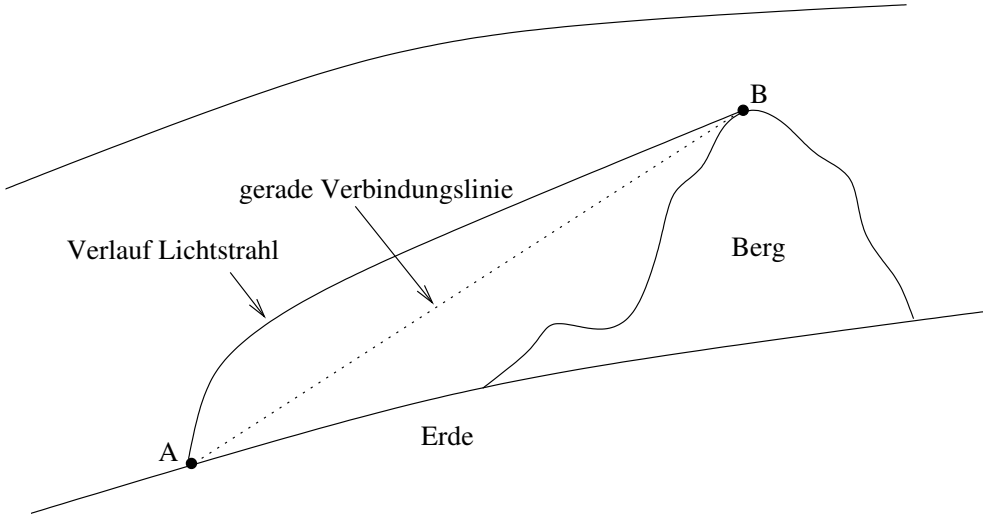
Eine ähnliche Rechnung finden Sie in Aufgabe 0.2.

Nun ist die Erde aber nicht rund, sondern abgeflacht. Gesucht ist nun die kürzeste Verbindung von Bonn zum Äquator auf der Erdoberfläche.
Wie dieses Problem gelöst wird, werden wir in der Differentialgeometrie besprechen.



0.4 Lichtbeugung in der Atmosphäre

Um auf der Erde Entfernungen zu messen, werden häufig Laserstrahlen eingesetzt. Will man nun Entfernungen über unterschiedliche Höhen messen, muss dabei beachtet werden, dass der Verlauf des Lichtstrahles nicht mit der kürzesten Verbindungslinie übereinstimmt, welche wir gerne messen würden, sondern aufgrund von Lichtbeugung einen längeren Weg zurücklegt.



Warum wird das Licht nun gebeugt?
Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $c = 299\,792\,458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in Gasen ist die Lichtgeschwindigkeit geringer. Mit wachsender Dichte nimmt die Lichtgeschwindigkeit ab. Eine gute Annäherung für die tatsächliche Geschwindigkeit v ist:

$$v = \frac{c}{n}$$

n bezeichnet den Refraktions- oder Brechungsindex, der von der Dichte des durchlaufenen Mediums abhängt. Ein Modell für die Atmosphäre ist

$$n = 1 + \alpha\rho,$$

wobei ρ die Dichte der Atmosphäre und $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Am Boden ist der Brechungsindex $n \approx 1.0003$.
Für Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$v = \frac{\triangle s}{\triangle t} \qquad \Rightarrow \qquad \triangle t = \frac{1}{v}\triangle s.$$

Dabei bezeichnet $\triangle s$ die zurückgelegte Strecke und $\triangle t$ die dazu benötigte Zeit.
Mit Hilfe der *Integralrechnung* werden wir einsehen, dass für die Laufzeit des Lichts auf einer Bahnkurve S von B nach A durch die Atmosphäre gilt:

$$\triangle t = t_A - t_B = \int_S \frac{1}{v\,(x,y)} dl \qquad \text{(Kurvenintegral)}$$

Hierbei „summieren“ wir $\frac{1}{v}$ längs der Kurve, wobei $v(x,y) = \frac{c}{1+\alpha\rho(x,y)}$, $\rho\,(x,y)$ die Dichte der Atmosphäre im Punkt (x,y), t_B die Startzeit in B und t_A die Ankunftszeit in A.

Das *Fermat'sche Prinzip* sagt nun, dass das Licht die Bahnkurve S so wählt, dass die Laufzeit $(t_A - t_B)$ minimal ist.
Typischerweise sind Lichtstrahlen wie oben dargestellt gebeugt, da die Dichte der Atmosphäre mit der Höhe abnimmt und es damit für eine kurze Laufzeit des Lichts besser ist, größere Entfernungen in höheren Luftschichten zurückzulegen.

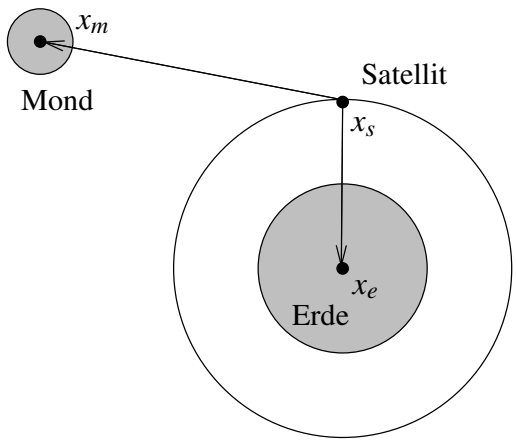
Bei der Laser-Entfernungsmessung wird die Laufzeit eines Lichtpulses gemessen. Die von der Dichte abhängige Geschwindigkeit sorgt nun für eine Abweichung in der daraus berechneten Distanz.

0.5 Bewegung von Satelliten

Wir betrachten einen Erdsatelliten, dessen Bahn im Wesentlichen von den Gravitationskräften der Erde und des Mondes bestimmt wird. Nehmen wir für alle beteiligten Körper Punktmassen als Modell an, dann gilt für die Gravitationskräfte, die auf den Satelliten wirken:

$$\begin{aligned} F_{e\to s} &= g\frac{M_e M_s}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) \\ F_{m\to s} &= g\frac{M_m M_s}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet M_e die Erdmasse, M_s die Masse des Satelliten, M_m die Mondmasse, x_e, x_s und x_m deren Schwerpunkte sowie $g = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}$ die Gravitationskonstante.



Für die Flugbahn des Satelliten gilt in diesem System nun das Gesetz träger Massen (zweites Newtonsches Axiom).

$$\begin{array}{ccccc} \text{Kraft} & = & \text{Masse} & \times & \text{Beschleunigung} \\ \| & & \| & & \| \\ F_{e\to s} + F_{m\to s} & & M_s & & \ddot{x}_s = \frac{d^2}{dt^2}x_s \end{array}$$

Daraus ergibt sich die folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Bahn des Satelliten:

$$\ddot{x}_s = g\left(\frac{M_e}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) + \frac{M_m}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s)\right)$$

0.6 Das Gravitationsfeld der Erde

Die Kenntnis des Gravitationsfelds der Erde ist für viele Aufgaben in der Geodäsie unerlässlich. Selbst Höhenbestimmungen sind streng genommen nur bei Kenntnis des Schwerefelds der Erde möglich. Rein geometrisch definierte Höhen (wie z. B. der Abstand vom gedachten Erdellipsoid) haben den Nachteil, dass dann auf Flächen gleicher Höhe gravitative Bewegungen möglich sind.
Wenn wir Gravitationskräfte nahe der Erde messen, so ist sicherlich die Annahme der Erde als Massenpunkt nicht zulässig. Statt dessen werten wir die Kraft über ein Volumenintegral über die Erde aus. Zunächst gilt:

$$M_e = \int_{\Omega_e} \rho(x)\, dx$$

Ω_e ist dabei das Gebiet der „Erdkugel“ und für die Kraft auf eine Punktmasse m_s in einem Punkt x_s gilt:

$$F_{e\to s} = g\, m_s \int_{\Omega_e} \frac{\rho(x)}{\|x - x_s\|^3}(x - x_s)\; dx$$

In der Integralrechung werden wir auch solche Integrale kennen lernen.

0.7 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 0.1 Betrachten Sie das Beispiel aus der Vorlesung zur Bestimmung der Höhe eines Kirchturms. Gehen Sie jedoch von der realistischeren Annahme aus, dass der Winkel zur Horizontalen in Augenhöhe des Betrachters gemessen wird. Skizzieren Sie die Situation.
Geben Sie eine Funktion $h : (d, \alpha, l) \mapsto h(d, \alpha, l)$ an, die die Höhe des Turmes unter zusätzlicher Berücksichtigung der Augenhöhe l des Betrachters berechnet. Berechnen Sie das Intervall, in dem die Turmhöhe liegt, wenn $l = 1.70m \pm 1mm$ gemessen wurde.

Anwesenheitsaufgabe 0.2 Welcher Entfernung entspricht eine Bogenminute am Äquator (wenn Sie von einer kugelförmigen Erde ausgehen)?
Bemerkung: Dies ist die historische Definition der Seemeile.

Aufgabe 0.3

a) Funktioniert die Formel für die Höhenfunktion $h(d,\alpha) = d\tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)$ aus der Vorlesung auch dann, wenn man direkt am Turm steht?

b) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in d und α, wenn man sehr nah am Turm steht?

c) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in α, wenn man sehr weit entfernt steht?

Aufgabe 0.4 Bestimmen Sie das quadratische Polynom, auf dessen Graph die Punkte $(-1,0)$, $(1,2)$ und $(-2,-7)$ liegen.

Literatur zur Vorlesung

Ein- und mehrdimensionale Analysis
(Kapitel 1, 2, 5, 6, 7, 11, 13, 14)

(i) O. Forster: Analysis I + II, Vieweg Verlag, 2001

(ii) M. Barner, F. Flohr: Analysis I + II, Walter de Gruyter Verlag, 2000

(iii) W. Walter: Analysis I + II, Springer Verlag, 2001

Lineare Algebra
(Kapitel 3, 4, 8, 9, 12)

(iv) G. Fischer: Lineare Algebra, Vieweg Verlag, 2000

(v) G. E. Farin, D. Hansford: Lineare Algebra: Ein geometrischer Zugang, Springer Verlag, 2004

(vi) M. Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer Verlag, 1997

(vii) A. Beutelspacher: Lineare Algebra, Vieweg Verlag, 2001

(viii) G. Strang, K. Borre: Linear Algebra, Geodesy and GPS, Wellesley-Cambridge Press, 1997

(ix) G. Strang: Lineare Algebra, Springer Verlag, 2003

Analysis und lineare Algebra

(x) K. Eriksson, D. Estep, C. Johnson: Applied Mathematics: Body and Soul, Volumes 1 – 3, Springer Verlag, 2007

(xi) L. Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1 – 3, Vieweg Verlag, 2007/08

(xii) K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, 1999

(xiii) P. Furlan: Das gelbe Rechenbuch 1 – 3, Verlag M. Furlan, 1995

Numerische Methematik
(Teile der Kapitel 2, 4, 5, 7, 12)

(xiv) P. Deuflhard, A. Hohmann: Numerische Mathematik I, Walter de Gruyter Verlag, 2002

(xv) R. Schaback, H. Werner: Numerische Mathematik, Springer Verlag, 1992

(xvi) A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri: Numerische Mathematik 1, Springer Verlag, 2002

Gewöhnliche Differentialgleichungen
(Kapitel 10)

(xvii) W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer Verlag, 2000

(xviii) P. Deuflhard, F. Bornemann: Numerische Mathematik II:
Gewöhnliche Differentialgleichungen, Walter de Gruyter Verlag, 2008

1 Die Axiome der reellen Zahlen

1.1 Eine kleine Geschichte der Zahlen

Unser moderner Zahlbegriff hat sich über lange Zeit entwickelt. Diese Entwicklung wurde vom Erweiterungsbedarf getrieben. Eine wirkliche Axiomatik wurde erst im 19. Jahrhundert aufgebaut. Im Folgenden geben wir einen Abriss dieser Entwicklung:

- Zählen begann mit endlichen Zahlensystemen. Zu den Zahlen $1,2,3$ gibt es eine genetisch vorgeprägte Wahrnehmung. Die Zahlen 1 bis 10 boten sich aufgrund des Fingerabzählens an.

- Es bestand Erweiterungsbedarf: „Zu jeder Zahl gibt es eine nächst größere Zahl“. Damit bildete sich der Begriff der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

- Es stellte sich als praktisch heraus, eine Zahl für „Nichts“ zu haben, die 0. (Zunächst wurde die Null insbesondere als Lückenzeichen im Stellenwertsystem benötigt, dann auch als eigenständiges Zahlzeichen.) Die Null wurde wahrscheinlich vor ca. 5000 Jahren in Mesopotamien eingeführt. Die so erweiterte Menge von natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_0$.

- Addieren ergab sich natürlich aus dem „Weiterzählen“.

- Eine Umkehrung der Addition, die Subtraktion, wurde notwendig (Guthaben bzw. Schulden).

- Damit waren auch negative Zahlen notwendig zum Abschluss der Operationen (zum Beispiel $3-5=-2$). So entstanden die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

- Wiederholte Addition $(3+3+3+3)$ wurde in der Multiplikation zusammengezogen $(4\cdot 3)$.

- Auch hier stellte sich dann die Frage nach dem Abschluss $(4\cdot x=3)$ und gleichzeitig ergab sich der Begriff von Äquivalenz (x beschrieben durch $4\cdot x=3$ und durch $8\cdot x=6$, d.h. $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$). So bildeten sich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

- Im Bereich der rationalen Zahlen ist z. B. die Gleichung

  $$x^2=3$$

  nicht lösbar.

  Beweis: Wir führen einen sogenannten Widerspruchsbeweis. Dabei nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Können wir daraus einen Widerspruch herleiten, muss die ursprüngliche Behauptung wahr gewesen sein.

Wir nehmen also an, es gebe $x \in \mathbb{Q}$, so dass $x^2 = 3$. Dann besitzt x die Darstellung

$$x = \frac{p}{q},$$

wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind. Wir nehmen ferner an, dass p und q teilerfremd sind. Dies kann durch Kürzen erreicht werden.

$$\begin{aligned}
& x^2 = 3 \\
\Rightarrow\ & \frac{p^2}{q^2} = 3 \\
\Rightarrow\ & p^2 = 3q^2 \\
\Rightarrow\ & p^2 \text{ ist durch 3 teilbar (und 3 ist eine Primzahl)} \\
\Rightarrow\ & p \text{ ist durch 3 teilbar, d.h. } p = 3r, r \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow\ & 9r^2 = 3q^2 \\
\Rightarrow\ & 3r^2 = q^2 \\
\Rightarrow\ & q^2 \text{ ist durch 3 teilbar} \\
\Rightarrow\ & q \text{ ist durch 3 teilbar}
\end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass p und q teilerfremd sind. Also gibt es keine Darstellung $x = \frac{p}{q}$, falls für x die Gleichung $x^2 = 3$ gilt. D.h. x kann keine rationale Zahl sein.

□

Wir können das x, für das $x^2 = 3$ gilt, aber beliebig genau durch Schachtelung rationaler Zahlen „approximativ berechnen“:

$$\begin{array}{rcccl}
1^2 & < & 3 & < & 2^2 \\
(1.7)^2 & < & 3 & < & (1.8)^2 \\
(1.73)^2 & < & 3 & < & (1.74)^2 \\
\vdots & < & \vdots & < & \vdots \\
(1.7320508)^2 & < & 3 & < & (1.7320509)^2
\end{array}$$

Diese Art der Vervollständigung führt auf den Begriff der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

- In den reellen Zahlen gibt es keine Lösung für Gleichungen der Art

$$x^2 = -4.$$

Auch hier wird uns später eine Erweiterung helfen und wir werden den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definieren.

Fassen wir die soweit kennengelernten Zahlenmengen kurz zusammen:

Notation 1.1 (Zahlenmengen) *Wir haben bisher folgende Zahlenmengen kennengelernt:*

$\mathbb{N}$:	*natürlichen Zahlen*
$\mathbb{N}_0$:	*natürliche Zahlen einschließlich der* 0
$\mathbb{Z}$:	*ganze Zahlen*
$\mathbb{Q}$:	*rationale Zahlen*
$\mathbb{R}$:	*reelle Zahlen*
$\mathbb{C}$:	*komplexe Zahlen (Diese werden wir später einführen.)*

1.2 Körperaxiome

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die wir bald mathematisch exakt einführen werden, bilden ebenso wie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die später zu diskutierenden komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen sogenannten *Körper*. Ein Körper $\mathbb{K}$ ist zunächst durch bestimmte Eigenschaften (Axiome[1]) charakterisiert. Betrachten wir die folgende Menge von Axiomen:

Für Paare (x,y) mit x und $y \in \mathbb{K}$ ist eine *Addition*

$$(x,y) \mapsto x+y$$

und eine *Multiplikation*

$$(x,y) \mapsto xy$$

erklärt, wobei stets $x+y$ und $xy \in \mathbb{K}$. Die Addition genügt folgenden *Axiomen*, die für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gelten sollen:

- *Assoziativgesetz:*
$$x+(y+z) = (x+y)+z \tag{A1}$$
- *Kommutativgesetz:*
$$x+y = y+x \tag{A2}$$
- *Existenz der Null:* Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit
$$x+0 = x \tag{A3}$$
- *Existenz des Negativen:* Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{K}$ existiert eine Zahl $-x \in \mathbb{K}$ mit
$$x+(-x) = 0. \tag{A4}$$

[1] Axiome sind unbewiesene Grundeigenschaften, aus denen alle übrigen Behauptungen hergeleitet werden. Die klassische Forderung, ein Axiom möge unmittelbar einsichtig und *daher* nicht beweisbedürftig sein, stellt man heute in der Regel nicht mehr und verlangt lediglich, ein System von Axiomen möge widerspruchsfrei sein.

Für die Multiplikation (zur Verdeutlichung schreiben wir statt xy ggf. auch $x \cdot y$) gelten die Axiome, die wiederum für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gelten sollen:

- *Assoziativgesetz:*
$$x(yz) = (xy)z \tag{M1}$$
- *Kommutativgesetz:*
$$xy = yx \tag{M2}$$
- *Existenz der Eins:* Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit
$$x \cdot 1 = x \tag{M3}$$
- *Existenz des Inversen:* Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ existiert eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{K}$ mit
$$x \cdot x^{-1} = 1. \tag{M4}$$

Beide Rechenarten sind verknüpft durch das

- *Distributivgesetz:*
$$(x+y)z = xz + yz. \tag{D1}$$

Dabei vereinbaren wir, dass die Multiplikation eine höhere Priorität als die Addition habe; wir schreiben also beispielsweise

$$xz + yz = (xz) + (yz).$$

Basierend auf diesem System von Axiomen können wir nun eine Definition für einen allgemeinen Körper geben:

Definition 1.2 *Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$, die den Axiomen (A1) – (A4), (M1) – (M4) und (D1) genügt, heißt* Körper.

Wie bereits oben erwähnt, sind sowohl die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als auch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die später noch zu definierenden komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein Körper.

Folgerungen Seien a und b Elemente eines beliebigen Körpers $\mathbb{K}$.

(i) Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b + (-a)$. Man schreibt auch $x = b - a$.

(ii) Für $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = ba^{-1} =: \frac{b}{a}$.

(iii) Es gilt stets $0a = 0$.

(iv) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis: zu (i)
Zunächst zeigen wir, dass $x = b - a$ die Gleichung löst:

$$\begin{aligned} a + (b - a) &\overset{\text{Definition}}{=} a + (b + (-a)) \\ &\overset{(A2)}{=} a + ((-a) + b) \\ &\overset{(A1)}{=} (a + (-a)) + b \\ &\overset{(A4)}{=} 0 + b \overset{(A3)}{=} b \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass es nur *eine* Zahl x gibt, die $a + x = b$ erfüllt. Hierzu sei x' eine weitere Zahl mit $a + x' = b$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a + x' = a + x \\ &\Rightarrow \quad (-a) + (a + x') = (-a) + (a + x) \\ &\overset{(A1)}{\Rightarrow} \quad ((-a) + a) + x' = ((-a) + a) + x \\ &\overset{(A2)}{\Rightarrow} \quad (a + (-a)) + x' = (a + (-a)) + x \\ &\overset{(A4)}{\Rightarrow} \quad 0 + x' = 0 + x \\ &\overset{(A3)}{\Rightarrow} \quad x' = x \end{aligned}$$

D.h. die Zahl x ist durch $a + x = b$ eindeutig bestimmt.

(ii) beweist man analog.

zu (iii)

$$0a \overset{(A3)}{=} (0 + 0)a \overset{(D1)}{=} 0a + 0a$$

Unter Verwendung von Folgerung (i) erhalten wir daraus

$$0a = 0a - 0a \overset{(A4)}{=} 0.$$

zu (iv)
Falls $a = 0$, so sind wir fertig. Wir können also $a \neq 0$ annehmen und müssen dann $b = 0$ zeigen. Aus $ab = 0$ und $a \neq 0$ erhalten wir mit Hilfe von Folgerung (ii) und dem gerade bewiesenen Hilfsresultat

$$b = 0a^{-1} = 0.$$

□

<u>Ein weiteres Beispiel: Binomische Formel</u>

$$(a + b)^2 = \left(a^2 + 2(ab)\right) + b^2 \quad \text{mit den Notationen:} \quad 2 := 1 + 1,\ a^2 := aa$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a+b) &\overset{(D1)}{=} a(a+b)+b(a+b)\\
&\overset{(M2)}{=} (a+b)a+(a+b)b\\
&\overset{(D1)}{=} (aa+ba)+(ab+bb)\\
&\overset{(A1,M2)}{=} ((aa+ab)+ab)+bb\\
&\overset{(A1)}{=} (aa+(ab+ab))+bb\\
&\overset{(M3)}{=} (aa+((ab)\cdot 1+(ab)\cdot 1))+bb\\
&\overset{(M2)}{=} (aa+(1\cdot(ab)+1\cdot(ab)))+bb\\
&\overset{(D1)}{=} (aa+(1+1)(ab))+bb\\
&\overset{\text{Notation}}{=} \left(a^2+2(ab)\right)+b^2
\end{aligned}
$$

□

Durch mehrfaches Anwenden der Assoziativgesetze (A1),(M1) sehen wir, dass die Klammern bei Summen und Produkten aus mehreren Summanden bzw. Faktoren beliebig gesetzt werden können:

$$
\begin{aligned}
a_1+((a_2+a_3)+a_4) &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)\\
a_1\,(a_2(a_3a_4)) &= (a_1(a_2a_3))\,a_4
\end{aligned}
$$

Ferner können wir Summanden und Faktoren beliebig vertauschen ((A2),(M2)). Wir schreiben ab nun ohne Klammern:

$$
\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3+a_4\\
a_1a_2a_3a_4
\end{aligned}
$$

Weitere Folgerungen aus der Körperaxiomen finden Sie in Aufgabe 1.7.

Summen und Potenzen. Wir schreiben

$$a^n = a\cdot a\cdots a \text{ (n Faktoren).}$$

Der Ausdruck a^n wird *Potenz* genannt, die Zahl $a\in\mathbb{R}$ heißt *Basis* und $n\in\mathbb{N}^+$ der *Exponent*. Folgende Rechenregeln gelten:

$$a^na^m = a^{n+m},\ (a^n)^m = a^{mn},\ (ab)^n = a^nb^n.$$

Diese Regeln gelten auch für negative Exponenten, wenn wir definieren

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n = \frac{1}{a^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Für $m \geq n$ schreiben wir

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m.$$

Folgende Rechenregeln können mit Hilfe der Körperaxiome hergeleitet werden:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} b_k = \sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k),$$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{l} a_k = \sum_{k=n}^{l} a_k,$$

$$\left(\sum_{k=n}^{m} a_k\right) b = \sum_{k=n}^{m} a_k b,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{kl},$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{l=1}^{n} b_l = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_k b_l.$$

Gaußsche Flächenformel Als Beispiel für das Rechnen mit Summen betrachten wir die Berechnung der Fläche eines Polygons. Die Fläche in Abbildung 1 können wir uns

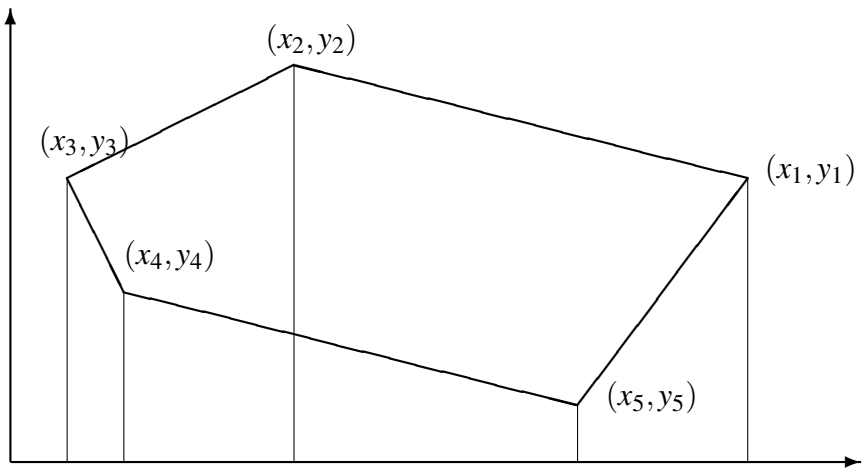


Abbildung 1: Flächeninhalt eines Polygons

aus fünf Trapezen zusammengesetzt denken, wobei die Flächeninhalte von zwei Trapezen positiv und von drei negativ gerechnet werden. Wir erhalten für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2) + \tfrac{1}{2}(x_2-x_3)(y_2+y_3) + \\ &\quad \tfrac{1}{2}(x_3-x_4)(y_3+y_4) + \tfrac{1}{2}(x_4-x_5)(y_4+y_5) + \\ &\quad \tfrac{1}{2}(x_5-x_1)(y_5+y_1). \end{aligned}$$

Man mache sich klar, dass das Vorzeichen von $x_k - x_{k+1}$ entscheidet, ob der Flächeninhalt positiv oder negativ gerechnet wird. Für einen Polygonzug mit n Punkten

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$$

können wir schreiben:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})(y_k+y_{k+1}),$$

wobei wir die folgende Vereinbarung treffen:

$$x_{n+1} = x_1,\ y_{n+1} = y_1.$$

Diese Formel wurde bereits von GAUSS aufgestellt. Wir wollen diese Gleichung etwas vereinfachen. Mit Hilfe des Distributivgesetzes erhalten wir zunächst

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})y_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})y_{k+1}.$$

Ersetzen wir in der zweiten Summe den Summationsindex k durch $\tilde{k}-1$, so bekommen wir

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})y_k + \frac{1}{2}\sum_{\tilde{k}=2}^{n+1}(x_{\tilde{k}-1}-x_{\tilde{k}})y_{\tilde{k}}.$$

Für den letzten Summanden können wir mit der Setzung $x_0 = x_n$ schreiben

$$(x_n-x_{n+1})y_{n+1} = (x_0-x_1)y_1.$$

Dies zeigt, dass wir die zweite Summe auf der rechten Seite wieder von $\tilde{k}=1$ bis $\tilde{k}=n$ laufen lassen können, da der Term mit dem Index $n+1$ demjenigen mit dem Index 1 entspricht. Wir erhalten schließlich

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})y_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}-x_k)y_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}-x_{k+1})y_k.$$

Diese Formel war ebenfalls bereits GAUSS bekannt und hat gegenüber der ersten Formel den Vorteil, dass für jeden Summanden eine Addition weniger zur Berechnung benötigt wird.

1.3 Anordnung von Zahlen

Eine weitere wichtige Eigenschaft der rationalen und der reellen Zahlen ist, dass sie sich der Größe nach anordnen lassen, und dass diese Anordnung in vernünftiger Art und Weise mit den Rechenoperationen kompatibel ist. Was genau wir darunter verstehen, konkretisieren die folgenden Axiome:
Wenn x und y Elemente eines Körpers $\mathbb{K}$ sind, so können wir die Beziehung $x < y$ (x ist kleiner als y) betrachten. Diese kann entweder wahr oder falsch sein. Die Kleiner-als-Beziehung hat die folgenden Eigenschaften:

- *Trichotomie:* Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
$$x < y, \quad x = y, \quad y < x. \tag{O1}$$
- *Transitivität:*
$$x < y \text{ und } y < z \Rightarrow x < z. \tag{O2}$$
- *Monotonie der Addition:*
$$x < y \Rightarrow x + z < y + z. \tag{O3}$$
- *Monotonie der Multiplikation:*
$$x < y \text{ und } 0 < z \Rightarrow xz < yz. \tag{O4}$$

Definition 1.3 *Einen Körper $\mathbb{K}$, auf dem eine Beziehung „$<$“ definiert ist, die die Axiome (O1) – (O4) erfüllt, heißt angeordneter Körper.*

Beispiele für angeordnete Körper sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Notation 1.4 *Statt $x < y$ schreiben wir auch $y > x$ und $x \leq y$ oder $y \geq x$ gilt genau dann, wenn entweder $x = y$ oder $x < y$.*

Aus den Axiomen können nun mit ähnlich elementaren Schlüssen wie wir sie bereits oben verwendet haben die folgenden **Rechenregeln für Ungleichungen** hergeleitet werden:

(i) Addition von Ungleichungen:
$$a < b,\ x \leq y \Rightarrow a + x < b + y.$$

(ii) Multiplikation mit einem negativen Faktor:
$$x < y,\ a < 0 \Rightarrow ax > ay.$$

(iii) Multiplikation zweier Ungleichungen:
$$0 < x < y,\ 0 \leq a < b \Rightarrow ax < by.$$

(iv) Produktrelation:

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \Rightarrow xy > 0.$$

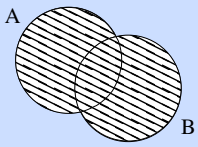
(v) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$.

(vi) Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.

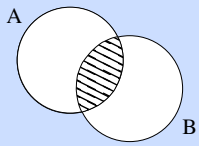
Führen wir nun etwas Notation ein für die wichtigsten Mengenrelationen (Vereinigung, Schnitt, und Substraktion):

Definition 1.5 (Mengenrelationen)

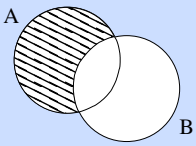
$A \cup B$:



$A \cap B$:



$A \setminus B$:



Im Einzelnen:

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{(Vereinigungsmenge)} \\ A \cap B &:= \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{(Schnittmenge)} \\ A \setminus B &:= \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\} && \text{(Differenzmenge, „A ohne B“)} \end{aligned}$$

$A \subset B$ genau dann, wenn alle Elemente aus A auch Elemente in B sind.
$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ (A ist Vereinigungsmenge der A_k)
A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Basierend auf den Ordungsaxiomen kann der Körper der rationalen Zahlen als Vereinigung disjunkter Mengen $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ angesehen werden, wobei

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}\,, \quad \mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}\,, \quad \mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\,, \quad \mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q} - \cup \{0\}\,.$$

Es gilt wegen Axiom (O3)

$$\begin{aligned} b > a, &\quad \text{genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{Q}+, \\ b \geq a, &\quad \text{genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\,. \end{aligned}$$

Eine analoge Aufteilung läßt sich natürlich auch für die reellen Zahlen durchführen, die wir aber erst später rigoros kennenlernen werden.

Definition 1.6 *In einem angeordneten Körper ist der* Betrag *von x (Betragsfunktion) definiert durch*

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}\,.$$

Bemerkung 1.7 *Für Beträge von Produkten und Quotienten gilt*

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad \textit{und} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\,.$$

Satz 1.8 (Dreiecksungleichung) *Für x, y aus einem angeordneten Körper gilt $|x+y| \leq |x|+|y|$.*

Beweis:
Es gilt

$$|x+y| = \begin{cases} x+y & ; x+y \geq 0\,, \\ -(x+y) & ; x+y < 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq |x| \text{ und } \quad y \leq |y| \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad & x+y \leq |x|+|y|\,, \\ -x \leq |x| \text{ und } -y \leq |y| \Rightarrow -x+(-y) = -(x+y) & \leq |x|+|y|\,. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Überlegungen folgt $|x+y| \leq |x|+|y|$.

□

Folgerung 1.9 *Es gilt:* $\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|$

Beweis: Wir addieren zu x eine Null und verwenden die Dreiecksungleichung:

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|\,.$$

Durch Vertauschen von x und y erhält man $|y|-|x| \leq |y-x|$, d.h. $-\big(|x|-|y|\big) \leq |x-y|$. Zusammen ergibt sich die Behauptung.

□

Die Betragsfunktion und andere stückweise definierte Funktionen sind auch Thema von Aufgabe 1.8.

Satz 1.10 (Bernoulli-Ungleichung) *Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Vorbemerkung Wir können nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ den Nachweis durch Nachrechnen führen. Statt dessen zeigen wir:

$n = 1:$	Die Aussage gilt für $n = 1$.	(Induktionsanfang, -verankerung)
$n \to n+1:$	Wenn die Aussage für n gilt	(Induktionsannahme),
	dann gilt sie auch für $(n+1)$.	(Induktionsschritt)

Dieses Beweisprinzip nennt man *vollständige Induktion*[2] und es entspricht der Konstruktion der natürlichen Zahlen. Ein weiteres Beispiel für vollständige Induktion finden Sie in Übung 1.5, eine Anwendung der Bernoulli-Ungleichung in Übung 1.10.

Beweis: (Bernoulli-Ungleichung)

$$
\begin{array}{llcll}
n=1: & (1+x)^1 & = & 1+x & \checkmark \\
n\to n+1: & (1+x)^{n+1} & = & (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} & \\
 & & \overset{\text{Ind. ann.}}{\geq} & (1+nx)(1+x) & \\
 & & = & 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} & \\
 & & \geq & 1+(n+1)x & \checkmark
\end{array}
$$

□

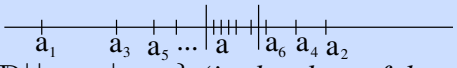
1.4 Folgen und Grenzwerte

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist auch bereits ein angeordneter Körper. Was zeichnet die reellen Zahlen nun aus? Wir erinnern uns an das Schachtelungsprinzip. Reelle Zahlen ergeben sich durch Abschluß der rationalen Zahlen bezüglich „Schachtelung"! Dieses Approximationsprinzip werden wir uns nun genauer ansehen.

Definition 1.11 (Folgen und Konvergenz) *Wenn wir jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) eine Zahl a_n aus einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$) zuordnen, so bezeichnen wir diese Zuordnung als* Folge. *Wir schreiben*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots) .$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.*



*Die Menge $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \varepsilon\}$ (in der demzufolge alle a_n mit $n > N(\varepsilon)$ liegen müssen) nennt man ε-*Umgebung *von a.*

[2] Induktion bezeichnet normalerweise den Vorgang, von Spezialfällen auf eine allgemeine Regel zu schließen. Dies ist (im Gegensatz zum üblichen mathematisch-logischen *deduktiven* Schließen vom Allgemeinen aufs Spezielle) die in der Naturwissenschaft übliche Schlussweise, die normalerweise *nicht* zu logisch zwingenden Schlüssen führt. Bei der vollständigen Induktion werden jedoch gewissermassen *alle* Spezialfälle gleichzeitig betrachtet, wodurch sie wieder zu einem mathematischen *Beweis*verfahren wird.

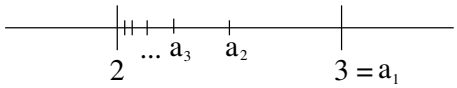
Konvergent heißt also, zu jeder (noch so kleinen) Umgebung des Grenzwertes gibt es einen Index, ab dem alle Glieder der Folge innerhalb dieser Umgebung liegen. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Beispiel 1:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\ldots); \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{wobei} \quad N(\varepsilon) = 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Beispiel 2: $a_n = 2 + \frac{1}{n}$



Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Frage: Wann ist a_n in der ε-Umgebung von 2?

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle also $N(\varepsilon)$ als die nächst größere (oder gleiche) natürliche Zahl zu $\frac{1}{\varepsilon}$. Wir schreiben dafür

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Damit gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

□

Hierbei haben wir folgende Notation verwendet:

Notation 1.12 (Gauß-Klammern) *$\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist. Weiterhin ist $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.*

Beispiel 3: $a_n = \frac{1}{3^n}$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Nachweis:

$$3^n = (1+2)^n \overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\geq} 1 + 2n > 2n \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2n}$$

Es genügt also, $N(\varepsilon)$ so zu wählen, dass $\frac{1}{2n} < \varepsilon$. Nun gilt aber

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Wir wählen also $N(\varepsilon) := \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil$.
Dies gilt etwas allgemeiner:

$$a_n = q^n$$

Behauptung:

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Nachweis (analog zu oben):
Falls $q = 0$, so ist die Behauptung klar. Im Folgenden können wir also $q \neq 0$ annehmen.

$$\begin{aligned}
r &:= \frac{1}{|q|} - 1 > -1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + r \\
&\Rightarrow (1+r)^n \geq 1 + nr \quad \text{(Bernoulli-Ungl.)} \\
&\Rightarrow |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} < \frac{1}{nr} \leq \frac{1}{n|r|}
\end{aligned}$$

Damit nun $\frac{1}{n|r|} < \varepsilon$, wählen wir $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon|r|} \right\rceil$. Daraus folgt dann $|q|^n < \varepsilon$.

□

Bemerkung: Mit Hilfe der noch zu definieren Logarithmus-Funktion erhält man $|q^n| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$. Also kann $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} \right\rceil$ gewählt werden. Allerdings wollen wir hier noch nicht auf Eigenschaften dieser Funktion zurückgreifen. Deshalb wird hier die Bernoulli-Ungleichung genutzt.

Beispiel 4: Die Folgen

$$(1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) \qquad \text{und} \qquad (1,2,3,4,\ldots)$$

konvergieren nicht.

Beispiel 5: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert mittels:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1 \\
&a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
\Rightarrow \quad &(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots\right).
\end{aligned}$$

Behauptung:

$$a_n \overset{!}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \overset{\text{vgl. Bsp. 3}}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

Nachweis (mit vollständiger Induktion):

$$\begin{aligned}
n=0 \quad &: \quad a_0 &&= 1 = \frac{2^1-1}{2^0} && \checkmark \\
n \to n+1 \quad &: \quad a_{n+1} &&= a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \overset{\text{Ind. Annahme}}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2(2^{n+1}-1)+1}{2^{n+1}} \\
&&&= \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} && \checkmark
\end{aligned}$$

Verallgemeinern wir Beispiel 5, so gelangen wir zum folgenden Lemma[3]

Lemma 1.13 *(Geometrische Reihe)*
Sei

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_{n+1} &= a_n + q^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dies können wir auch schreiben als:

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $q = \frac{1}{2}$ folgt dann $a_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}$, vgl. Beispiel 5.

Beweis: mittels vollständiger Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 0: \quad & a_0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q} \\
n \to n+1: \quad & a_{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
& = \frac{(1-q^{n+1}) + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\
& = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

[3] Ähnlich wie ein *Satz* ist ein *Lemma* eine mathematische Aussage, die durch einen Beweis aus Axiomen und anderen schon bewiesenen Sätzen und Lemmata (auch: Lemmas) hergeleitet wurde. Im Gegensatz zu einem Satz verwendet man den Begriff *Lemma* für Aussagen geringerer Bedeutung sowie für Hilfsaussagen, die benutzt werden um einen anderen Gedankengang (etwa einen Satz oder dessen Beweis) einfacher formulieren zu können.

□

Satz 1.14 (Konvergenz der geometrischen Reihe) *Für* $0 \leq q < 1$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$$

(für $q = \frac{1}{2}$ vgl. Bsp. 5)
Beweis:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right| < \varepsilon \quad &\overset{0\leq q<1}{\Leftrightarrow} \quad q^{n+1} < \varepsilon(1-q) \\
&\Leftrightarrow \quad q^n < \varepsilon \frac{1-q}{q} \\
&\qquad\quad \text{ist erfüllt für alle } n \geq N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{q^2}{\varepsilon(1-q)^2} \right\rceil. \\
\text{vgl. hierzu Bsp. 3:} \quad &\qquad r := \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q},\ \tilde{\varepsilon} := \varepsilon \frac{1-q}{q} \\
&\qquad q^n < \tilde{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq N(\tilde{\varepsilon}) = \left\lceil \frac{1}{\tilde{\varepsilon} r} \right\rceil.
\end{aligned}$$

□

<u>Wir schreiben auch</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Eine geometrische Reihe ist auch das Thema von Aufgabe 1.1, eine ähnliche Reihe von Aufgabe 1.11.

Notation 1.15 *Eine Folge heißt* divergent*, falls sie keinen Grenzwert besitzt (Bsp:* $(1,2,3,4,\ldots), (-1,1,-1,1,\ldots)$*).*
Eine Folge heißt beschränkt*, wenn es eine Zahl* M *gibt mit*

$$|a_n| \leq M \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel: Betrachten wir die harmonische Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Diese Reihe divergiert, wie man durch folgende Abschätzung für $n = 2^k$ einsehen kann:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&= + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2} \qquad (k \text{ Summanden } \tfrac{1}{2}) \\
&= 1 + \frac{k}{2} \xrightarrow{k \to \infty} \infty
\end{aligned}$$

Satz 1.16 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei $\varepsilon = 1$; da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, existiert eine Zahl $N(1)$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N(1)$, dann gilt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$

Für die endlich vielen $n \leq N(1)$ gilt: $|a_n| \leq \tilde{M} := \max\left(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N(1)}|\right)$ und somit gilt für alle n:

$$|a_n| \leq M := \max\left(\tilde{M}, |a| + 1\right).$$

□

Satz 1.17 *Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: (Widerspruch) Angenommen, es gäbe zwei Grenzwerte $a \neq a'$. Wähle $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{2}$, dann gibt es N, N', so dass gleichzeitig

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \quad \text{für } n \geq N \text{ und} \\
|a_n - a'| &< \varepsilon \quad \text{für } n \geq N'
\end{aligned}$$

Das kann aber nicht sein und führt zum Beispiel auf den Widerspruch:

$$\begin{aligned}
|a - a'| &= |a - a_n + a_n - a'| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a_n - a'| \\
&\underset{n \geq \max(N,N')}{<} \varepsilon + \varepsilon = |a - a'|
\end{aligned}$$

und damit $|a - a'| < |a - a'|$ ↯

□

Satz 1.18 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, *dann gilt:*

(i) $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a+b$,

(ii) $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$.

(iii) Falls ferner $b \neq 0$, *so folgt auch* $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$.

Beweis: Wir führen den Beweis hier nur für die Multiplikation und Division. Den Beweis für Summen konvergenter Folgen finden Sie in Aufgabe 1.2.

(ii)

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&\overset{\text{Beschr. konv. Folgen}}{\leq} M \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{<\tilde{\varepsilon} \\ \text{für } n>N_b(\tilde{\varepsilon})}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\substack{<\tilde{\varepsilon} \\ \text{für } n>N_a(\tilde{\varepsilon})}} |b| \\
&< (M + |b|)\tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Nun wähle $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M+|b|}$, dann gilt $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$,
falls $n > N(\varepsilon) := \max\{N_a(\frac{\varepsilon}{M+|b|}), N_b(\frac{\varepsilon}{M+|b|})\}$.

(iii) Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n(b - b_n)}{b_n b} + (a_n - a)\frac{1}{b}\right| \\
&\quad \text{Da } b \neq 0 \text{ können wir } n \text{ so groß wählen, dass } |b_n| > \frac{|b|}{2} \\
&\quad \left(\text{wähle dazu in der Betrachtung des Grenzproblems } \varepsilon = \tfrac{|b|}{2}\right) \\
&\leq \frac{|a_n|}{\frac{|b|}{2}|b|}|b - b_n| + |a_n - a|\frac{1}{|b|}.
\end{aligned}$$

Ab hier schätzen wir weiter ab wie oben unter (i).

□

Beispiele

(i) Für $0 \leq q < 1$ gilt:

$$c_n = \frac{\left.1 + q^n\right\} =: a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}{\left.3\sum_{k=0}^{n} q^k\right\} =: b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3\frac{1}{1-q}}$$

$$\Rightarrow \quad c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-q}{3}$$

(ii)

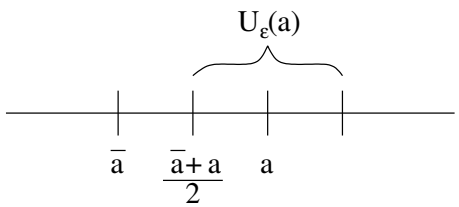
$$c_n = \frac{3n^2+17n}{7n^2-5} = \frac{\left.3+\frac{17}{n}\right\} =: a_n \xrightarrow{n\to\infty} 3}{\left.7-\frac{5}{n^2}\right\} =: b_n \xrightarrow{n\to\infty} 7}$$

$$\Rightarrow \quad c_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{7}$$

Weitere Beispiele finden Sie in Aufgabe 1.10.

Lemma 1.19 *Falls stets* $\underline{a} < a_n < \overline{a}$ *und* $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$*, dann gilt* $\underline{a} \le a \le \overline{a}$*.*
Die Zahlen $\underline{a}, \overline{a}$ *nennt man* untere *bzw.* obere Schranken.

Beweis: (Widerspruch) Angenommen, es wäre $a > \overline{a}$. Wähle $\varepsilon = \frac{a-\overline{a}}{2}$.



Dann folgt für $n > N(\varepsilon) : a_n > \frac{a+\overline{a}}{2} > \overline{a}$ ↯

Analog argumentiert man für die untere Schranke und erhält $a \ge \underline{a}$.

□

Achtung: Es folgt allgemein keinesfalls, dass $a < \overline{a}$, denn z.B. $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1; a_n \to 1$.

1.5 Das Vollständigkeitsaxiom

Erinnern wir uns an das Beispiel $\sqrt{3}$ ist nicht rational, oder anders ausgedrückt, $x^2 = 3$ hat keine rationale Lösung, aber wir haben x durch Schachtelung „dargestellt“. Die unteren und oberen Grenzen „erscheinen“ als konvergente Folgen, auch wenn wir deren Grenzwert (in $\mathbb{Q}$) noch nicht angeben können.

Ziel: $\mathbb{R}$ erhalten wir aus $\mathbb{Q}$, wenn wir die Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{Q}$ hinzunehmen.

Dazu betrachten wir zunächst folgende

Definition 1.20 *Eine Folge reeller Zahlen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* Cauchyfolge*, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n,m \geq N(\varepsilon).$$

Bemerkung 1.21 *Dies ist ein Begriff von Konvergenz, ohne etwas über den Grenzwert selber zu sagen.*
Die harmonische Reihe $(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})_{n\in\mathbb{N}}$ *als Folge zeigt, dass* $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$ *für* $n \to \infty$ *nicht ausreicht, damit die Folge schon konvergiert.*

Satz 1.22 *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow$ Es gibt $N(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N(\varepsilon)$.
$\Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n,m > N(\varepsilon) \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.

□

Auf $\mathbb{Q}$ gilt die Umkehrung nicht (Bsp.: Schachtelung für $\sqrt{3}$); die Schachtelungsfolgen sind sicherlich Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, aber sie sind nicht konvergent in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Wir nehmen dies deshalb als Axiom um $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ zu erweitern. Zunächst definieren wir

Definition 1.23 *Ein angeordneter Körper* $\mathbb{K}$ *heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt.*

Basierend darauf führen wir nun $\mathbb{R}$ axiomatisch ein.

Vollständigkeitsaxiom: In $\mathbb{R}$ hat jede Cauchyfolge einen Grenzwert.

$\mathbb{R}$ ist also ein vollständiger angeordneter Körper. Konstruktiv wird der Körper $\mathbb{R}$ definiert als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. D.h. man nimmt alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen hinzu. Praktisch heißt dies, wir nehmen alle Dezimalzahlentwicklungen hinzu:

$$(1, 1.7, 1.73, 1.732, \ldots, 1.7320508, \ldots)$$

ist eine Cauchyfolge, die so fortgeschrieben werden kann, dass sie $\sqrt{3}$ repräsentiert.

Satz 1.24 (Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *hat eine konvergente Teilfolge, d.h. falls* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegeben mit* $|x_n| \leq M$*, dann gibt es eine strikt monotone Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von Indizes aus* $\mathbb{N}$ $(n_{k+1} > n_k)$*, so dass* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Beispiel 1.25 Betrachte die Folge

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (0, 0.5, -0.5, 0.75, -0.75, 0.875, -0.875, \ldots) \\
&= \left(0, 1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{4}, -1+\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{8}, -1+\frac{1}{8}\ldots\right). \\
n_k = 2k, k = 1,2,\ldots \quad &: \quad (2,4,6,\ldots) \\
& \quad x_{n_k} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} 1 \\
n_k = 2k-1, k = 1,2,\ldots \quad &: \quad (1,3,5,\ldots) \\
& \quad x_{n_k} = -1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} -1
\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Übung 1.3.

Notation 1.26 (Intervalle)

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	halboffenes Intervall

Beweis: (Bolzano-Weierstrass)
Wir konstruieren eine Schachtelung von Intervallen:
Im nullten Schritt setzen wir:

$$k = 0, a_0 = -M, b_0 = M \quad \Rightarrow \quad \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset [a_0, b_0]$$

Ferner wähle $n_0 = 1$. Nun konstruieren wir iterativ (Schritt für Schritt) eine Schachtelung von Intervallen und die im Satz postulierte Teilfolge:

(*) Hierzu betrachten wir zunächst die Teilintervalle:

$$\left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right], \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] \subset [a_k, b_k]$$

Mindestens in einem Intervall liegen unendlich viele Folgenglieder; setze $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ gleich diesem Intervall (also in einem Fall $a_{k+1} = a_k$ sowie $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ oder im anderen Fall $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ sowie $b_{k+1} = b_k$) und betrachte (nach Umnummerierung) nur noch die Teilfolge, die ganz in $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ liegt.
Wähle n_k gleich dem ersten Index dieser Teilfolge, der größer als n_{k-1} ist, erhöhe k um 1 ($k \leftarrow k+1$) und fahre fort mit (*).

Offensichtlich gilt :

$$
\begin{aligned}
& (b_k - a_k) = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{2M}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \\
\Rightarrow \quad & |x_{n_l} - x_{n_m}| \leq \frac{2M}{2^k} \qquad \text{für alle } l, m \geq k \\
\Rightarrow \quad & (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{ist Cauchyfolge}
\end{aligned}
$$

und konvergiert damit nach dem Vollständigkeitsaxiom.

□

Definition 1.27 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst monoton wachsend (fallend), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$). Wir sprechen von einer monotonen Folge, falls diese entweder monoton wächst oder fällt.*

Satz 1.28 *Jede monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) nehmen wir an, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein x konvergiert. Damit ergibt sich die Ungleichungskette

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n_k} \leq x_{n_k+1} \leq \ldots \leq x_{n_{k+1}} \leq \ldots$$

und wir nehmen nun an, dass $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Wegen der Monotonie der Folge gilt nun einerseits für jeden beliebigen Index l, den wir wählen, dass $x_{n_k} \leq x_{n_k+l}$. Andererseits gibt es ein $\tilde{k}$ abhängig von l, so dass $x_{n_k+l} \leq x_{n_{\tilde{k}}}$. Wäre nun $x < x_{n_k+l}$, so würde $x < x_{n_{\tilde{k}}}$ folgen, was zu einem Widerspruch zur Konvergenz der Teilfolge führt. Damit ist $x > x_n$ für alle n. Ferner liegt x_{n_k+l} zwischen x_{n_k} und x, d.h. $\left|x_{n_k+l} - x\right| < \varepsilon$ und somit folgt die Konvergenz der ganzen Folge.

□

1.6 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 1.1 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Vorschrift

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{3^{n+1}}
\end{aligned}
$$

definiert. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Hypothese für eine nicht rekursive Formel zur Berechnung von a_{n+1} auf.

Anwesenheitsaufgabe 1.2 Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$a_n + b_n \longrightarrow a + b.$$

Anwesenheitsaufgabe 1.3 Betrachten Sie die Folge

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge. Geben Sie eine solche und ihren Grenzwert an.

Anwesenheitsaufgabe 1.4 Sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1; & x \in [2n-1, 2n) \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ -1; & x \in [2n, 2n+1) \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Weiterhin sei die Funktion g definiert duch

$$g(x) := \begin{cases} xf(\frac{1}{x}); & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

i) Fertigen Sie Skizzen der Funktionen f und g an.

ii) Bestimmen Sie den Grenzwert von g an der Stelle 0:

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

Anwesenheitsaufgabe 1.5 Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$$

Anwesenheitsaufgabe 1.6 Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

monoton wächst und dass gilt

$$a_n \geq 2.$$

Aufgabe 1.7 Beweisen Sie ausgehend von den Körperaxiomen:

a) Es gibt genau ein Nullelement.

b) Für $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung: $x = \frac{b}{a}$.

c) Es gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ für $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

Aufgabe 1.8

a) Skizzieren Sie zuerst den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie die Funktion ohne Betragsfunktion mit Fallunterscheidung:

$$f(x) := x + |x|$$

b) Skizzieren Sie nun den Graph der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases}$$

und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung.

c) Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie auch diese unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x+2 & : \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1.9 Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$.

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1+\frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2-n+1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

d) $a_n := \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})}$.

Aufgabe 1.11 Zeigen Sie, dass die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle $0 \leq x \leq 1$ konvergiert.
Tipp: Vergleichen Sie mit der Folge $g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ und verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 13d) sowie die Eigenschaft monotoner Folgen.
Bemerkung: Später werden Sie erkennen, dass die zugehörige Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Exponentialfunktion e^x darstellt.

Aufgabe 1.12 Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede beschränkte Folge ist konvergent. ja □ nein □

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt. ja □ nein □

c) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt. ja □ nein □

d) Aus der Konvergenz von (a_n) folgt die Konvergenz von $|a_n|$.
ja □ nein □

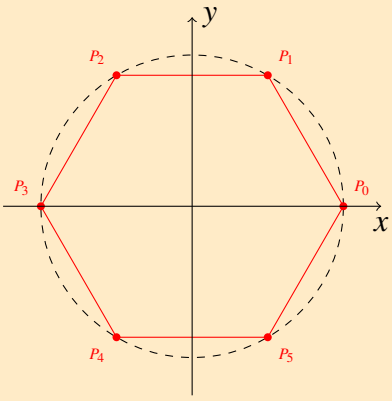
e) Ist (a_n) beschränkt und gilt $a_n > 0$, dann ist $(1/a_n)$ beschränkt.
ja □ nein □

f) Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und (b_n) monoton fallend, und es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$. Dann sind (a_n) und (b_n) konvergent. ja □ nein □

g) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien monoton wachsend. Dann ist $(a_n + b_n)$ monoton wachsend. ja □ nein □

h) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien monoton wachsend. Dann ist $(a_n \cdot b_n)$ monoton wachsend. ja □ nein □

Aufgabe 1.13 Betrachten Sie die nachstehende Abbildung mit den Punkten $P_0 = (1,0)$ und $P_1 = (a, \sqrt{1-a^2})$ wobei $a \in (0,1)$.



a) Unter der Annahme, dass die Punkte $P_0, \ldots, P_5$ ein symmetrisches Hexagon (Sechseck) bilden, d.h. symmetrisch bzgl. x- und y-Achse, geben Sie die Koordinaten der Punkte $P_2, \ldots, P_5$ an.

b) Unter Verwendung der Teilaufgabe a), bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des Hexagons in Abhängigkeit des Parameters $a \in (0,1)$, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $F(a)$ mit der Sie den Flächeninhalt berechnen können. (Tipp: Nutzen Sie die Gaußsche Flächenformel aus der Vorlesung.)

c) Bestimmen Sie nun das Hexagon mit dem größten Flächeninhalt.

2 Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

2.1 Reelle Funktionen

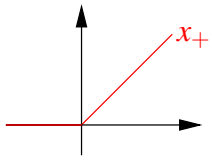
Definition 2.1 *Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann versteht man unter einer* reellen Funktion *auf D eine* Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. *D heißt* Definitionsbereich *von f. Man schreibt auch $f : x \mapsto f(x)$, dabei heißt x* Urbild *und $f(x)$* Bild. *Der* Graph *von f ist die Menge*

$$G_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}\,, \text{ wobei}$$
$$A \times B := \{(x,y) \,|\, x \in A, y \in B\}$$

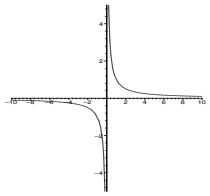
das sogenannte kartesische Produkt *der beiden Mengen A und B, d.h. die Menge aller* geordneten Paare (x,y) *von Elementen aus A und B ist.*

Beispiele 2.2

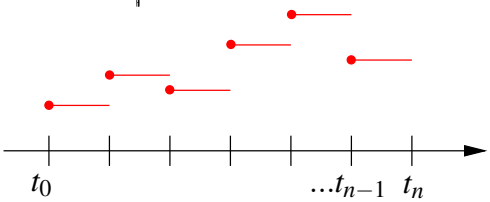
- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$
  (p ist ein Polynom *vom Grad n, falls $a_n \neq 0$)*
- $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ *(*Betragsfunktion*)*
- $(\cdot)_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x+|x|}{2}$ *(*Positiver Anteil*)*



- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$



- $f : [t_0, t_n) \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ *mit* $f(x) = c_i,\ c_i \in \mathbb{R}$, *falls* $x \in [t_i, t_{i+1})$ *mit* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *(*Treppenfunktion*)*



- $f : \mathbb{R} \setminus N_q \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ *mit p, q Polynome und N_q die Nullstellenmenge zu q, heißt* rationale Funktion.

Polynomberechnung: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

1. Ansatz: Direkte Berechung nach der Formel. Als **Java-Programm** sieht das Ganze wie folgt aus:

```
public  class polynom
{
  static double evalPolynom (double[] a, double x)
  {
    int n = a.length - 1;
    double y = a [0];
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
       y = y + a [i] * Math.pow (x, i);
    }
    return y;
  }

}
```

Nachteil: Durch die Multiplikation mit x^i müssen sehr viele oder sehr rechenintensive Operationen ausgeführt werden.

Verbesserung: Hornerschema
Wir können das Polynom (durch teilweises Ausklammern) auch etwas anders schreiben:

$$p(x) = (\cdots((a_{n-1}x + a_{n-2}) \cdot x + a_{n-3}) \cdot x \cdots + a_1) \cdot x + a_0 \,.$$

Hier ergibt sich dann ein modifizierte Algorithmus:
Als **Java-Programm** sieht das Ganze nun wie folgt aus:

```
public  class polynom
{

  static double horner (double[] a, double x)
  {
    int n = a.length() - 1;
    double y = a [n];
    for (int i = 1; i <= n; i++)
      y = y * x + a [n - i];
      return y;
  }
}
```

Pro Schleifendurchlauf muss nur noch eine Multiplikation ausgeführt werden.

Wir können uns die im Programm ablaufende Rechnung durch das *Horner-Schema* zur Auswertung eines Polynoms p mit

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= ((\cdots(a_n x + a_{n-1})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

an einer Stelle x_0 in einem Diagram veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \\ & b_{n-1}x_0 & \dots & b_1x_0 & b_0x_0 & \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & & c\,. \end{array}$$

Hinter diesem Diagram verbirgt sich die ausführlich geschriebene Rechenvorschriften:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}x_0 \\ &\dots \\ b_0 &= a_1 + b_1x_0 \\ c &= a_0 + b_0x_0\,. \end{aligned}$$

Gleichzeitig erhalten wir mit diesem Schema eine *Faktorisierung des Polynoms* mit Restterm:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0)(x - x_0) + c\,.$$

Dies folgt direkt durch Vergleich der Koeffizienten zu gleichen Potenzen von x und nach Definition der Koeffizienten b_k:
$a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = -b_{n-1}x_0 + b_{n-2}$, $\cdots$ $a_i = -b_ix_0 + b_{i-1}$, $\cdots$ $a_0 = -b_0x_0 + c$.
Hierbei ergibt sich als Folgerung $c = p(x_0)$. Mit dem Hornerschema erhalten wir also das Ergebnis der Polynomdivision durch das lineare Polynom $(x - x_0)$ mit Rest $c = p(x_0)$ und im Fall $p(x_0) = 0$ eine Faktorisierung des Polynoms in ein Polynom vom Grad $n-1$ und in den Linearfaktor $(x - x_0)$. Ein Beispiel dafür finden Sie in Aufgabe 2.1.

Beispiel 2.3 *Wir werten das Polynom*

$$p(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 18 \tag{5}$$

an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem Hornerschema aus:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 3 & 18 & \\ & 9 & -9 & -18 & \\ \hline 3 & -3 & -6 & & 0\,. \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x-3)(3x^2 - 3x - 6)\,.$$

Notation 2.4 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat die* Nullstelle *$x_0 \in D$, falls gilt $f(x_0) = 0$.*

Beispiel 2.5 *Das Polynom (5) hat eine Nullstelle $x_1 = 3$. Das Hornerschema zeigt, dass dieses Polynom $x - 3$ als Faktor enthält.*

Allgemein gilt: Ist x_1 eine Nullstelle eines Polynoms $p_n$vom Grad n, so gilt

$$p_n(x) = (x - x_1)p_{n-1}(x),$$

wobei p_{n-1} ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Hat das Polynom weitere Nullstellen, so können wir das Verfahren fortsetzen.

Notation 2.6 (Komposition/Verkettung von Funktionen) *Zu* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset E$
(hierbei sei $f(D) := \{y \in \mathbb{R} | y = f(x)$ *für ein* $x \in D\}$*) definieren wir*

$$(g \circ f) : D \to \mathbb{R};\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Beispiel 2.7

$$f(x) = |x|,\ g(z) = \sqrt{z},\ D = \mathbb{R},\ E = \mathbb{R}_0^+, f(D) = E$$
$$(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ (g \circ f)(x) = \sqrt{|x|}$$

2.2 Stetigkeit

Notation 2.8 (Grenzwert bei Funktionen) *Wir schreiben* $\lim_{x \to a} f(x) = c$*, falls für jede Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *mit* $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ *gilt:* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Definition 2.9 (Stetigkeit basierend auf Folgenbetrachtung) *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* stetig in $a \in D$*, genau dann wenn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

(D.h. egal, mit welcher Folge von Urbildern man gegen das Urbild a läuft, die Folge der Bilder geht immer gegen das Bild von a.)
Eine Funktion heißt stetig (auf D)*, wenn sie in* <u>*allen*</u> $a \in D$ *stetig ist.*

Beispiele 2.10 Stetige und nicht stetige Funktionen

(i) $f(x) = x$, $f(x) = c$ *sind stetig auf* $\mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & sonst \end{cases}$ *ist unstetig in* 0.

(iii) Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig (vgl. Satz 1.18).

(iv) *Aus (i) und (iii) folgt: Polynome sind stetig.*

(v) *Sei* $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *mit* f, g *stetig auf* $\mathbb{R}$, *dann ist* h *stetig auf* $\mathbb{R} \setminus N_g$, *wobei* N_g *die Nullstellenmenge von* g *ist (vgl. ebenfalls Satz 1.18).*
konkrete Beispiele: $\frac{1}{x-1}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x+3}{(x^2-1)}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Weitere Beispiele finden Sie in Übung **??**.

Bemerkung 2.11 *Es sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig,* $a \notin D$ *und* $\lim_{x \to a} f(x) = c$, *dann nennt man* f stetig ergänzbar in a durch den Wert c.

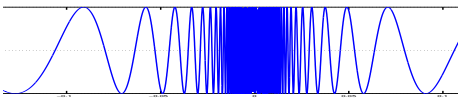
Beispiele 2.12 *(i)* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *ist zunächst bei* $x = 1$ *nicht definiert, aber*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

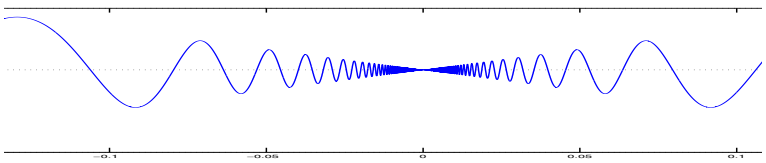
D.h. $x \mapsto f(x)$ *ist in* 1 *stetig ergänzbar durch* 2.

(ii) $x \mapsto |x|$ *ist stetig* (*da* $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$).

(iii) $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *kann nicht stetig in* 0 *fortgesetzt werden.*



(iv) $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *kann für* $x = 0$ *stetig durch den Wert* 0 *fortgesetzt werden, denn* $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \to 0$ *für* $x \to 0$.



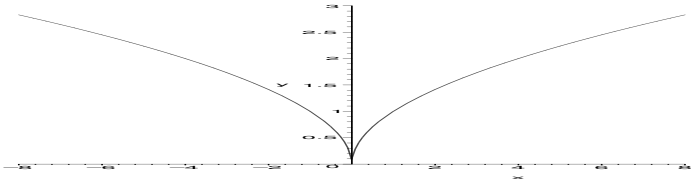
(v) $x \mapsto \sqrt{|x|}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$ *(siehe auch das Beispiel zu Definition 2.16).*

$$a \neq 0: \quad \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|a|}\right| \overset{(*)}{=} \frac{||x| - |a||}{\left|\sqrt{|x|} + \sqrt{|a|}\right|} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{|a|}} \xrightarrow{x \to a} 0.$$

$$(*): \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a = 0: \quad \sqrt{|x|} \xrightarrow{x \to 0} 0 = \sqrt{0},$$

denn, falls $|x| < \varepsilon^2$, *dann gilt* $\sqrt{|x|} < \varepsilon$



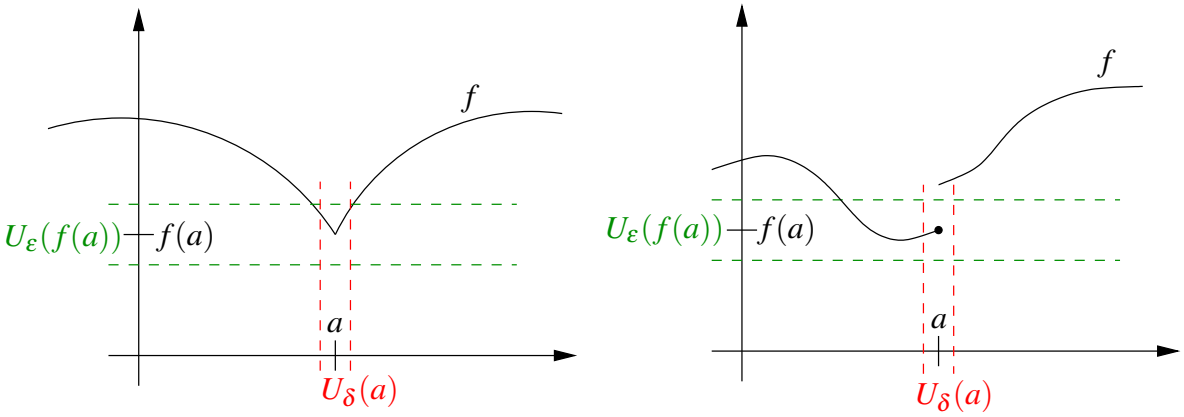
Beispiele für stetige Ergänzbarkeit finden Sie auch in Übung 2.9 und 2.33.

Satz 2.13 (Stetigkeit der Komposition) *Es seien $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(D) \subset E$, dann ist $(g \circ f)$ stetig auf D.*

Beweis: Sei $a \in D$ und x_n eine Folge mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$, dann folgt aber mit der Stetigkeit von g, dass $g(f(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(f(a))$. Das heißt aber, dass $g \circ f$ in a stetig ist.

□

Eine alternative (und äquivalente) Definition von Stetigkeit:
Eine Funktion f ist stetig in a, wenn es zu jeder noch so kleinen Umgebung im Bild von $f(a)$ eine Umgebung im Urbild um a gibt, so dass diese ganze Urbildumgebung in die Bildumgebung abgebildet wird.



Definition 2.14 (Cauchy-Kriterium) *Eine Funktion f ist stetig in a, genau dann wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn für alle $a \in D$ gilt, dass f in a stetig ist.

Zur Äquivalenz der beiden Stetigkeitsbegriffe:

Cauchy-Kriterium (2.14) $\Rightarrow$ Folgenstetigkeit (2.9):

Es gelte $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, d.h. für $n \geq N(\delta)$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Nun wenden wir das Cauchy-Kriterium an und erhalten für $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, so dass $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ falls $n \geq N(\delta(\varepsilon))$

und damit $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)$. Damit haben wir gezeigt, dass $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Folgenstetigkeit (2.9) $\Rightarrow$ Cauchy-Kriterium (2.14):

Dies kann man mit einem Widerspruchsbeweis zeigen, der hier aber nicht ausgeführt werden soll.

Bemerkung 2.15 *Das δ hängt in der Regel von ε und vom Punkt a ab.*

Definition 2.16 *f heißt* gleichmäßig stetig*, wenn δ in Definition 2.14 nur von ε und nicht von a abhängt.*

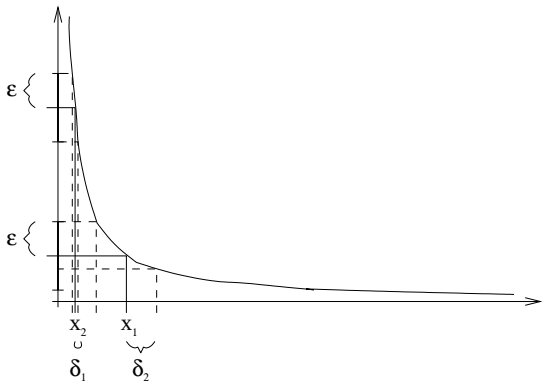
$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x, y \textit{ mit } |x - y| < \delta(\varepsilon).$$

Man kann zeigen, dass stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig stetig sind.

<u>Achtung:</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1)$, (siehe rechts: Für das gleiche ε ist der notwendige Umgebungsparameter δ_1 bei x_1 viel kleiner als der Umgebungsparameter δ_2 bei x_2)

<u>aber:</u> $\sqrt{|x|}$ ist gleichmäßig stetig.

(„$a = 0$“ ist der „worst case“)



Hierzu: Zunächst folgern wir aus der Dreiecksungleichung:

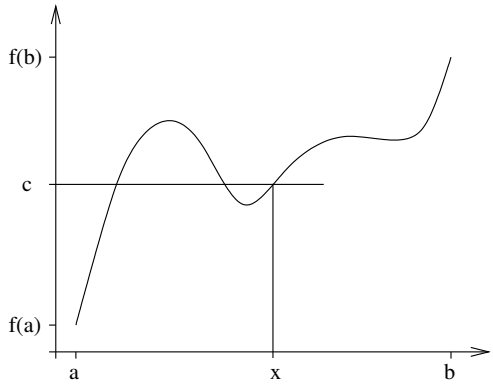
$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| &\overset{1.8}{\leq} \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} && \Big| \cdot \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \\
\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^2 &\leq \big|\,|x| - |y|\,\big| \overset{1.9}{\leq} |x - y| \\
\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| &\leq \sqrt{|x - y|}
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Betrachten wir beliebige x, y mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$, so gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon\,.$$

□

Satz 2.17 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (a < b)$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein x zwischen a und b mit $f(x) = c$.*



Bemerkung 2.18 *x ist nicht unbedingt eindeutig bestimmt.*

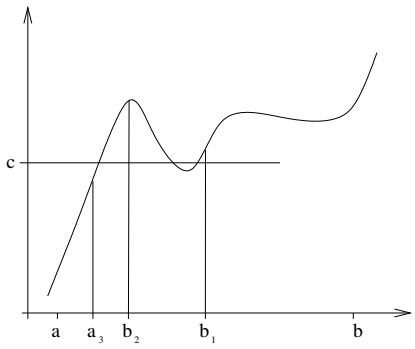
Beweis: Ohne Einschränkung sei $f(a) < f(b)$. (Sonst betrachte $-f$.) Wir konstruieren eine Intervallschachtelung um das Urbild von c zu finden:
$k = 0, a_0 = a, b_0 = b$

(*) setze $m := \dfrac{a_k + b_k}{2}$

falls:

$$\begin{array}{lcl} f(m) > c & : & a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = m \\ f(m) = c & : & \text{fertig } (x = m) \\ f(m) < c & : & a_{k+1} = m, b_{k+1} = b_k \end{array}$$

setze $k = k + 1$ und fahre mit (*) fort.



Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergiert $a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_a$ und da f stetig ist folgt $f(a_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_a)$. Da $f(a_k) < c$ folgt $f(x_a) \leq c$.
Analog folgt $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, $b_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_b, f(b_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_b)$ und da $f(b_k) > c$ folgt $f(x_b) \geq c$.

Weiterhin gilt:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \quad \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

Für beliebiges k gilt offenbar $0 \leq x_b - x_a \leq b_k - a_k$. Da die rechte Seite gegen 0 konvergiert, folgt $x_a = x_b =: x$. Damit gilt aber $c \leq f(x) \leq c \Rightarrow f(x) = c$.
Aufgrund der Konstruktion der Intervallschachtelung gilt außerdem $a \leq a_k \leq x \leq b_k \leq b$, also liegt x im Intervall $[a, b]$.

□

Eine Anwendung des Zwischenwertsatzes finden Sie in Aufgabe 2.10.

Nun wenden wir uns einer zentralen Aussage zu stetigen Funktionen zu. Dazu benötigen wir zunächst etwas Notation.

Notation 2.19 *Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer, dann bezeichnen*

Obere Schranke:		*s ist obere Schranke von A, falls für alle $a \in A$ gilt $a \leq s$,*
Untere Schranke:		*s ist untere Schranke von A, falls für alle $a \in A$ gilt $s \leq a$,*
Supremum:	$\sup A$	*ist die kleinste obere Schranke von A und ∞, wenn es keine obere Schranke gibt,*
Infimum:	$\inf A$	*ist die größte untere Schranke von A und $-\infty$, wenn es keine untere Schranke gibt.*

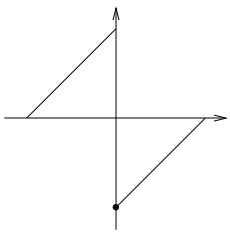
Satz 2.20 *Jede Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, nimmt dort ihr Minimum und ihr Maximum an.*
Das heißt also, falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, so gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$, so dass $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in [a,b]$.

Beispiele 2.21

- *$f(x) = x$ nimmt auf $[0,1]$ sein Minimum an der Stelle 0, sein Maximum an der Stelle 1 an.*
- *$f(x) = x^2$ nimmt auf $[-1,1]$ sein Minimum an der Stelle 0, sein Maximum an den Stellen 1 und -1 an.*
- *$f(x) = x$ nimmt auf $(0,1)$ weder Maximum noch Minimum an, da 1 und 0 nicht als Bilder $f(x)$ für $x \in (0,1)$ auftreten,*
  $\rightsquigarrow$ Abgeschlossenheit des Intervalls ist wichtig.
- $f(x) = \begin{cases} (x+1)\,; x < 0 \\ (x-1)\,; x \geq 0 \end{cases}$

  nimmt Maximum nicht an auf $[-1,1]$, denn für

  $x_n < 0, x_n \to 0$, gilt $f(x_n) \to 1$,
  aber es gibt kein $x \in [-1,1]$ mit $f(x) = 1$,
  $\rightsquigarrow$ Stetigkeit ist wichtig.



Bemerkung 2.22 *Jede nichtleere Menge reeller Zahlen hat ein Supremum und ein Infimum.*

Diese Aussage beweisen Sie in Aufgabe 2.7. Beispiele für Suprema und Infima finden Sie in Aufgabe 2.11.

Der Satz 2.20 sagt also aus, dass es für das Intervall $[a,b]$ und ein auf $[a,b]$ stetiges f ein $x_{\min} \in [a,b]$ gibt mit

$$f(x_{\min}) = \inf f([a,b]) = \inf \{f(x) | x \in [a,b]\}$$

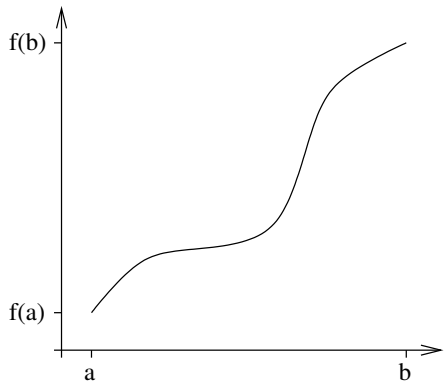
und ein $x_{\max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{\max}) = \sup f([a,b]) = \sup \{f(x) | x \in [a,b]\}.$$

Man sagt auch: „Infimum und Supremum werden als Funktionswert angenommen."
Beweis: Es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{f} := \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_j$, d. h. $x_{k_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$ für ein $x \in [a,b]$. Auch für die Teilfolge gilt $f(x_{k_j}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \overline{f}$. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt nun $f(x_{k_j}) \to f(x) = \overline{f}$.
Analog verfährt man für das Infimum.

□

Betrachten wir nun sogenannte Umkehrfunktionen:



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei strikt monoton (d.h. falls $x < y$ gilt stets $f(x) < f(y)$) und stetig, dann gibt es mit dem Zwischenwertsatz zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ ein x mit $f(x) = c$; wegen der Monotonie von f ist x eindeutig bestimmt. Die Zuordnung von c zu x bezeichnen wir als *Umkehrfunktion* und schreiben

$$\left(f^{-1}\right)(c) = x.$$

Offenbar gilt für alle solche x und c mit $f(x) = c$, dass

$$(f \circ f^{-1})(c) = f(f^{-1}(c)) = f(x) = c\,,$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(c) = x\,.$$

<u>Achtung:</u> $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

Man kann zeigen, dass $\left(f^{-1}\right)$ auch stetig ist. (Der Beweis folgt aus der Definition und dem Cauchy-Kriterium der Stetigkeit).

Beispiel 2.23 *$\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}_0^+$; $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = x^n$ auf $\mathbb{R}_0^+$.*

Betrachten wir nun Funktionen von mehreren Variablen:

$$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

Beispiel 2.24 $h(\alpha,d) = d \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ}\right)$

Wir definieren ganz analog zum Fall nur einer Variablen:

f ist *stetig* in (x,y), falls für alle Folgen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt:

$$f(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x,y)$$

Wenn (x,y) nicht zum Definitionsbereich von f gehört, aber für alle Folgen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ existiert und den gleichen Wert hat, so nennt man f an der Stelle (x,y) stetig ergänzbar.

Beispiele 2.25

- *$h(\alpha,d)$ ist stetig.*

- $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$ *ist auf seinem gesamten Definitionsbereich stetig. Im Punkt* $(0,0)$ *ist die Funktion* nicht *stetig ergänzbar.*

- $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ *ist ebenfalls auf seinem Definitionsbereich stetig, aber für* $y = 0$ *nicht stetig ergänzbar. (Achtung:* $x \mapsto f(x,x)$ *ist jedoch auf ganz* $\mathbb{R}$ *stetig ergänzbar.)*

Ein Beispiel für die Veranschaulichung von Funktionen von mehreren Variablen finden Sie in Aufgabe 2.3 und in Aufgabe 2.31.

2.3 Differenzierbarkeit

Betrachten wir nun den Begriff der Differenzierbarkeit:

Definition 2.26 *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* differenzierbar *in* $x \in D$*, wenn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Wir schreiben

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oder für $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ *auch* $\frac{df}{dx}$*, bzw. für* $f : D \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ *auch* $\dot{f}$*.*
Wir nennen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, falls sie in allen* $x \in D$ *differenzierbar ist. Mit* $f' : D \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$ *bezeichnen wir die Ableitungsfunktion oder Ableitung von* f *auf* D*.*

Bemerkung 2.27 *Es muss mindestens eine Folge* $(h_k)_k$ *geben mit* $h_k \to 0$ *und* $h_k \neq 0$*, so dass* $x + h_k \in D$ *für alle* k *gilt!*

Beispiele 2.28

- $f(x) = c$, $f'(x) = 0$
- $f(x) = mx + b$, $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + b - mx - b}{h} = \frac{mh}{h} = m$

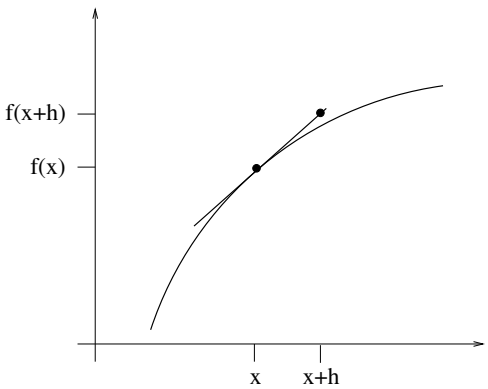
- $f(x) = x^2$,
  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{2hx+h^2}{h} = 2x+h \xrightarrow{h\to 0} 2x$
  $\Rightarrow f'(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$,
  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \xrightarrow{h\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
  $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *für* $x \neq 0$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 2.2.

Satz 2.29 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt x differenzierbar, wenn eine Zahl a und eine Funktion $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren mit*

$$f(x+h) = f(x) + ah + o(h) \quad \text{und} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

D.h. f ist an der Stelle x durch eine affine Funktion $(x+h \mapsto f(x)+ah)$ bis auf einen Term höherer Ordung $o(h)$ (bei glatten Funktionen gilt $o(h) \leq Ch^2 \rightsquigarrow \dfrac{o(h)}{h} \leq Ch \to 0$) approximierbar:



Nachweis der Äquivalenz der Ableitungsbegriffe aus Definition 2.26 und Satz 2.29:

Für irgendein $a \in \mathbb{R}$ definiert man $o(h) := f(x+h) - f(x) - ha$. Also muss

$$\frac{o(h)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a$$

für $h \to 0$ gegen 0 konvergieren. Dies gilt genau dann, wenn f differenzierbar ist, denn dann konvergiert der Differenzenquotient, und wenn außerdem $a = f'(x)$.

□

Ein Beispiel für diesen Zusammenhang findet sich in Beispiel 2.13.

Folgerung 2.30 *Falls eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in D$ ist, so ist f stetig in x.*

<u>denn:</u> $|f(y) - f(x)| \overset{h:=y-x}{=} |f(x+h) - f(x)| = |ah + o(h)| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$

Übung 2.26 enthält weitere Betrachtungen zu Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Regeln für das Differenzieren: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann folgt:

(i) $f+g$ differenzierbar auf D : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ii) fg differenzierbar auf D : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)

(iii) $\frac{f}{g}$ differenzierbar auf $D \backslash N_g$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

(iv) $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(D) \subset E$, dann folgt:

$g \circ f$ differenzierbar auf D : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$ (Kettenregel)

Beweis:

zu (i)
$$\begin{aligned}
\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&\to f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

zu (ii)
$$\begin{aligned}
\frac{(f(x+h)g(x+h)) - (f(x)g(x))}{h} &= \frac{f(x+h)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{-g(x)}{h} \\
&\quad \underbrace{- \frac{f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)}{h}}_{=0} \\
&= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} \\
&\quad + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \\
&\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass g stetig ist, da g differenzierbar ist.

zu (iii) Betrachten wir zunächst $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$, d.h. $f = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) &= \underbrace{\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}_{\to -g'(x)} \underbrace{\frac{1}{g(x+h)g(x)}}_{\to \frac{1}{g^2(x)}} \\
&\to -\frac{g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &\overset{\text{nach (ii)}}{=} f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

zu (iv)

$$\begin{aligned}
\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\quad \text{setze: } y = f(x), z = f(x+h) - f(x) \\
&= \underbrace{\frac{g(y+z) - g(y)}{z}}_{\xrightarrow{z\to 0} g'(y)} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(x)} \\
&\to g'(f(x))\, f'(x)
\end{aligned}$$

Da f differenzierbar folgt aus $f'(x) \neq 0$, dass für h klein genug $f(x+h) - f(x) \neq 0$. In diesem Fall ist die obige Argumentation zulässig, da wir annehmen können, dass $f(x+h) - f(x) \neq 0$ für $h \to 0$. Wenn $f'(x) = 0$, dann gilt die obige Argumentation für $h \to 0$ und $f(x+h) - f(x) \neq 0$. Für $f(x+h) - f(x) = 0$ ist die Aussage offensichtlich, da dann bereits $g(f(x+h)) - g(f(x)) = 0 = g'(f(x))f'(x)$.

□

Beispiele für die Anwendung der Differentiationsregeln finden Sie in Übung 2.12 und 2.34, eine Verallgemeinerung der Produktregel in Übung 2.20.

Beispiele 2.31 (Anwendungen)

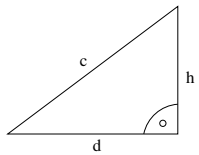
- *Wie ändert sich das Volumen einer Kugel, deren Radius um 1% geändert wird?*

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2$$

$$\begin{aligned}\frac{V(r+0.01r)-V(r)}{V(r)} &= \frac{(4\pi r^2)0.01r+o(r)}{V(r)}\\ &= \frac{4\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}0.01+\frac{o(r)}{V(r)}\\ &= 0.03+\frac{o(r)}{V(r)}\end{aligned}$$

D.h. die relative Volumenänderung liegt bei 3% bis auf Terme höherer Ordnung. Im Fall von $r=1$ erhalten wir durch direktes Nachrechnen $\frac{V(1.01)-V(1)}{V(1)}=0.030301=$ 3.0301%.

- *Wie sensitiv hängt h bei festem c von d ab?*



$$\begin{aligned}h(d) &= \sqrt{c^2-d^2}\\ h(d) &= g(f(d)) \text{ mit } g(y)=\sqrt{y}, f(d)=c^2-d^2\\ h'(d) &= g'(f(d))f'(d)\\ &= \frac{-2d}{2\sqrt{c^2-d^2}}=-\frac{d}{\sqrt{c^2-d^2}}\\ \frac{h(d+\delta)-h(d)}{h(d)} &= -\frac{d\delta}{\sqrt{c^2-d^2}}\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}+\frac{o(\delta)}{h(d)}=-\frac{d\delta}{c^2-d^2}+\frac{o(\delta)}{h(d)}.\end{aligned}$$

<u>Extreme:</u>
$d=0$: keine Sensitivität
$d=c$: „∞“Sensitivität

Beispiele 2.32 (nicht differenzierbare Funktionen, nicht stetige Ableitung)

- *$f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$; $x\mapsto\sqrt{x}$ ist nicht differenzierbar in $x=0$, denn*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$

- *Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=|x|$ nicht differenzierbar in $x=0$:*

$$\begin{aligned}h>0: &\quad \frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{h}{h}=1\\ h<0: &\quad \frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{-h}{h}=-1\end{aligned}$$

D.h. es existiert kein eindeutiger Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$ und damit ist f nicht differenzierbar in $x=0$.
Also: *aus Stetigkeit folgt <u>nicht</u> die Differenzierbarkeit!*

- *Es gibt Funktionen, die überall differenzierbar sind, deren Ableitungsfunktion aber nicht stetig ist. Ein Beispiel ist die folgende Funktion:*

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & ; t=0 \\ t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right); & \textit{sonst} \end{cases} \\ & \textit{benutze: } (\sin(x))' = \cos(x) \\ \textit{für } t \neq 0 \textit{ gilt } : f'(t) &= 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) + t^2 \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) \\ &= 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

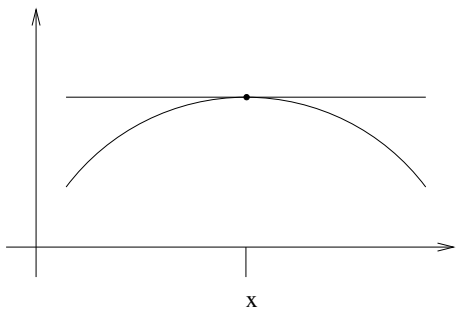
D.h. f ist zunächst auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar. Ist f in der Null differenzierbar?

$$f'(0) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2}{h} \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0 \xrightarrow{h \to 0} 0$$

D.h. $f'(0) = 0$.
<u>Achtung:</u> $f'(t) = \underbrace{2t \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\textit{konv. nicht}}$ konvergiert nicht für $t \to 0$. D.h. die Ableitungsfunktion ist nicht stetig.

Satz 2.33 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, der Punkt x liege im Inneren von D und x sei ein* lokales Maximum *(bzw.* Minimum*) der Funktion f, d.h. es gibt eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$, so dass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in U_\varepsilon(x) \cap D$, dann gilt:*

$$f'(x) = 0$$



Beweis: Betrachte den Fall eines lokalen Maximums. Dann gilt $f(x+h) \leq f(x)$ für kleines h, also

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \begin{cases} \geq 0, \text{ falls } h<0, \\ \leq 0, \text{ falls } h>0; \end{cases} \\ \text{also} \quad & f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \\ \text{sowie} \quad & f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0, \end{aligned}$$

(denn da x im Inneren von D liegt können wir h sowohl positiv als auch negativ wählen) damit gilt aber $f'(x) = 0$. Den Fall des lokalen Minimums beweist man analog.

□

Beachten Sie, dass f an der Maximal- bzw. Minimalstelle differenzierbar sein muss und diese im Inneren des betrachteten Bereichs liegen muss, damit der Satz anwendbar ist. Extrema am Rand des Definitionsbereichs und in Punkten, in denen f nicht differenzierbar ist, müssen Sie durch andere Betrachtungen finden. Beispiele dafür finden Sie in Aufgabe 2.14 sowie 2.16.

Satz 2.34 (Rolle) *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

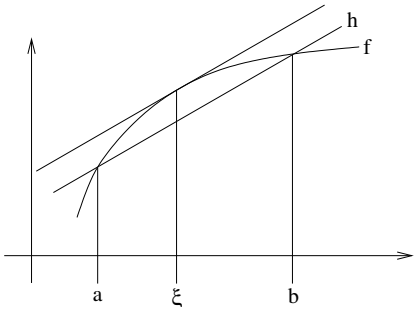
Beweis: Als stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall nimmt f ihr Maximum und Minimum an. Falls beide am Rand (also in einem der Punkte a oder b) angenommen werden, so sind Maximum und Minimum gleich, die Funktion also konstant. Dann gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b)$. Andernfalls wird das Maximum oder das Minimum im Innern, also für ein $\xi \in (a,b)$ angenommen ($\xi \neq a$ und $\xi \neq b$). Dann folgt mit dem vorangehenden Satz $f'(\xi) = 0$.

□

Ein Anwendung des Satzes von Rolle ist Aufgabe 2.21 sowie Aufgabe 2.16.

Satz 2.35 (Mittelwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gibt es $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Definiere} \quad h(x) &:= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\ \text{und} \quad g(x) &:= f(x) - h(x), \\ \Rightarrow \quad & \quad g(a) = g(b) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle 2.34 gibt es dann ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Eine Anwendung des Mittelwertsatzes finden Sie in Aufgabe 2.15 sowie in Aufgabe 2.16. Übung 2.35 enthält weitere Eigenschaften stetiger und differenzierbarer Funktionen.

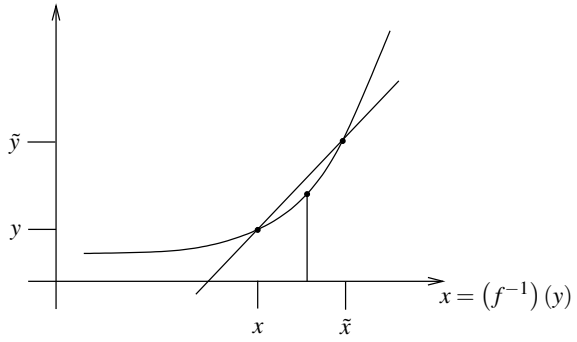
Differentiationsregel für die Umkehrfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $f' > 0$ (insbesondere ist also f strikt monoton, was man zum Beispiel mit dem Mittelwertsatz einsehen kann), dann gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{mit } y = f(x).$$

Beweis:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \xleftarrow{\tilde{y}\to y} \frac{\left(f^{-1}\right)(\tilde{y}) - \left(f^{-1}\right)(y)}{\tilde{y}-y} = \frac{\tilde{x}-x}{\tilde{y}-y} \quad = \quad \frac{\tilde{x}-x}{f(\tilde{x})-f(x)} \xrightarrow{\tilde{x}\to x} \frac{1}{f'(x)},$$

wobei $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. Die beiden Grenzübergänge $\tilde{y} \to y$ und $\tilde{x} \to x$ sind äquivalent (d.h. $\tilde{x} \to x$ gilt genau dann, wenn $\tilde{y} \to y$), da f und f^{-1} stetig sind.



□

Beispiele 2.36
(i) Betrachte auf $\mathbb{R}^+$ *die Funktion:*

$$f(x) := x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

(Vgl. Herleitung zur Ableitung der Wurzelfunktion weiter oben in Beispiel 2.28.)

(ii) Betrachte auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *die Funktion:*

$$f(x) = \frac{1}{x} = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y} =: g(y)$$
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{-1} = -x^2 = -\frac{1}{y^2}.$$

Betrachte nun Funktionen von mehreren Variablen:

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

Definition 2.37 *f heißt* richtungsdifferenzierbar*, wenn f bezüglich jeder Variablen (x,y,z) differenzierbar ist. Diese Ableitungen heißen* Richtungsableitungen *oder* partielle Ableitungen . *Wir schreiben:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}
\end{aligned}$$

Erinnern wir uns an das Motivationskapitel (Beispiel 0.1):

$$\begin{aligned} f(x+\delta_x, y+\delta_y, z+\delta_z) - f(x,y,z) &= f(x+\delta_x, y+\delta_y, z+\delta_z) - f(x, y+\delta_y, z+\delta_z) \\ &\quad + f(x, y+\delta_y, z+\delta_z) - f(x,y,z+\delta_z) \\ &\quad + f(x,y,z+\delta_z) - f(x,y,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{[\text{Def}]}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\delta_y, z+\delta_z)\delta_x + o_x(\delta_x) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z+\delta_z)\delta_y + o_y(\delta_y) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\delta_z + o_z(\delta_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\delta_z \\ &\quad + o(\delta_x, \delta_y, \delta_z) \\ &\quad \text{falls } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetige Funktionen} \\ &\quad \text{mit } \frac{o(\delta_x, \delta_y, \delta_z)}{|\delta_x| + |\delta_y| + |\delta_z|} \overset{\delta_x, \delta_y, \delta_z \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

<u>Erinnern wir uns:</u> $f(x+h) = \underbrace{f(x) + ah}_{\text{affine Funktion}} + o(h)$ (s. 2.29)

Hier spielt nun

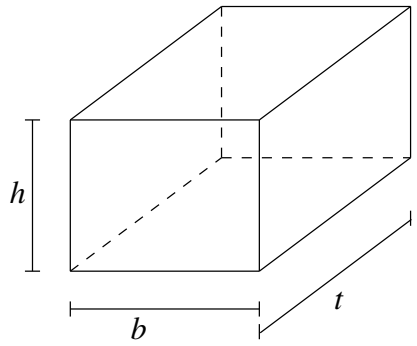
$$f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\delta_z$$

die Rolle einer affinen Abbildung (vgl. Kapitel über lineare Abbildungen).
Wir schreiben auch

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

für den Zeilenvektor der Richtungsableitungen, das Symbol ∇ wird „Nabla“ gesprochen.

Beispiele 2.38
(i) Volumen eines Quaders:



$$\begin{aligned} v(t,b,h) &= tbh, \\ \nabla v &= \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial b}, \frac{\partial v}{\partial h}\right) \\ &= (bh, th, tb). \end{aligned}$$

Falls man also t um δ_t erhöht, so erhöht sich das Volumen um $(bh)\,\delta_t$ (dies gibt hier sogar exakt und nicht nur bis auf Terme höherer Ordnung).

Wie ändert sich nun das Volumen des Quaders, wenn man alle drei Richtungen um 1% vergrößert?

$$\begin{aligned} &\frac{v(t+0.01t, b+0.01b, h+0.01h) - v(t,b,h)}{v(t,b,h)} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(t,b,h)0.01t + \frac{\partial v}{\partial b}(t,b,h)0.01b + \frac{\partial v}{\partial h}(t,b,h)0.01h + o(0.01t, 0.01b, 0.01h)}{v(t,b,h)} \\ &= \frac{bh \cdot 0.01t + th \cdot 0.01b + tb \cdot 0.01h + o(0.01t, 0.01b, 0.01h)}{tbh} \\ &= 0.03 + \frac{o(0.01t, 0.01b, 0.01h)}{tbh} \end{aligned}$$

Bis auf Terme höherer Ordnung vergrößert sich das Volumen also um 3%, wenn man alle drei Seiten um 1% verlängert. Das Verhalten ist also das selbe wie bei der Kugel aus Beispiel 2.31.

(ii) Oberfläche des Quaders:

$$\begin{aligned} &f(t,b,h) = 2(hb + tb + th), \\ &\nabla f = (2(b+h), 2(h+t), 2(b+t)), \\ &d.h.\ f(t, b+\delta_b, h) = f(t,b,h) + 2(h+t)\delta_b + o_b(\delta_b). \end{aligned}$$

Falls man also b um δ_b erhöht, so erhöht sich die Oberfläche um $2(h+t)\,\delta_b$. (auch hier gilt dies sogar exakt und nicht nur bis auf Terme höherer Ordnung).

Wie ändert sich die Oberfläche des Quaders, wenn man alle drei Richtungen um 1% vergrößert?

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(t+0.01t,b+0.01b,h+0.01h)-f(t,b,h)}{f(t,b,h)}\\
&=\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t,b,h)0.01t+\frac{\partial f}{\partial b}(t,b,h)0.01b+\frac{\partial f}{\partial h}(t,b,h)0.01h+o(0.01t,0.01b,0.01h)}{f(t,b,h)}\\
&=\frac{2(b+h)\cdot 0.01t+2(h+t)\cdot 0.01b+2(b+t)\cdot 0.01h+o(0.01t,0.01b,0.01h)}{2(hb+tb+th)}\\
&=0.01\frac{bt+ht+hb+tb+bh+th}{(hb+tb+th)}+\frac{o(0.01t,0.01b,0.01h)}{2(hb+tb+th)}\\
&=0.02+\frac{o(0.01t,0.01b,0.01h)}{2(hb+tb+th)}
\end{aligned}
$$

Im Gegensatz zum Volumen ändert sich die Oberfläche also nur um 2%.

Weitere Beispiele für das Arbeiten mit partiellen Ableitungen finden Sie in den Übungen 2.24, 2.17, 2.5 und 2.31.

2.4 Potenzreihen

Im Folgenden wollen wir uns mit speziellen Funktionen beschäftigen, die über Reihen (sogenannte *Potenzreihen*) dargestellt werden können:

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^k}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}+\ldots && (6)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. && (7)
\end{aligned}
$$

Hierbei verwenden wir die *Fakultät*:

$$0! := 1, \qquad (k+1)! := (k!)\,(k+1),$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$k!$	1	1	2	6	24	120	720

Fragen:

- Ist diese Reihe wohldefiniert, d.h. gibt es den Grenzwert für alle $x \in \mathbb{R}$? (Bzw. für welche x existiert der Grenzwert?)
- Ist die so definierte Funktion stetig?
- Ist die Funktion differenzierbar und was ist ihre Ableitung?

Weitere Potenzreihen:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{8}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{9}$$

<u>Erinnerung:</u> Geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $0 \leq q < 1$,

Grundsätzlich bezeichnen wir jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ (eine *Folge von Partialsummen*) als *Reihe*, die Summanden c_k bezeichnet man als *Glieder* der Reihe.
Nach dieser Definition gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow |a_m - a_{n-1}| = \left|\sum\limits_{k=n}^{m} c_k\right| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Betrachten wir zunächst einige Konvergenzaussagen zu Reihen, die wir für Potenzreihen dann verwenden wollen.

Lemma 2.39 *Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis: Beweis erfolgt mit dem Satz über konvergente monotone Folgen.

□

Definition 2.40 *Eine Reihe* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ *heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |c_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Lemma 2.41 *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} c_k\right| \overset{Dreiecksungl.}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |c_k| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{aufgrund absoluter Konvergenz,}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right)_n \text{ ist Cauchyfolge } \overset{Vollst.axiom}{\Rightarrow} \text{die Reihe konvergiert.}$$

□

Satz 2.42 (Majorantenkriterium) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\right)_n$ *sei konvergent, es sei* $N \in \mathbb{N}_0$ *und es gelte* $|b_k| \leq c_k$ *für alle* $k \geq N$, *dann ist die Reihe* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)_n$ *absolut konvergent.*

Beweis:

$$\left|\sum_{k=n}^{m}|b_k|\right| \leq \left|\sum_{k=n}^{m} c_k\right| \longrightarrow 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_n \text{ konvergiert absolut.}$$

□

Beispiele 2.43 (konvergente und divergente Reihen)

- $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ *konvergiert, denn*

$$\begin{aligned} a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \\ &< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n} < 2. \quad \textit{(Teleskopsumme)} \end{aligned}$$

  Also ist a_n beschränkt und monoton $\Rightarrow a_n$ konvergiert.

- $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_n$ *konvergiert absolut für $\alpha \geq 2$, denn*
  $b_k = \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} =: c_k$ *und* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ *konvergiert.*

- $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$ *(die* harmonische Reihe*) konvergiert nicht, wie bereits gezeigt, denn*

$$\begin{aligned} a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n} \\ &= 1+\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{2}+ \qquad \ldots+\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

  Die Reihenglieder von Index $k = 2^j+1$ bis $k = 2^{j+1}$ addieren sich also für jedes $j \in \mathbb{N}$ zu einer Zahl größer als $\frac{1}{2}$, damit ist die Reihe unbeschränkt und konvergiert daher nicht.

- *Insgesamt kann man zeigen, dass* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_n$ *genau dann konvergiert, wenn* $\alpha > 1$. *(Den Fall* $1 < \alpha < 2$ *haben wir hier nicht betrachtet. Man kann dies analog zu Aufgabe 6.8 beweisen.)*

Weitere Beispiele finden Sie in Übung 2.18.

Satz 2.44 (Quotientenkriterium) $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ *sei eine Reihe und* $N \in \mathbb{N}_0$, *so dass* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq N$ *und* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ *für ein* $q < 1$ *und alle* $k \geq N$, *dann konvergiert die Reihe absolut.*

Beweis: (i) Wir betrachten zunächst den Fall $N = 0$:

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| \leq q|a_k| &\underbrace{\leq}_{|a_k| \leq q|a_{k-1}|} q^2|a_{k-1}| \leq q^3|a_{k-2}| \leq \ldots \leq q^{k+1}|a_0| \\ \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} |a_k| &\leq |a_0| \sum_{k=0}^{n} q^k \longrightarrow |a_0| \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die betrachtete Reihe absolut.
(ii) Im allgemeinen Fall gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|\right) + \sum_{k=0}^{n-N} |b_k| \quad \text{mit}\, b_k = a_{k+N}.$$

Dann argumentieren wir weiter wie unter (i).

□

Zur Erinnerung: Wir schreiben $\sum_{k=0}^{\infty} c_k := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right)$, falls der Grenzwert existiert. Zur Vereinfachung schreiben wir auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ anstelle der ursprünglichen Notation für die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right)_n$ zu dieser Reihe.
Betrachten wir nun Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ deren Glieder c_k in einer bestimmten Weise von einer reellen Variable x abhängen: $c_k = a_k x^k$, wobei die a_k für $k = 0, \cdots$ feste Zahlen sind.

Definition 2.45 (Potenzreihen) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *heißt* Potenzreihe.

Beispiel 2.46 $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *ist eine konvergente Potenzreihe für* $|x| < 1$ *(geometrische Reihe, siehe S. 24). Hier sind die Koeffizienten* $a_k = 1$.

Lemma 2.47 *Konvergiert eine Potenzreihe für eine Zahl* $x_0 \neq 0$*, dann konvergiert sie für alle* x *mit* $|x| < |x_0|$ *absolut.*

Beweis:

$$\begin{aligned} |a_k x^k| &= \underbrace{|a_k x_0^k|}_{\leq M} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \leq M q^k \\ &\quad \text{da } a_n x_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\text{einfachste Partialsumme } \sum_{k=n}^{n} a_k x_0^k\right). \end{aligned}$$

Damit ist das Majorantenkriterium anwendbar:

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k x^k| \leq M \sum_{k=m}^{n} q^k \overset{m,k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

Definieren wir nun Funktionen über Potenzreihen, die wir zu Beginn dieses Abschnitts schon kurz diskutiert haben.

Definition 2.48 (Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen)

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \sin(x) &:= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &:= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Zu zeigen: Die Potenzreihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$. Hierzu untersuchen wir das Quotientenkriterium für die Exponentialreihe:

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \leq q < 1, \quad \text{falls } n \geq N := \left\lceil \frac{|x|}{q} \right\rceil - 1,$$

d.h. es gibt für jedes x ein solches N. Der Nachweis für die Reihen sin und cos erfolgt mit dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der Exponentialreihe. Einen alternativen Beweis führen Sie in Aufgabe 2.23.

Definition 2.49 (Konvergenzradius)

$$r = \sup\left\{ |x| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \textit{ konvergiert (absolut)} \right\}$$

Aufgrund von Lemma 2.47 ist dann klar, dass die Reihe auf dem Intervall $(-r,r)$ absolut konvergiert. Für $|x| > r$ konvergiert sie keinesfalls (denn sonst wäre der Konvergenzradius größer), für $x = \pm r$ kann man keine allgemeine Aussage treffen.

Satz 2.50 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen) *Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist die Funktion $f : (-r,r) \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

d.h. Potenzreihen werden gliedweise differenziert. Die abgeleitete Reihe hat den gleichen Konvergenzradius.

Beispiele 2.51

- $$\exp'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
  $$= \exp(x)$$
- $$\sin'(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos(x)$$
- $$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad \Rightarrow f'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \overset{n=k-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$$
  $$\textit{Wegen } f(q) = \frac{1}{1-q} \Rightarrow f'(q) = \frac{1}{(1-q)^2},$$
  $$\textit{folgt: } \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$$

Beweis: Betrachte zunächst

$$(x+h)^n = x^n + \underbrace{nx^{n-1}h}_{n\,\text{Kombinationen}} + h^2 R_n(x,h),$$

wobei $R_n(x,h)$ aus Summanden $\alpha_k x^{n-k} h^{k-2}$ mit $k \geq 2$ besteht. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + a_3(x+h)^3 + \ldots \\
&= a_0 + (a_1 x + a_1 h) + (a_2 x^2 + 2a_2 xh + a_2 h^2 R_2(x,h)) \\
&\quad + (a_3 x^3 + 3a_3 x^2 h + a_3 h^2 R_3(x,h)) + \ldots \\
&\overset{\text{umstellen}}{=} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) + (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots)h \\
&\quad + (a_2 R_2(x,h) + a_3 R_3(x,h) + \ldots)h^2 \\
&= Reihe_1 + h\,Reihe_2 + h^2\,Reihe_3
\end{aligned}$$

Solange nun $|x| + |h| < r$ (Konvergenzradius) gilt, konvergiert die Reihe $f(|x| + |h|)$ absolut. Nach dem Majorantenkriterium konvergieren dann aber auch die Reihen $Reihe_i$ absolut für $i = 1,2,3$, was wir wie folgt einsehen:

- Für die Reihe $Reihe_1$ ist dies klar nach Lemma 2.47 da es sich um die Ursprungsreihe handelt.

- Im Falle von Reihe $Reihe_2$ argumentieren wir ähnlich wie in Lemma 2.47 und betrachten für $|x_0| > 0$ die Abschätzung

$$k a_k x^{k-1} \leq (a_k x_0^k x_0^{-1})(k q^{k-1})$$

  für $q = \frac{|x|}{|x_0|}$. Da die Ursprungsreihe für $x = x_0$ konvergiert ist der erste Faktor auf der rechten Seite beschränkt. Das heisst zu zeigen bleibt $kq^{k-1} \leq M\tilde{q}^{k-1}$ für $\tilde{q} < 1$. Hierzu betrachte $r = \frac{1-\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$, womit insbesonders $r > -1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
kq^{k-1} &= k(\sqrt{q})^{k-1}(\sqrt{q})^{k-1} = k\left(\frac{1}{1+r}\right)^{k-1}(\sqrt{q})^{k-1} \\
&\leq \frac{k}{1+(k-1)r}(\sqrt{q})^{k-1}
\end{aligned}$$

  unter Benutzung der Bernoulli-Ungleichung $(1+r)^{k-1} \geq 1 + (k-1)r$. Nun konvergiert aber $\frac{k}{1+(k-1)r}$ gegen $\frac{1}{r}$ und somit gilt $k\left(\frac{1}{1+r}\right)^{k-1} \leq M$ für eine Konstante M. Dann folgt aber schliesslich, dass $kq^{k-1} \leq M\tilde{q}^{k-1}$ für $\tilde{q} := \sqrt{q} < 1$.

- Für die dritte Reihe gilt $Reihe_3 = \frac{1}{h^2}(f(x+h) - Reihe_1 - h\,Reihe_2)$. Da wir schon wissen, dass $Reihe_1$ und $Reihe_2$ absolut konvergieren, konvergiert also auch $Reihe_3$ absolut für fein kleines und festgehaltenes $h \neq 0$.

Offensichtlich gilt $Reihe_1 = f(x)$. Definiere nun $g(x) := Reihe_2$ und $R(x,h) := Reihe_3$, dann haben wir gezeigt, dass $f(x+h) = f(x) + g(x)h + \underbrace{h^2 R(x,h)}_{=:o(x,h)}$.

Falls nun $|R(x,h)| \leq M$ unabhängig von h, folgt $\frac{o(x,h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Damit gilt dann aber wie behauptet

$$f'(x) = g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass $R(x,h)$ für $h \to 0$ beschränkt ist:
Wähle dazu $h_0 > 0$, so dass $|x| + h_0 < r$; dann gilt für $|h| < h_0$ stets $|R(x,h)| \leq \tilde{R}(|x|,h_0)$, wobei $\tilde{R}(.,.)$ aus $R(.,.)$ hervorgeht, in dem man alle a_k durch $|a_k|$ ersetzt. Wir haben schon oben gesehen, dass $Reihe_3$ für $|x| + |h| < r$ absolut konvergiert, also konvergiert $\tilde{R}(|x|,h_0)$. Definiere daher $M := \tilde{R}(|x|,h_0)$. Dann gilt also $|R(x,h)| \leq M$ für genügend kleines h, was ausreicht, da wir nur am Fall $h \to 0$ interessiert sind.

□

Nun wenden wir uns einer genaueren Betrachtung der Exponentialfunktion zu:

Satz 2.52 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(i) Die Exponentialfunktion ist eindeutig bestimmt als differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die

$$f'(x) = f(x) \text{ und } f(0) = 1 \tag{10}$$

gilt. Ferner gelten die folgenden Regeln:

(ii) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

(iii) $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

(iv) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

Beweis:

(iii) Definiere

$$\begin{aligned} & g(x) := \exp(x)\exp(-x) \\ \Rightarrow\ & g'(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0 \\ \Rightarrow\ & g(x) \equiv K,\ g(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow \exp(x)^{-1} = \exp(-x). \end{aligned}$$

(iv) Aus der Reihendefinition folgt $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$.
Für $x < 0$ folgt: $\exp(x) = \exp(\underbrace{-x}_{>0})^{-1} > 0$.

(i) Wir müssen zwei Aussagen nachweisen:

a) $\exp(x)$ ist eine Lösung von (10).

b) Es gibt nur eine Lösung.

ad a) $\exp'(x) = \exp(x)$ (s.o.)
$\exp(0) = 1$ ✓

ad b) Sei f auch eine Lösung, dann gilt

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - \exp'(x)f(x)}{\exp^2(x)} = \frac{f(x)\exp(x) - \exp(x)f(x)}{\exp^2(x)} = 0,$$

falls $\exp(x) \neq 0$ (s. (iv)),
$\Rightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = K$ (konstant). Setzen wir 0 ein, erhalten wir $K = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$,
also gilt $\frac{f(x)}{\exp(x)} = 1$ und damit $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Wähle y fest und definiere

$$\begin{aligned} g(x) &:= \exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) \\ \Rightarrow g'(x) &= \exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) = g(x) \end{aligned}$$

Nach dem Beweis zu (i) folgt $\frac{g(x)}{\exp(x)} \equiv K$, aber $g(0) = \exp(y) - \exp(y) = 0 \Rightarrow K = 0$.
Daraus folgt $g(x) \equiv 0$ und damit die Behauptung.

□

Ähnliche Aussagen für Sinus und Kosinus betrachten Sie in Übung 2.25, für die hyperbolischen Winkelfunktionen in Übung 2.32.

Definition 2.53 (Eulersche Zahl) $e = \exp(1) = 2.718281828\ldots$

Es stellt sich nun die Frage: Gilt $\exp(x) = e^x$?

(i) Zunächst: $\exp(n) = \underbrace{\exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1)}_{n \text{ Faktoren}} = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\exp(-n) = \exp(n)^{-1} = (e^n)^{-1} = e^{-n}$.
Damit gilt $\exp(m) = e^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

(iii) $e^q \overset{q=\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}}{=} (e^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^n}$, d.h. $e^{\frac{n}{m}}$ ist Lösung der Gleichung $x^m = e^n$ (Existenz mit Zwischenwertsatz).

(iv) $e = \exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ Summanden}}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n$, also $e^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$.

(v) $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ Summanden}}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$.

(vi) Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ definieren wir (konsistent zu (i) - (v)):

$$e^x := \exp(x)$$

Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion Es gilt $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Ferner sehen wir ein, dass $\exp(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ da $\exp(x) > 1 + x$ für $x > 0$. Schliesslich gilt noch $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

Aus diesen Eigenschaften folgt direkt:

Es gibt eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (natürlicher Logarithmus) mit

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x)) &= x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \ln(y) &= \left(\exp^{-1}\right)(y) && \text{für alle } y \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Mit der Differentiationsregel für die Umkehrfunktion folgt:

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp(x)} \overset{x=\ln y}{=} \frac{1}{y}$$

Ferner gelten die folgenden Regeln für die Logarithmus-Funktion:

$$\begin{aligned} &\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1 \\ &\ln ab = \ln a + \ln b \\ &\ln(a^n) = n \ln a \\ &\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \end{aligned}$$

<u>Hierzu:</u> Es gibt zu $a, b \in \mathbb{R}^+$ Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a = \exp(x)$, $b = \exp(y)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} &\ln a + \ln b = x + y = \ln \exp(x+y) = \ln\left(\exp(x)\exp(y)\right) = \ln ab \\ &\ln(a^n) = \ln\left(\exp(x)^n\right) = \ln \exp(nx) = nx = n \ln\left(\exp(x)\right) = n \ln(a) \\ &\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\exp(x)^{-1}\right) = \ln\left(\exp(-x)\right) = -x = -\ln\left(\exp(x)\right) = -\ln a. \end{aligned}$$

□

Betrachten wir nun, wie man allgemeine Potenzen und den Logarithmus zu einer allgemeinen Basis:

Definition 2.54

$$\begin{aligned} a^x &:= \exp\left((\ln a)x\right) \quad \textit{für } a > 0 \\ \log_a(y) &:= \frac{\ln y}{\ln a} \end{aligned}$$

Dies ist konsistent zu folgenden schon bekannten Regeln für Potenzen:

- $\exp\left((\ln a)n\right) = \left(\exp(\ln a)\right)^n = a^n$

- $a^{\frac{1}{n}}$ ist definiert als die Zahl b mit $b^n = a$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(b^n) = \ln(a) \\
&\Leftrightarrow n\ln(b) = \ln(a) \\
&\Leftrightarrow \ln(b) = (\ln a)\frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} = b = \exp(\ln(b)) = \exp\left((\ln a)\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Und für den allgemeinen Logarithmus rechnen wir direkt nach:

$$\log_a(a^y) = \frac{\ln(a^y)}{\ln a} = \frac{(\ln a)y}{\ln a} = y.$$

Damit ist nachgewiesen, dass der allgemeine Logarithmus $\log_a(\cdot)$ zur Basis a die Umkehrfunktion der allgemeinen Potenz $a^{(\cdot)}$ mit Basis a ist.

Weiterhin gelten für Potenzen die Regeln:

$$\begin{aligned}
a^x a^y &= a^{x+y} \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
a^x b^x &= (ab)^x
\end{aligned}$$

Und schliesslich erhalten wir auch für $f(x) = a^x$ die Differentiationsregel $f'(x) = \ln(a)a^x$.

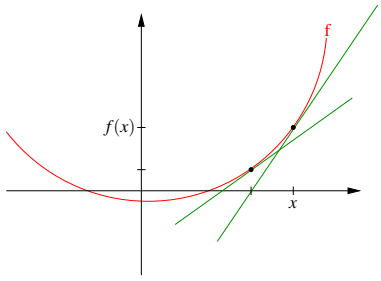
2.5 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Ziel: Nullstellenbestimmung von Funktionen:

Finde $x^* \in \mathbb{R}$, so dass $f(x^*) = 0$.

Ansatz: Für festes x_0 ist: $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ eine affine Approximation an die Funktion f. Hierzu:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \overset{x=x_0+h}{\Longrightarrow} \\
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)
\end{aligned}$$



Statt eine Nullstelle x^* von $f(\cdot)$ zu suchen, fragen wir nun nach einer Nullstelle x von $l(\cdot)$:

$$\begin{aligned} & l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0) \Rightarrow x = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0) \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen können wir wiederholen und daraus ein numerisches Verfahren herleiten:

Schema 2.55 (Newton-Verfahren)

$$\begin{aligned} x_0 & \quad \textit{Startwert} \\ x_{n+1} & = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n) \end{aligned}$$

Beispiel 2.56

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1, \quad f'(x) = 2x \\ x_0 &= 2, \\ x_1 &= 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \\ x_2 &= \frac{5}{4} - \frac{\left(\frac{25}{16} - 1\right)}{\frac{10}{4}} = \frac{5}{4} - \frac{9}{16}\frac{4}{10} = \frac{41}{40} \end{aligned}$$

Iteration: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}$

Wir beobachten $x_n \longrightarrow 1$, *wobei* $f(1) = 0$.

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 2.4.

Eine algorithmische Umsetzung für die Funktion f mit $f(x) = 2(x^2 - 1)^2 - 1$ kann wie folgt aussehen:

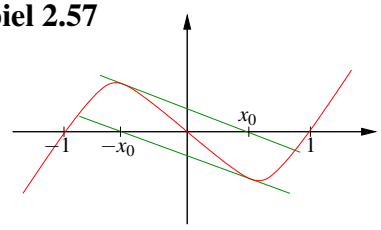
```
function xNew = Newton( x0 )
% Sucht Nullstelle mit dem Newton-Verfahren mit Startwert x0

function f = evaluateF( x )
  f = 2*(x*x-1)*(x*x-1) - 1;
end

function f = evaluateDF( x )
  f = 8*(x*x-1)*x;
end

precision = 1e-3        % Genauigkeit der Nullstelle
xNew = x0
```

```
while abs( evaluateF(xNew) ) > precision
  xNew = xNew - evaluateF( xNew ) / evaluateDF( xNew )
end

end
```

Dabei wird die Iteration beendet, wenn $f(x_n)$ genügend nahe bei Null ist.

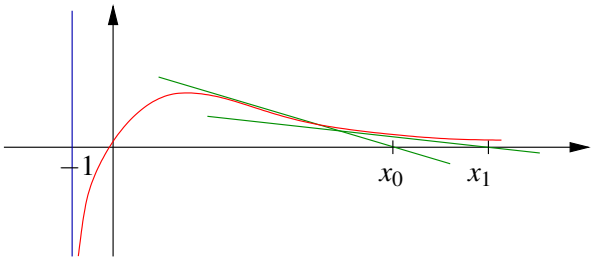
Achtung: Das Newton-Verfahren konvergiert keinesfalls für alle Startwerte x_0, wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiel 2.57

- 

  Betrachte $f(x) = (x^2-1)x$.
  Für den Startwert $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$
  gilt $x_1 = -x_0, x_2 = x_0, x_3 = -x_0, \ldots$

  Für $f(x) = (x^2-2)x+2$ *beobachtet man ein ähnliches Verhalten für alle Startwerte zwischen 0,99 und 1,1.*

- 

  Betrachte $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.
  Dann gilt $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ *falls* $x_0 > 1$.
  (Man zeigt induktiv $x_{k+1} > 2x_k$*.)*

Bemerkung 2.58 *Aber man kann zeigen, dass falls* x_0 *nahe genug an der gesuchten Nullstelle* x^* *liegt,* $f'(x^*) \neq 0$ *und* f' *als Funktion wieder differenzierbar ist, dann konvergiert* x_k *gegen* x^*.

Beispiele für das Newton-Verfahren finden Sie auch in den Aufgaben 2.27 und 2.29 sowie in Aufgabe 2.30.

2.6 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 2.1 Führen Sie die folgende Polynomdivision mit Rest durch, d.h. bestimmen Sie ein Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = q(x)(x+1) + c.$$

Anwesenheitsaufgabe 2.2 Ist $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$ differenzierbar in 0?

Anwesenheitsaufgabe 2.3 Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\},$$

sowie den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Anwesenheitsaufgabe 2.4 Enwerfen Sie ein Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$, das ohne Auswertung der Wurzelfunktion auskommt.

Anwesenheitsaufgabe 2.5 Das Volumen eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche ist gegeben durch

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Dabei ist r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels.
Um wieviel Prozent ändert sich das Volumen V (bis auf Terme höherer Ordnung), wenn r und h um je ein Prozent vergrößert werden?

Anwesenheitsaufgabe 2.6 Betrachten Sie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = \cos(3x)$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = e^{-2x}\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + \frac{3}{40}\sin(3x) - \frac{1}{40}\cos(3x)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Hierbei sind c_1 und c_2 zwei beliebige Konstanten aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2.7 Zeigen Sie, daß eine nichtleere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Infimum hat, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Definieren Sie eine Intervallschachtelung $([k_i, x_i])_{i\in\mathbb{N}}$ mit $[k_{i+1}, x_{i+1}] \subset [k_i, x_i]$ für das Infimum.

b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

c) Zeigen Sie, dass beide gegen denselben Grenzwert konvergieren.

d) Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert das Infimum von M ist.

Aufgabe 2.8 Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

a) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

c) $f(x) = |x-1| + |x+1|$ auf $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ auf $\mathbb{R}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & ,x \leq 2 \\ -\frac{x^3}{4} + 3 & ,x > 2 \end{cases}$ auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 2.9 Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, \qquad \text{b) } g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{x^2 - 5}{(x-1)^2}, \qquad \text{d) } k(x) = \frac{2x - 2}{|2x - 2|}.$$

Aufgabe 2.10 Zeigen Sie, daß jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.
Tipp: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz!

Aufgabe 2.11 Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

a) $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \mid x^2 < 5\}$,

c) $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$.

Welche Mengen haben ein Maximum bzw. ein Minimum? Schreiben Sie die Mengen jeweils als Intervall.

Aufgabe 2.12 Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

a) $p(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$, b) $q(u) = (u^2 - 5)^8$,
c) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, d) $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Aufgabe 2.13 Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2+h)^3 = 2^3 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0\,?$$

Aufgabe 2.14 a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2 - 1)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.
b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 2x|\ ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

Aufgabe 2.15 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und ihre Ableitung f' sei stetig.

i) Zeigen Sie, dass gilt:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = f'(x)\,.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebisses aus i), dass auch
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$$
gilt.

Tipp: Addieren Sie im Zähler $0 = -f(x) + f(x)$.

Bemerkung: Der Differenzenquotient aus i) wird als Rückwärtsdifferenzenquotient bezeichnet, der aus ii) $(\Delta_{2h} f)(x) := \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ als zentraler oder symmetrischer Differenzenquotient von f. Für stetig differenzierbare Funktionen gilt also, dass die Ableitung auch durch den Rückwärts- und den zentralen Differenzenquotienten approximiert wird.

Aufgabe 2.16 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a,b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a,b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.

Aufgabe 2.17 Berechnen Sie $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$ für die Funktion $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z) = R\}$?

Aufgabe 2.18 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n} \quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \quad e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tipp: Zeigen Sie $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 1$

Aufgabe 2.19 $(f_n)_n$ sei rekursiv definiert durch $f_1 = a$, $f_{n+1} = a + f_n^2$ mit $a = \frac{3}{16}$. Wir wollen nun den Grenzwert bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

a) Man berechne die ersten fünf Folgenglieder.

b) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass sie durch $\frac{1}{4}$ nach oben beschränkt ist.

c) Man zeige, dass diese Folge monoton wachsend ist.
Tipp: Zeigen Sie $f_{n+1} - f_n > 0$.

d) Man zeige, dass f_n einen Grenzwert besitzt und berechne diesen.

Aufgabe 2.20 Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Formel (Produktregel für n - Faktoren):

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' &= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \\ &\quad + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n + \ldots \\ &\quad + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \,.\end{aligned}$$

Tipp: Wie lautet die Formel für $n = 3$ und wie kann sie auf den Fall $n = 2$ zurückführen? Der Induktionsschritt im allgemeinen Fall läßt sich dann entsprechend durchführen.

Aufgabe 2.21 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ und $f'(a) = -1$. Zeichnen Sie eine Skizze und zeigen Sie folgendes:

a) Es existiert ein $h > 0$ so dass $f(a+h) < 0$.
Tipp: Verwenden Sie den Satz von Rolle aus der Vorlesung.

b) Es existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Es existiert ein $x_1 \in (a,x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

Aufgabe 2.22 a) Man zeige mittels Zwischenwertsatz, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 4$ drei Nullstellen besitzt.
Man gebe jeweils Intervalle der Länge 1 an, in denen sich die Nullstellen befinden.
Des Weiteren berechnen Sie für das Intervall $I = [1,2]$ 7 Schritte des Bisektionsverfahren zur Näherungsbestimmung einer Nullstelle von f.
b) Man zeige ohne Verwendung eines Taschenrechners, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto g(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 4 + \frac{1}{2}\cos(x)$ mindestens drei Nullstellen besitzt. Man gebe jeweils Intervalle der Länge 1 an, in denen sich die Nullstellen befinden.
Hinweis: Man schätze $\cos(x)$ durch $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ab.

Aufgabe 2.23 Die Sinus-Funktion ist gegeben durch die Reihe

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beweisen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Benutzen Sie für den Beweis das Quotientenkriterium.

Aufgabe 2.24 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ richtungsdifferenzierbar und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ seien bekannt und stetig. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$g(x) = f(x,x)\ .$$

Tipp: Betrachten Sie den Differenzenquotienten von g:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h, x+h) - f(x,x)}{h} = \dots$$

Aufgabe 2.25 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}, \\ \text{und} \quad & \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.) \end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

Aufgabe 2.26 Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Wenn f differenzierbar ist in x_0, so ist auch $|f|$ differenzierbar in x_0.
ja □ nein □

b) Wenn f und g stetig in x_0 sind, so sind auch $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ stetig in x_0. ja □ nein □

c) Wenn fg stetig in x_0 ist, so sind auch f und g stetig in x_0. ja □ nein □

d) Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig.
ja □ nein □

e) Ist f an der Stelle x_0 stetig, so ist f an dieser Stelle auch differenzierbar.
ja □ nein □

Aufgabe 2.27 Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $(n \in \mathbb{N})$.
a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x+6$ im Intervall $[-4,0]$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.
b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0,3]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.
c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ im Intervall $[-3,4]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.

Aufgabe 2.28 Seien zwei Geraden definiert duch

$$G_1 := \{(x,y)|y = 7x\}$$
$$G_2 := \{(x,y)|y = 5x+3\}$$

i) Zeichnen Sie die beiden Geraden.

ii) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

iii) Geben Sie zwei Punkte $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G_2$ an, so dass gilt $(x_1+x_2, y_1+y_2) \notin G_2$.

iv) Zeigen Sie, dass für alle $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G_1$ gilt

$$(x_1+x_2, y_1+y_2) \in G_1 \tag{11}$$
$$(\alpha x_1, \alpha y_1) \in G_1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Aufgabe 2.29

a) Testen Sie das in der Vorlesung vorgestellte Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = 2(x^2-1)^2 - 1$. Finden Sie geeignete Startwerte x_0 um alle vier Nullstellen von f zu finden. Erweitern Sie das Programm, so dass es am Ende die Anzahl der benötigten Iterationsschritte ausgibt. Probieren Sie aus, wie sich die Anzahl an Iterationsschritten verhält, wenn man die Genauigkeit von 10^{-3} auf 10^{-6}, 10^{-9} bzw. 10^{-12} erhöht.

b) Verändern Sie das Newton-Verfahren, so dass es die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ sucht. Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Startwerten (z.B. nahe bei Null) und stellen Sie fest, ob das in der Vorlesung beschriebene Problem auftritt.

c) Ergänzen Sie das Verfahren, so dass es mit einer Fehlermeldung abbricht, wenn die Ableitung von f betragsmäßig kleiner als ε ist. Wählen Sie ε in derselben Größenordnung wie die Genauigkeit. Testen Sie das Verfahren anhand von $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} + 1$ mit verschiedenen Startwerten.
Tipp: In Matlab können Sie wie folgt Text ausgeben:
```
disp('Hallo!');
```

Aufgabe 2.30

a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion f. Geben Sie das Newton-Verfahren an, mit dem man Nullstellen der Funktion f approximieren kann.

b) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, die dazu führen, dass die Bestimmung von Nullstellen über das Newton-Verfahren nicht funktioniert.

Aufgabe 2.31 Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla f(u,v,w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) \right)$$

der Funktion

$$f(u,v,w) = \sqrt{(u-1)^2 + (v-3)^2 + (w-5)^2}\,.$$

Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen

$$\{(u,v,w) \mid f(u,v,w) = R\}\ ?$$

Aufgabe 2.32 Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ &\text{c)} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

Aufgabe 2.33 Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x}\,, \text{ b) } g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}\,, \text{ c) } h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\,?$$

Aufgabe 2.34 Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad f(x) = x^2 \tan x = x^2 \frac{\sin x}{\cos x}\,, \\ &\text{b)} \quad g(x) = (e^x + e^{-x})^5\,, \\ &\text{c)} \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ \text{ für } x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.35 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist beschränkt. ja □ nein □

b) Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ sei monoton wachsend und (b_n) in $\mathbb{R}$ monoton fallend, und es gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind (a_n) und (b_n) konvergent. ja □ nein □

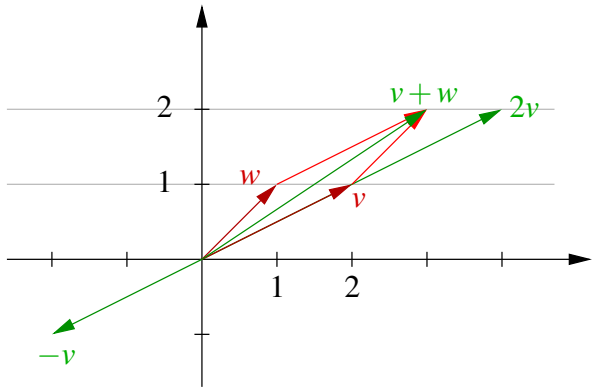
c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$. ja □ nein □

d) Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig. ja □ nein □

e) Ist f an der Stelle x_0 stetig, so ist f an dieser Stelle auch differenzierbar. ja □ nein □

3 Vektorräume

Motivation: Vektoren in der Ebene



$v = (2,1)$ oder auch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geschrieben

$2v = (2\cdot 2, 2\cdot 1)$,

$-v = (-2,-1)$

$w = (1,1)$,

$v+w = (2,1)+(1,1) = (3,2)$

3.1 Vektorräume und Untervektorräume

Betrachten wir nun zunächst die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und dann anschliessend wesentlich allgemeiner und axiomatisch aufgebaut das Konzept von Vektorräumen:

Definition 3.1

- *Ein* Vektor *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Anordnung von n reellen Zahlen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Wir definieren eine Addition für zwei Vektoren im* $\mathbb{R}^n$*:*
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$
- *und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*
  $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Notation 3.2

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *schreiben wir auch als* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- *Die* x_i *für* $i = 1, \ldots, n$ *nennen wir* Komponenten *oder* Koordinaten.
- *Wir schreiben auch* $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$ *oder einfach* $(x_i)_i$.

Regeln: Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & (x+y)+z = x+(y+z) \\
(A2) & x+y = y+x \\
(A3) & x+(0,\dots,0) = x; \quad \text{wir schreiben } 0 = (0,\dots,0) \\
(A4) & x+(-x_1,-x_2,\dots,-x_n) = 0; \quad \text{wir schreiben } -x = (-x_1,-x_2,\dots,-x_n) \\
(S1) & \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\
(S2) & 1x = x \\
(D1) & \alpha(x+y) = (\alpha x)+(\alpha y) \\
(D2) & (\alpha+\beta)x = (\alpha x)+(\beta x)
\end{array}
$$

Die Beziehungen $0x = 0$ und $-1x = -x$ kann man aus den obigen Regeln folgern.
Achtung: Wir verwenden sowohl für die Addition von Skalaren als auch für die Addition von Vektoren das Zeichen $+$, außerdem wird die Multiplikation zweier Skalare genauso wie die eines Skalars mit einem Vektor geschrieben. In den obigen Regeln müssen Sie sich stets klar machen, welchen „plus“ und welches „mal“ gemeint ist. Beispielsweise werden in $(D2)$ auf der linken Seite die beiden Skalare α und β addiert, auf der rechten Seite die beiden Vektoren αx und βx.

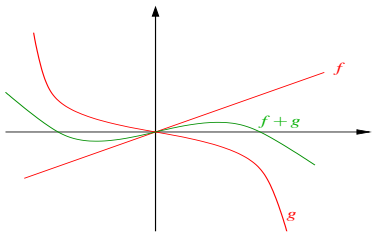
Beachte: Der $\mathbb{R}^n$ ist nicht der einzige Raum von Vektoren!

Betrachten wir nun beispielsweise alle Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x),$$

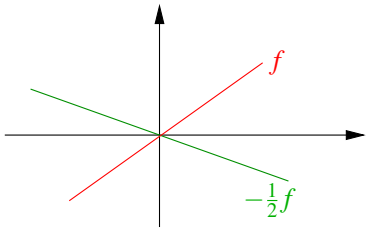
dann können wir definieren, was die Summe $(g+f)$ zweier Funktionen g, f ist:

$$(g+f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)+f(x)$$



Ferner definieren wir die Funktion (αf) für $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Funktion f:

$$(\alpha f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha f(x)$$



Achtung: Wir sprechen hier von der ganzen Funktion und nicht von ihrer Auswertung an einer bestimmten Stelle. Offensichtlich gelten die gleichen Regeln wie im $\mathbb{R}^n$. Hierbei wird vereinbart, dass $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 0$; $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto -f(x)$.

Definition 3.3 (Axiome eines Vektorraums) *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, dann ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Menge V mit zwei Verknüpfungen $+ : V \times V \to V; \quad (x,y) \mapsto x+y$ und $* : \mathbb{K} \times V \to V; \quad (\alpha,x) \mapsto \alpha x$, für die die folgenden Axiome erfüllt sind:*

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & (x+y)+z = x+(y+z) \quad \textit{für alle } x,y,z \in V \\
(A2) & x+y = y+x \quad \textit{für alle } x,y \in V \\
(A3) & \textit{Es gibt ein Element } 0 \in V, \textit{ so dass } x+0 = x \\
(A4) & \textit{Zu jedem } x \in V \textit{ gibt es ein } (-x) \in V, \textit{ so dass } x+(-x) = 0 \\
(S1) & \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \textit{für alle } \alpha,\beta \in \mathbb{K} \textit{ und } x \in V \\
(S2) & 1x = x \quad \textit{für die } 1 \in \mathbb{K} \textit{ und alle } x \in V \\
(D1) & \alpha(x+y) = (\alpha x)+(\alpha y) \quad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{K} \textit{ und alle } x,y \in V \\
(D2) & (\alpha+\beta)x = (\alpha x)+(\beta x) \quad \textit{für alle } \alpha,\beta \in \mathbb{K} \textit{ und alle } x \in V
\end{array}
$$

Für jede natürliche Zahl n ist $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, ebenso wie die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wenn der zugrundeliegende Körper klar ist (oder keine Rolle spielt), sagt man auch einfach „Vektorraum“. Weitere Vektorräume finden Sie in Übung 3.8.

<u>Ein weiteres Beispiel:</u>

$V = \{x \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 3x_2 = 0\}, \quad +,*$ seien wie im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert.

Frage: Ist V ein Vektorraum?
Dazu ist zu zeigen, dass für $x,y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $x+y \in V$, $\alpha x \in V$

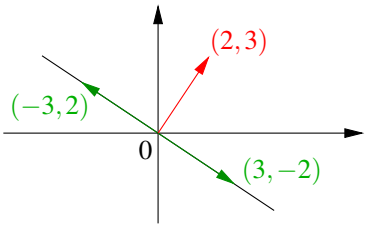
$$
\begin{aligned}
\text{Hierzu:} \quad & x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2) \\
& 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2) = \underbrace{(2x_1+3x_2)}_{=0} + \underbrace{(2y_1+3y_2)}_{=0} = 0 \\
& \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2) \\
& 2(\alpha x_1)+3(\alpha x_2) = \alpha \underbrace{(2x1+3x_2)}_{=0} = 0.
\end{aligned}
$$

Die Rechenregeln (A1), (A2), (S1), (S2), (D1) und (D2) gelten automatisch, da die Verknüpfungen $+,*$ diejenigen aus $\mathbb{R}^2$ sind. (A3) $0 \in V$ und (A4) $-x \in V$ folgen (da $0 = 0x$ und $-x = -1x$) daraus, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (also insbesondere $\alpha = 0$ und $\alpha = -1$) gilt, dass $\alpha x \in V$.

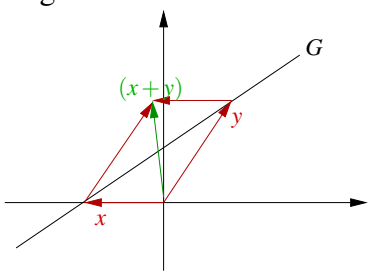
□

Die geometrische Interpretation dieses Vektorraums ist die folgende:

Es sind z.B. $(3,-2)$, $(-3,2)$, $0 \in V$.
V ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch 0 läuft.



Frage: Sind alle Geraden G im $\mathbb{R}^2$ Vektorräume?



Betrachte die links abgebildete Gerade G, die nicht durch 0 läuft. Hier gilt: $x, y \in G$, aber $x + y \notin G$.

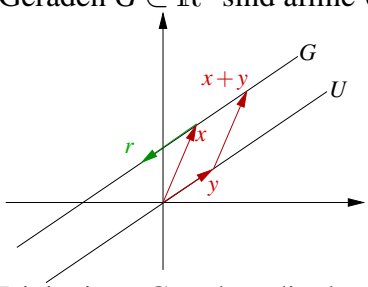
Definition 3.4 *Sei V ein Vektorraum, dann heißt eine Untermenge $U \subset V$* (linearer) Unterraum *(oder Untervektorraum) von V, falls U mit denselben Verknüpfungen wie V auch wieder ein Vektorraum ist.*
Für einen Unterraum U von V und $x \in V$ bildet

$$G = x + U := \{x + y \,|\, y \in U\}$$

einen affinen Unterraum. *Achtung: Ein affiner Unterraum ist im Allgemeinen kein linearer Unterraum.*

Zurück zu unserem Beispiel:

Geraden $G \subset \mathbb{R}^2$ sind affine Unterräume.



$$G = \{x + y \,|\, y \in U\} = \{x + tr \,|\, t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $r \in U$ und $r \neq 0$.
r heißt *Richtungsvektor*.

Diejenigen Geraden, die durch den Ursprung verlaufen, sind zusätzlich auch Untervektorräume. Sie haben eine Darstellung der Form $U = \{tr | t \in \mathbb{R}\}$ für ein $r \in \mathbb{R}^2, r \neq 0$. Weitere Beispiele für Untervektorräume und affine Unterräume finden Sie in Übung 3.10, 3.11 und 3.15.

Lemma 3.5 *Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ kann in der Form*

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$$

geschrieben werden, wobei $n_1^2 + n_2^2 = 1$ ist.

Beweis: Es sei $G = \{x + tr \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, $r = (r_1, r_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Für ein beliebiges $y \in G$ gilt:

$$\begin{array}{rcrcl} y_1 = x_1 + tr_1 & \overset{*r_2}{\Rightarrow} & r_2 y_1 & = & r_2 x_1 + t r_1 r_2 \\ y_2 = x_2 + tr_2 & \overset{*(-r_1)}{\Rightarrow} & -r_1 y_2 & = & -r_1 x_2 - t r_1 r_2 \\ \text{addieren ergibt:} & & r_2 y_1 - r_1 y_2 & = & r_2 x_1 - r_1 x_2 \end{array}$$

$$\overset{/\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}}_{=:n_1} y_1 + \underbrace{\frac{-r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}}_{=:n_2} y_2 = \underbrace{\frac{r_2 x_1 - r_1 x_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}}_{=:d};$$

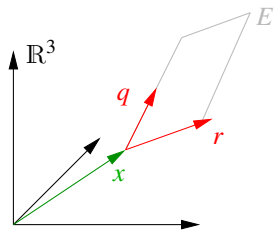
Da der Richtungsvektor r nicht Null ist, kann man durch $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ dividieren. Offensichtlich gilt dann $n_1^2 + n_2^2 = 1$.

□

Beispiel 3.6

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2y_1 + 3y_2 = 2 \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{\frac{2}{\sqrt{13}}}_{n_1} y_1 + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{13}}}_{n_2} y_2 = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{13}}}_{d} \right\} \\ &\left(\textit{vgl. obiges Beispiel } \tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + G \right) \end{aligned}$$

<u>Wenden wir uns nun Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zu:</u>



Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$E = \{x + tr + sq \,|\, t, s \in \mathbb{R}\},$$

wobei $r, q \in \mathbb{R}^3$, $r, q \neq 0$ und $q \neq \alpha r$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.7 *Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ kann geschrieben werden in der Form*

$$\{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = d\},$$

wobei $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ist.

Beweis: (vgl. Beweis zu Lemma 3.5) Wähle $y \in E$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + tr_1 + sq_1 \\ y_2 &= x_2 + tr_2 + sq_2 \\ y_3 &= x_3 + tr_3 + sq_3 \end{aligned}$$

$$\text{Betrachte} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2q_3 - q_2r_3 \\ -(r_1q_3 - q_1r_3) \\ r_1q_2 - q_1r_2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\neq} 0, \quad \text{da } r \neq \alpha q \text{ für alle } \alpha.$$

Offensichtlich sieht man durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 &= 0 \\ q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$[r_1r_2q_3 - r_1q_2r_3 - r_2r_1q_3 + r_2q_1r_3 + r_3r_1q_2 - r_3r_2q_1 = 0] \quad \text{(analog für die 2. Gleichung)}$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung für y_i mit p_i und addieren auf:

$$y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3 = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + 0 + 0$$

$$\text{Definiere} \quad n_i = \frac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \Rightarrow y_1n_1 + y_2n_2 + y_3n_3 = \underbrace{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3}_{=:d}$$

Zu (*): Zu zeigen ist $p \neq 0$. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis und nehmen demzufolge an, es sei $p = 0$.
Nun verwenden wir Eigenschaften der Ebenendarstellung, nämlich $r, q \neq 0$ und $q \neq \alpha r$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Nehmen wir an $r_1 \neq 0$, die anderen Fälle $r_2 \neq 0$ oder $r_3 \neq 0$ verlaufen analog. Seien also $r_1 \neq 0, q_1 \neq 0$, wegen $p = 0$ ist dann $q_2 = \frac{q_1}{r_1}r_2, q_3 = \frac{q_1}{r_1}r_3$ und offensichtlich $q_1 = \frac{q_1}{r_1}r_1$. Mit $\alpha = \frac{q_1}{r_1}$ ist dann also $q = \alpha r$ im Widerspruch zur zweiten Eigenschaft der Ebenendarstellung.

□

Beispiele für die verschiedenen Arten, Geraden und Ebenen darzustellen, finden Sie in Aufgabe 3.1 und 3.17.

Definition 3.8 *Wir nennen $x, y \in V$* linear abhängig*, genau dann wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$ gibt, so dass*

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Andernfalls (wenn also $\alpha x + \beta y = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt), heißen sie linear unabhängig.

Bemerkung 3.9

- *Es gilt: x, y sind linear abhängig, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x = \gamma y$ mit $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$.*
- *Im Beweis von Lemma 3.7 gilt $p = 0$ gdw. r, q linear abhängig sind.*
- *Zum Aufspannen einer Ebene mit zwei Vektoren müssen diese linear unabhängig sein!*

Wenden wir uns nun der Schnittbestimmung von Geraden und Ebenen zu:

Seien $G, \tilde{G}$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$, definiert über

$$\begin{aligned} G &= \{x + tr \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_1 n_1 + y_2 n_2 = d\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tilde{G} &= \{\tilde{x} + s\tilde{r} \,|\, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_1 \tilde{n}_1 + y_2 \tilde{n}_2 = \tilde{d}\} \end{aligned}$$

Gesucht ist ihr Schnittpunkt $y \in \mathbb{R}^2$ mit $y \in G \cup \tilde{G} \overset{[y=x+tr]}{\Leftrightarrow}$ gesucht $t, s \in \mathbb{R}$ mit $x + tr = \tilde{x} + s\tilde{r}$. Dies führt für beide Darstellungsformen auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} n_1 y_1 + n_2 y_2 = d \\ \tilde{n}_1 y_1 + \tilde{n}_2 y_2 = \tilde{d} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} r_1 t - \tilde{r}_1 s = \tilde{x}_1 - x_1 \\ r_2 t - \tilde{r}_2 s = \tilde{x}_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

Im ersten Gleichungssystem sind die Unbekannten y_1, y_2, im zweiten t, s.
Offensichtlich gibt es drei geometrische Fälle:

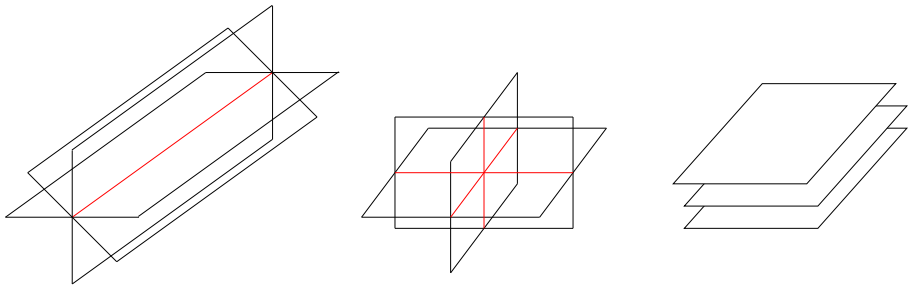
- Es gibt eine eindeutige Lösung, d.h. einen Schnittpunkt.
- Es gibt gar keine Lösung, d.h. die Geraden sind parallel.
- Es gibt unendlich viele Lösungen, d.h. die Geraden sind gleich.

Ähnliches beobachtet man beim Schneiden von drei Ebenen $E, \tilde{E}, \tilde{\tilde{E}}$. Man erhält als Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = d \\ \tilde{n}_1 y_1 + \tilde{n}_2 y_2 + \tilde{n}_3 y_3 = \tilde{d} \\ \tilde{\tilde{n}}_1 y_1 + \tilde{\tilde{n}}_2 y_2 + \tilde{\tilde{n}}_3 y_3 = \tilde{\tilde{d}} \end{pmatrix}$$

Hier gibt es im Wesentlichen vier geometrische Fälle:

- Die Ebenen schneiden sich in einem Punkt.
- Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.
- Die Ebenen sind gleich.
- Die Ebenen schneiden sich gar nicht, sondern sind parallel, oder zwei Ebenen sind parallel und die dritte Ebene schneide die beiden anderen.



Wir werden uns also mit dem Lösen von Gleichungssystemen beschäftigen müssen, um diese geometrischen Probleme zu behandeln.
Die Aufgaben 3.6 und 3.7 enthalten weitere Beispiele zur Schnittbestimmung.

3.2 Skalarprodukte, Winkel- und Längenmessung

Bisher haben wir noch nicht über Winkel und Längen von Vektoren gesprochen. Hierzu führen wir eine Abbildung

$$g : V \times V \to \mathbb{R}; \quad x, y \mapsto g(x, y)$$

auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen V ein. Wir werden $g(.,.)$ später *Skalarprodukt* nennen.
Das wichtigste Skalarprodukt wird für uns das *euklidische Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}^n$ sein:

$$g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_iy_i$$

Wir schreiben hierfür auch:

$$x \cdot y = g(x, y) \text{ bzw. } \langle x, y\rangle = g(x, y)$$

Bemerkung 3.10 *Wir sind diesem Skalarprodukt schon bei der Geraden- und Ebenendarstellung begegnet. Die Darstellung von Geraden $n_1y_1 + n_2y_2 = d$ oder Ebenen $n_1y_1 + n_2y_2 + n_3y_3 = d$ kann man mit dem Euklischen Skalarprodukt auch schreiben als $n \cdot y = d$, wobei n die Komponenten n_i und die y die Komponenten y_i hat.*

Allgemein definieren wir axiomatisch:

Definition 3.11 *Auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$g : V \times V \to \mathbb{R}; \quad x, y \mapsto g(x, y)$$

ein Skalarprodukt *, genau dann, wenn für $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned}
&(G1) \qquad g(x, x) \geq 0, \quad g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\\
&(G2) \qquad g(x, y) = g(y, x)\\
&(G3) \qquad g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)\\
&(G4) \qquad g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.12

$$\begin{aligned}(G2)+(G3) &\Rightarrow g(x,y+z)=g(x,y)+g(x,z)\\ (G2)+(G4) &\Rightarrow g(x,\alpha y)=\alpha g(x,y)\end{aligned}$$

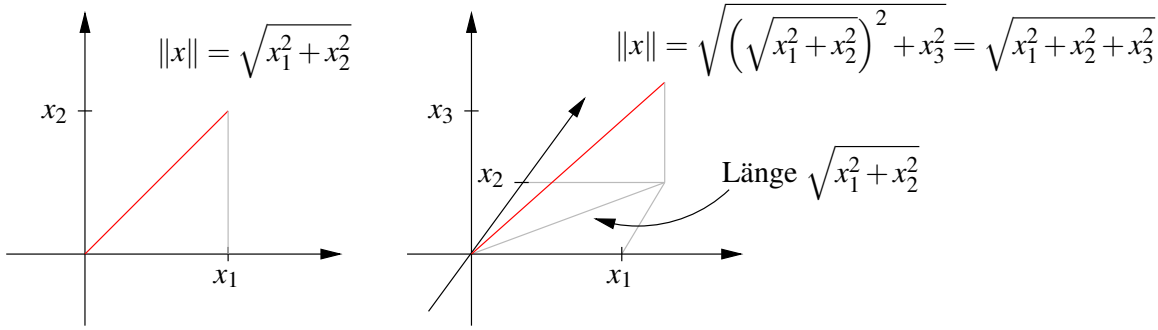
D.h. g ist symmetrisch *(G2) und linear in beiden Argumenten (*bilinear*). Die Eigenschaft (G1) bezeichnet man als* positiv definit.

Definition 3.13 (Norm)

$$\|x\|\,(=\|x\|_g) := \sqrt{g(x,x)} \quad \textit{heißt } \text{Norm } \textit{oder } \text{Länge von } x.$$

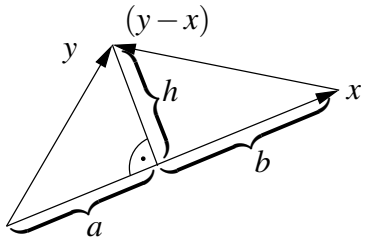
Im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man die Norm $||x|| = \sqrt{x_1^2+\cdots x_n^2}$, die aus dem Euklischen Skalarprodukt hervorgeht, als euklidische Norm.
Die Anwendung des Satzes von Pythagoras führt auf folgende Interpretation der euklidischen Norm und des euklidischen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^2$ bzw. im $\mathbb{R}^3$:

Zunächst zur Definition der Norm im Kontext des Satzes von Pythagoras, hier sehen wir direkt



Nun wenden wir uns dem euklidische Skalarprodukt zu und rechnen nach

$$\begin{aligned}\|y-x\|^2 &= (y-x)\cdot(y-x) = y\cdot y - y\cdot x - x\cdot y + x\cdot x\\ &= \|y\|^2 - 2x\cdot y + \|x\|^2\\ \Rightarrow x\cdot y &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|y-x\|^2\right)\end{aligned}$$



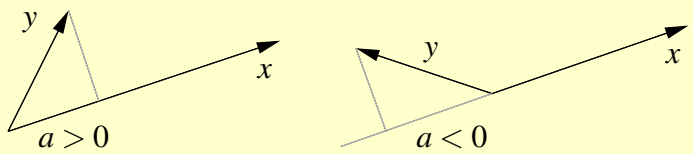
$$\underbrace{\text{Setze nun:}\quad \begin{aligned}\|x\| &= a+b\\ \|y\|^2 &= a^2+h^2\\ \|y-x\|^2 &= b^2+h^2\end{aligned}}$$

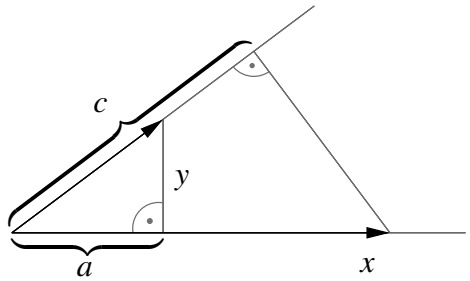
$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \|x\|^2+\|y\|^2-\|y-x\|^2\\ & = a^2+2ab+b^2+a^2+h^2-b^2-h^2\\ & = 2(a^2+ab) = 2a(a+b) = 2a\|x\|\\ \Longrightarrow\quad & x\cdot y = a\|x\|\end{aligned}$$

Also erhalten wir die geometrische Interpretation des euklidischen Skalarprodukts:

Merkregel 3.14

$$\boxed{x \cdot y = a\|x\|}$$





Diese Beziehung ist symmetrisch:

$x \cdot y = a\|x\| = c\|y\|$
$a \mathrel{\hat{=}}$ Länge der senkrechten Projektion von y auf x
$c \mathrel{\hat{=}}$ Länge der senkrechten Projektion von x auf y

Als Nächstes betrachten wir den Zusammenhang mit der Winkelmessung. Aus der geometrischen Definition des Kosinus leiten wir für den Winkel α zwischen Vektoren x und y ab

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\|y\|}.$$

Aus obigen Überlegungen wissen wir, dass $a = \frac{x \cdot y}{\|x\|}$. Somit folgt

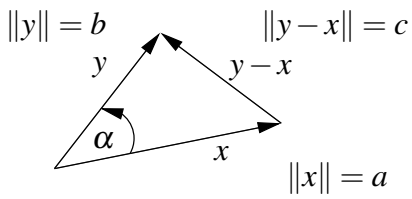
$$\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

Merkregel 3.15

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}} \qquad \textit{Es gilt:} \quad |\alpha| = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{bzw. } 90^\circ) \qquad \overset{x,y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \qquad x \cdot y = 0$$

Hieraus ergibt sich nun unter Verwendung von $x \cdot y = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2)$ der Kosinus-Satz auf allgemeinen Dreiecken:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \\ &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2}{2\|x\|\|y\|} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$



Merkregel 3.16

$$\boxed{2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - c^2}$$

Neben dem Cosinus-Satz steht der Sinussatz, der aussagt, dass in einem Dreieck mit Winkeln α, β und γ mit den gegenüberliegenden Seiten a, b, beziehungsweise c gilt:

Merkregel 3.17

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}}$$

Dies folgt direkt aus der Definition des Sinus eines Winkels als dem Quotienten aus Gegenkathede und Hypotenuse, denn wenn h die Höhe über der Seite c bezeichnet, so gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{h}{b}, \quad \sin(\beta) = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \\ b\sin(\alpha) &= a\sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}. \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man die zweite behauptete Gleichheit. Für den Sinus des Winkels der aufgespannt wird von zwei Vektoren x, y mit $x \cdot y > 0$ erhalten wir aus

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}}$$

schliesslich die folgende Darstellung unter Verwendung des Skalarprodukts:

Merkregel 3.18

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2}}{\|x\|\,\|y\|}} \quad \textit{für } x \cdot y > 0$$

Notation 3.19 *$x, y \in V$ heißen* orthogonal *oder* senkrecht*, falls $g(x,y) = 0$.*

Aus obigen Betrachtungen im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ für das euklidische Skalarprodukt ergibt sich insbesondere:

$$|x \cdot y| = \underbrace{|a|}_{\leq \|y\|} \|x\| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Dies gilt auch allgemein:

Satz 3.20 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $g(.,.)$, dann gilt:*

$$|g(x,y)| \leq \|x\|_g \|y\|_g, \quad \text{„}=\text{“gilt dann, wenn } x, y \text{ linear abhängig sind.}$$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$\begin{aligned}
&\underline{y=0}: && \checkmark \\
&\underline{y\neq 0}: && f(t) \quad := \quad g(x+ty,x+ty) = \|x\|_g^2 + 2tg(x,y) + t^2\|y\|_g^2 \\
& && \overset{(G1)}{\geq} \quad 0, \quad \text{und „=“, falls } x+ty=0 \Leftrightarrow x,y \text{ linear abhängig.}
\end{aligned}$$

Wählen wir nun $t = -\frac{g(x,y)}{\|y\|_g^2}$, dann

$$\|x\|_g^2 - \frac{g(x,y)^2}{\|y\|_g^2} \geq 0 \Rightarrow g(x,y)^2 \leq \|x\|_g^2\|y\|_g^2 \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

Im $\mathbb{R}^n$ kann man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch durch direktes Nachrechnen beweisen, vgl. Übung 3.3. Weitere Eigenschaften von Skalarprodukt und Norm finden Sie in den Aufgaben 3.2 und 3.5, eine weitere geometrische Veranschaulichung in Aufgabe 3.16 und 3.19.

Satz 3.21 (Eigenschaften der Norm) *Die durch ein Skalarprodukt induzierte Norm hat folgende Eigenschaften für $x,y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
&(N1) && \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\
&(N2) && \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \\
&(N3) && \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&(N1) && \Leftarrow && (G1) \\
&(N2) && : && \|\alpha x\| &= \sqrt{g(\alpha x,\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 g(x,x)} = |\alpha|\|x\| \\
&(N3) && : && \|x+y\|^2 &= g(x+y,x+y) = \|x\|^2 + 2g(x,y) + \|y\|^2 \\
& && && &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\
& && && &\Rightarrow \text{Beh.}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.22

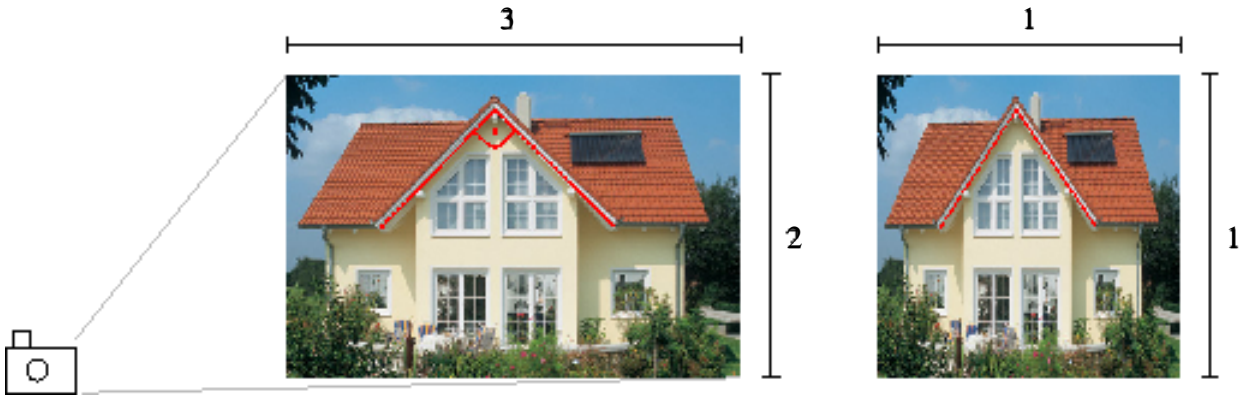
- *Die Norm ist über das Skalarprodukt definiert. Umgekehrt erhalten wir das Skalarprodukt aus der Norm:*

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{13}$$

- *Es gibt andere Normen, z.B.* $\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}|x_i|$ *oder* $\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_1 = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, *die auch (N1) - (N3) erfüllen. Die Abbildung* $g(x,y)$ *definiert über* (13) *ist dann aber kein Skalarprodukt.*

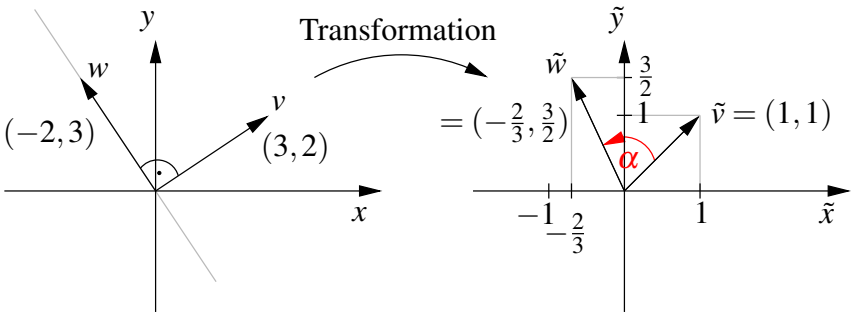
Es gibt natürlich auch andere Skalarprodukte im $\mathbb{R}^2$. Nun wollen wir uns einer geometrischen Interpretation dieser Skalarprodukte zuwenden.

Betrachten wir das folgende Szenario: Wir haben ein Kamerabild mit Seitenlängen in einem Verhältnis von 3:2.



Nun verändern wir die Seitenverhältnisse auf 1:1 durch die Transformation

$$\tilde{x} = \frac{x}{3}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{2}.$$



$$v \cdot w = (-2,3)\cdot(3,2) = 0$$
$$\|v\| = \|w\| = \sqrt{13}$$

Nach der Transformation gilt für den Winkel α zwischen $\tilde{w}$ und $\tilde{v}$, dass $\alpha \neq 90°$. Ferner rechnen wir nach, dass $\|\tilde{v}\| \neq \|v\|$, $\|\tilde{w}\| \neq \|w\|$ bezogen auf das euklidische Skalarprodukt. Wenn wir aber als Skalarprodukt in der 1:1 Konfiguration wählen

$$\tilde{g}(\tilde{v},\tilde{w}) = 9\tilde{v}_1\tilde{w}_1 + 4\tilde{v}_2\tilde{w}_2,$$

(Hintergrund: $\tilde{g}(\tilde{v},\tilde{w}) = v \cdot w$ mit $v = (3\tilde{v}_1, 2\tilde{v}_2)$, $w = (3\tilde{w}_1, 2\tilde{w}_2)$)

$$\begin{aligned}\text{dann gilt:}\quad \tilde{g}(\tilde{v},\tilde{w}) &= 9\frac{3}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)+4\frac{2}{2}\frac{3}{2}=0\\ \|\tilde{v}\|_{\tilde{g}} &= \sqrt{9+4}=\sqrt{13}=\|v\|,\quad \|\tilde{w}\|_{\tilde{g}}=\sqrt{13}=\|w\|.\end{aligned}$$

D.h. allgemeine Skalarprodukte ermöglichen es uns, auch in transformierten Koordinatensystem noch die ursprüngliche Längen und Winkelmessung durchzuführen. Wir werden später sehen, dass wir über diesen Ansatz aus Transformationen bereits alle möglichen Skalarprodukte erhalten.

Betrachten wir nun den Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ bzw. einer Ebene im $\mathbb{R}^3$:

Gegeben sei eine Gerade

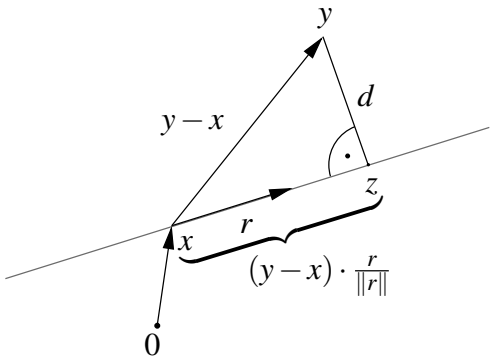
$$G=\{x+tr\,|\,t\in\mathbb{R}\},\quad (x,r\in\mathbb{R}^2)$$

und ein Punkt $y\in\mathbb{R}^2$. Die Funktion $f(t):=\|y-(x+tr)\|^2$ wird dort minimal, wo $(x+tr)$ der nächste Punkt zu y auf G ist (siehe Skizze unten). D.h. es muss gelten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t)=0 \quad\Rightarrow\quad 0 &= \frac{d}{dt}\left[((y_1-(x_1+tr_1))^2+((y_2-(x_2+tr_2))^2\right]\\ &= 2(y_1-(x_1+tr_1))(-r_1)+2(y_2-(x_2+tr_2))(-r_2)\\ \Leftrightarrow\quad & t(r_1r_1+r_2r_2)=(y_1-x_1)r_1+(y_2-x_2)r_2\\ \Leftrightarrow\quad & t=\frac{(y-x)\cdot r}{r\cdot r}=(y-x)\cdot\frac{r}{\|r\|^2}\end{aligned}$$

D.h. der Abstand d von y zu G ist:

$$\begin{aligned}d &= \left\|y-\left(x+(y-x)\cdot\frac{r}{\|r\|}\frac{r}{\|r\|}\right)\right\|\\ &= \left\|(y-x)-(y-x)\cdot\frac{r}{\|r\|}\frac{r}{\|r\|}\right\|\end{aligned}$$



Betrachten wir nun eine Ebene gegeben durch

$$E=\{x+tr+sq\,|\,t,s\in\mathbb{R}\},\quad (x,r,q\in\mathbb{R}^3)$$

und einen Punkt $y\in\mathbb{R}^3$. Die Funktion $f(t,s):=\|y-(x+tr+sq)\|^2$ wird dort minimal, wo $(x+tr+sq)$ der nächste Punkt zu y auf E ist. Später werden wir sehen, dass dann für die

partiellen Ableitungen gelten muss:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,s) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial s} f(t,s) = 0 \quad (\Leftrightarrow \nabla f(t,s) = 0)$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} 0 &= 2(y_1 - (x_1 + tr_1 + sq_1))(-r_1) + 2(y_2 - (x_2 + tr_2 + sq_2))(-r_2) \\
&\quad +2(y_3 - (x_3 + tr_3 + sq_3))(-r_3) \\
\text{und} \quad 0 &= 2(y_1 - (x_1 + tr_1 + sq_1))(-q_1) + 2(y_2 - (x_2 + tr_2 + sq_2))(-q_2) \\
&\quad +2(y_3 - (x_3 + tr_3 + sq_3))(-q_3) \\
\Leftrightarrow \quad & t(r \cdot r) + s(q \cdot r) = (y - x) \cdot r \\
& t(q \cdot r) + s(q \cdot q) = (y - x) \cdot q
\end{aligned}$$

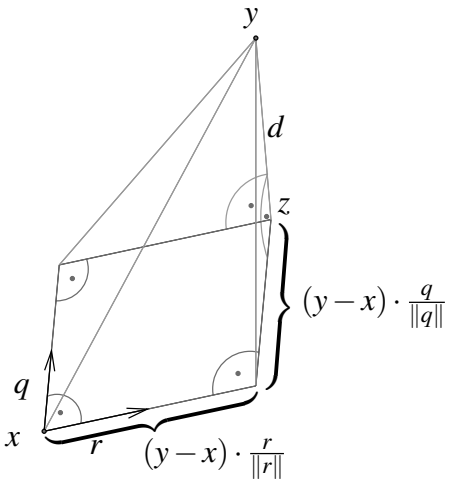
Dies ist ein lineares Gleichungssystem. Sei (t,s) eine Lösung dieses Systems, dann ist

$$d = \|y - (x + tr + sq)\| \quad \text{der Abstand von } y \text{ zu } E.$$

Im Fall $r \cdot q = 0$ (d.h. r und q sind orthogonal) folgt für den Abstand

$$d = \|y - \underbrace{\left(x + (y-x) \cdot \frac{r}{\|r\|}\frac{r}{\|r\|} + (y-x) \cdot \frac{q}{\|q\|}\frac{q}{\|q\|}\right)}_{z}\|,$$

da $t = (y-x) \cdot \frac{r}{\|r\|^2}$ und $s = (y-x) \cdot \frac{q}{\|q\|^2}$.

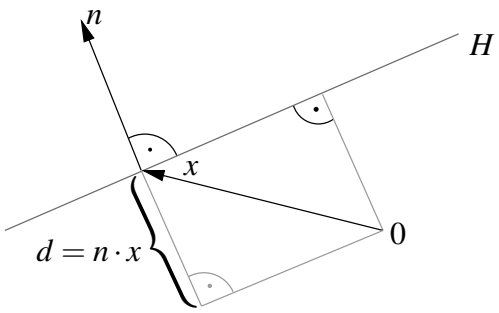


Betrachten wir nun die alternative Darstellung:

$$H = \{x \in \mathbb{R} \,|\, n \cdot x = d\}, \quad n \in \mathbb{R}^m, \|n\| = 1, d \in \mathbb{R}$$

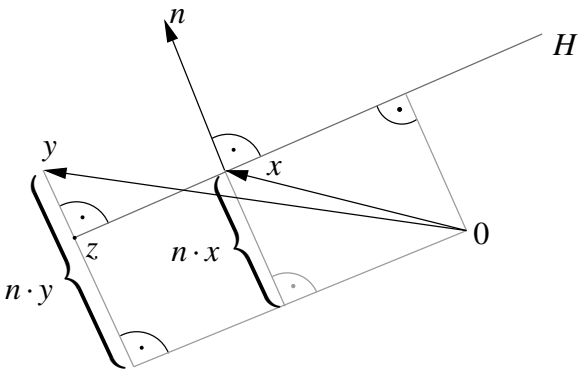
Für $m = 2$ ist $H = G$ eine Gerade, für $m = 3$ ist $H = E$ eine Ebene.

Dann ist die geometrisch Konfiguration wie folgt:



D.h. $|d|$ ist der Abstand der 0 von H.
Falls $d > 0$, so zeigt n vom Ursprung weg (wie hier in der Skizze), andernfalls zum Ursprung hin.

Außerdem gilt: $|n \cdot y - n \cdot x| = |n \cdot y - d|$ ist der Abstand von y zu H.



Der zu y nächste Punkt ist $z = y - (n \cdot y - d)n$.

Falls $0 \in H$, so ist $d = 0$, also $z = y - (n \cdot y)n$.

3.3 Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zu. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es auch ein Produkt, dass zwei Vektoren einen Vektor zuordnet:

Definition 3.23 (Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt) *Sei $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, dann definieren wir*

$$x \wedge y (= x \times y) = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.24 *Für die Herleitung der Ebenendarstellung $(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d)$ haben wir bereits das Vektorprodukt eingesetzt.*

<u>Regeln für das Vektorprodukt:</u>

(i) Für $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt

$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$

(ii) Das Vektorprodukt ist linear in jedem Faktor:
$(\alpha x + \beta z) \wedge y = \alpha (x \wedge y) + \beta (z \wedge y)$

(iii) $x \wedge y = -y \wedge x, \quad x \wedge x = 0$

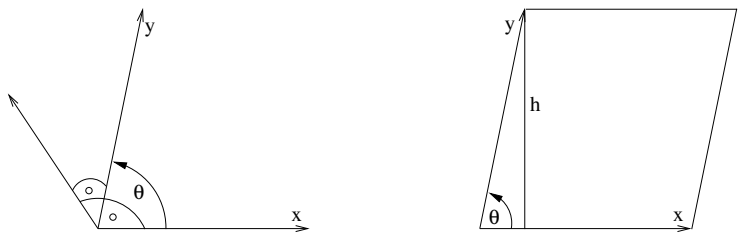
(iv) x, y sind orthogonal zu $x \wedge y$: $\quad x \cdot (x \wedge y) = 0$
(vgl. Ebenendarstellung) $\quad y \cdot (x \wedge y) = 0$

(v) $||x \wedge y||^2 = ||x||^2||y||^2 - (x \cdot y)^2$

$$\begin{aligned}
\text{hierzu: Linke Seite (LS)} &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
&\quad -2(x_2y_2x_3y_3 + x_3y_3x_1y_1 + x_1y_1x_2y_2) \\
\text{Rechte Seite (RS)} &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&\Rightarrow \text{(LS) = (RS)}
\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned}
||x \wedge y||^2 &= ||x||^2||y||^2 - (x \cdot y)^2 \\
&\overset{\text{geom. Interpretation des SKP}}{=} ||x||^2||y||^2 - ||x||^2||y||^2 \cos^2\theta \\
&\overset{1-\cos^2=\sin^2}{=} ||x||^2||y||^2 \sin^2\theta \\
\Rightarrow ||x \wedge y|| &= h||x||
\end{aligned}$$



D.h. $x \wedge y$ steht senkrecht auf x und auf y und die Länge von $x \wedge y$ entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms.

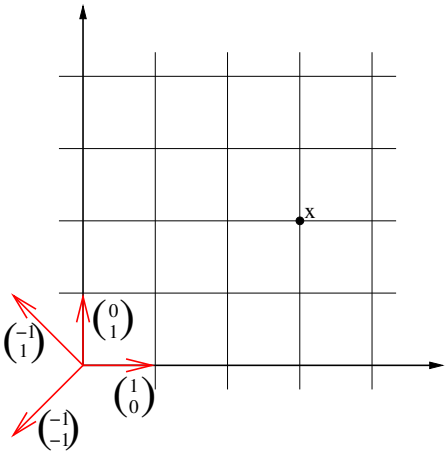
Dieser ist Null genau dann, wenn das x oder y Null sind oder in die selbe Richtung zeigen, wenn sie also linear abhängig sind.

Eine Anwendung dieses Zusammenhangs finden Sie in Aufgabe 3.14.

3.4 Linearkombination und Basis

Im Folgenden betrachten wir, wie man Vektoren in Vektorräumen darstellen kann:

Beispiele 3.25



$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D.h. bezüglich verschiedener Systeme von Vektoren $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ *oder* $\left\{\binom{-1}{-1}, \binom{-1}{1}\right\}$ *haben Vektoren unterschiedliche Darstellungen über die skalaren Faktoren* $\{3,2\}$ *bzw.* $\{-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

Es stellen sich nun folgende Fragen:

- Kann man jeden Vektor so darstellen?
- Welche Eigenschaften müssen die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ haben, damit man jeden Vektor durch sie darstellen kann?
- Ist die Zahl der benötigten Vektoren fest für einen gewählten Vektorraum?

Definition 3.26 *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißen k Elemente aus V*

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

linear abhängig, *genau dann wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ gibt, mit mindestens einem $\alpha_m \neq 0$ für $1 \leq m \leq k$ und*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0.$$

(d.h. ein Vektor ist durch die anderen Vektoren darstellbar:
$v_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} v_{m-1} - \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} v_{m+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_m} v_k$*)*
Andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig.

Eine solche Summe von Vektoren mit skalaren Koeffizienten heißt Linearkombination.

Beispiel 3.27

- $\binom{-1}{-1}, \binom{-1}{1}, \binom{3}{2}$ *sind linear abhängig, denn:*

$$\left(-\frac{5}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=0$$

  (vgl. Eingangsbeispiel oben)

- *Im* $\mathbb{R}^n$ *sind die Einheitsvektoren*

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

  linear unabhängig.

- $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ *sind linear abhängig, denn*

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{r}\alpha_1+2\alpha_2=0\\-\alpha_1-2\alpha_2=0\\2\alpha_1+4\alpha_2=0\end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha_1+2\alpha_2=0$$

  Wähle z.B. $\alpha_1=2, \alpha_2=-1$.

- *Betrachten wir den Vektorraum der Polynome*

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_kt^k$$

  für $k\in\mathbb{N}$. *Dies ist ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen. Die* Monome

$$v_0:=(t\mapsto 1), \quad v_1:=(t\mapsto t), \quad v_2:=(t\mapsto t^2), \quad \ldots, \quad v_k:=(t\mapsto t^k)$$

  sind linear unabhängig, d.h. nach der Definition

$$\begin{aligned}\alpha_0v_0+\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_kv_k=0 \quad&\Leftrightarrow\quad p(t)=\alpha_0+\alpha_1t+\alpha_2t^2+\ldots+\alpha_kt^k\equiv 0\\ &\Leftrightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0\end{aligned}$$

  denn: $p(0)=0\Rightarrow\alpha_0=0, \quad p'(0)=0\Rightarrow\alpha_1=0, \quad p''(0)=0\Rightarrow\alpha_2=0,$
  $p'''(0)=0\Rightarrow\alpha_3=0, \quad \ldots \quad p^{(k)}(0)=0\Rightarrow\alpha_k=0$
  dabei bezeichnet $p^{(m)}$ *das Polynom, welches man erhält, wenn man m-mal hintereinander p ableitet.*

Weitere Beispiele finden Sie in Übung 3.4, 3.9, 3.18 und 3.19. Übung 3.20 enthält Betrachtungen zum Zusammenhang zwischen linearer Unabhängigkeit und dem Skalarprodukt.

Definition 3.28 (Span) *Ist $A \subset V$ eine Menge von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V, dann heißt die Menge aller Linearkombinationen*

$$\operatorname{span}(A) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \,|\, k \in \mathbb{N}, v_1, \ldots, v_k \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

lineare Hülle *von A oder* der von A aufgespannte Raum *oder der* Span *von A.*

Beispiel 3.29

- $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
- $\operatorname{span}\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3, \ldots, t \mapsto t^k\} =$ *Polynome vom Grad* $\leq k$
- *Ebene durch den Ursprung* $E = \{tr + sq \,|\, t, s \in \mathbb{R}, r, q$ *linear unabh.*$\} = \operatorname{span}\{r, q\}$

Lemma 3.30 *Für jede Menge $A \subset V$ ist* $\operatorname{span}(A)$ *ein linearer Unterraum.*

Beweis: Durch Ausrechnen folgt, dass die Summe von zwei Elementen aus $\operatorname{span}(A)$ und die Multiplikation mit einem Skalar wieder in $\operatorname{span}(A)$ liegen.

□

Definition 3.31 (Basis) *Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und ist* $\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$, *so nennt man $\{v_1, \ldots, v_n\}$* Basis *von V.*

Satz 3.32 (Darstellung in einer Basis) *Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, dann gibt es für jeden Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k.$$

Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heißen Koordinaten *des Vektors x bzgl. der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Beweis: Nach Def. hat jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung als Linearkombination über der Basis. Zu zeigen ist also nur noch die Eindeutigkeit der Darstellung:

$$\begin{aligned} & x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \\ \Rightarrow \quad & 0 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i \\ \overset{\text{lin. unabh.}}{\Rightarrow} \quad & \alpha_i - \beta_i = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die Darstellungen sind gleich.

$\square$

Beispiele 3.33

- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *ist Basis des* $\mathbb{R}^n$.
- $V =$ *Raum der Polynome* p *vom Grad* $\leq 2k$ *mit* $p(x) = p(-x)$:
  $\left\{t \mapsto 1, t \mapsto t^2, t \mapsto t^4, \ldots, t \mapsto t^{2k}\right\}$ *ist Basis von* V.
- $\left\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ *ist Basis des* $\mathbb{R}^2$.

  <u>hierzu:</u> lineare Unabhängigkeit:

  $$\alpha_1 \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix}-\alpha_1 - \alpha_2 = 0\\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0\end{matrix} \overset{\alpha_2=\alpha_1}{\Rightarrow} -2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

  Darstellung für einen beliebigen Vektor $x = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)$:

  $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} &\overset{\alpha_2=x_2+\alpha_1}{\Rightarrow} -\alpha_1 - (x_2 + \alpha_1) = x_1\\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{x_2-x_1}{2}.\end{aligned}$$

  D.h. jeder Vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ *ist darstellbar als Linearkombination von* $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ *Basis des* $\mathbb{R}^2$

Weitere Beispiele finden Sie in Aufgabe 3.12 und 3.21.

Bemerkung 3.34 *Die lineare Unabhängigkeit ergibt sich aus der eindeutigen Darstellung der* 0*!*

Lemma 3.35 *Sei* V *ein Vektorraum,* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *eine Basis,* $w_1, \ldots, w_m$ *Elemente aus* V *mit* $m > n$*, dann sind* $w_1, \ldots, w_m$ *linear abhängig.*

Beweis: Betrachte $\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m = 0$. Z.z. ist: es gibt eine nichttriviale Lösung $\mu_1, \ldots, \mu_m$ (mindestens ein $\mu_k \neq 0$).

$$\begin{aligned}\text{Basiseigenschaft} \quad &\Rightarrow \quad w_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} v_i \text{ für Koeffizienten } \alpha_{ki}, i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m\\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} \mu_k w_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_k \alpha_{ki} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k \alpha_{ki}\right)}_{=:\beta_i} v_i = 0.\end{aligned}$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind folgt $\beta_i = 0$ für alle $i = 1, ..., n$. Wir erhalten also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\mu_1 & + & \alpha_{21}\mu_2 & + & \ldots & + & \alpha_{m1}\mu_m & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{1n}\mu_1 & + & \alpha_{2n}\mu_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}\mu_m & = 0 \end{pmatrix}$$

bestehend aus n Gleichungen mit $m > n$ Unbekannten und rechter Seite 0. Auflösen dieses Gleichungssystems ergibt, dass es eine nichttriviale Lösung $\mu_1, \ldots, \mu_m$ gibt.

□

Satz 3.36 *Die Anzahl von Basisvektoren eines Vektorraumes ist eine feste Zahl. (Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen desselben Vektorraums so gilt $n = m$).*

Beweis: Im Fall $m > n$ wäre $w_1, \ldots, w_m$ linear abhängig, im Fall $n > m$ wäre $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig; also muss $n = m$ sein.

□

Definition 3.37 *Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$, dann nennen wir n die* Dimension *von V.*

Bemerkung 3.38

- *Die Dimension ist wohldefiniert nach vorangehendem Satz.*
- *Der $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.*
- *Der Raum der Polynome p vom Grad $\leq 2k$ mit $p(t) = p(-t)$ (die sog.* geraden Polynome*) hat die Dimension $k+1$.*
- *Eine Gerade durch 0 ist ein eindimensionaler Vektorraum.*
- *Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch 0 ist ein zweidimensionaler Vektorraum.*

Betrachten wir nun einige Folgerungen, die aus der Definition einer Basis hervorgehen:

Lemma 3.39 *Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig, aber $u, v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig, dann ist u als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ darstellbar:*

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

Beweis: $u, v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig $\Rightarrow$ Es gibt Zahlen $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, so dass $\alpha u + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$. Wäre $\alpha = 0$ so würde gelten $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$, da die $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$ linear unabhängig.

$\lightning$

Also ist $\alpha \neq 0 \Rightarrow u = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i$.

□

Satz 3.40 *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis.*

Beweis: $u \in V \overset{\text{Lemma 3.35}}{\Rightarrow} u, v_1, \ldots, v_n$ linear abh. $\overset{\text{Lemma 3.39}}{\Rightarrow} u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \overset{u \text{ bel.}}{\Rightarrow}$ $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$.

□

Satz 3.41 (Basisergänzungssatz) *Sei* $\dim V = n$ *und $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig mit $r < n$. Dann gibt es $v_{r+1}, \ldots, v_n$, so dass*

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \quad \textit{eine Basis von } V \textit{ ist.}$$

Beweis: Wäre für alle $v \in V$ $v, v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig, dann wäre nach Lemma 3.39 jedes Element aus V Linearkombination der $v_1, \ldots, v_r \Rightarrow \{v_1, \ldots, v_r\}$ Basis und $\dim V = r$.

$\lightning$

Das heißt es gibt ein $v \in V$, so dass $v, v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind; wir wählen $v_{r+1} := v$. Dies wiederholen wir für v_{r+2}, v_{r+3} bis zu v_n.

□

Bemerkung 3.42 *Sei U Untervektorraum von V, dann gilt* $\dim U \leq \dim V$.

Beweis: Wähle eine Basis zu U und ergänze diese zu einer Basis von $V \Rightarrow$ Beh.

□

Beispiel 3.43 *Betrachte das Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rrrrl} (*_1): & x_1 & +5x_2 & +7x_3 = & 0 \\ (*_2): & -x_1 & +x_2 & -25x_3 = & 0 \\ \textit{sowie} & & & U = & \{x \in \mathbb{R}^3 | x \textit{ löst } (*_1) \textit{ und } (*_2)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} (*_1): & x_1 & +5x_2 & +7x_3 = & 0 \\ (*_1)+(*_2): & & 6x_2 & -18x_3 = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \textit{also} & x_2 = & 3x_3 \\ \textit{in } (*_1): & x_1 = & -5(3x_3) - 7x_3 = -22x_3 \end{array}$$

$$\textit{daher} \qquad U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -22 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad \textit{Gerade durch } 0.$$

Satz 3.44 *Sei* $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, *dann folgt* $\dim U \leq k$ *und aus* $u_1, \ldots, u_k$ *kann eine Basis für* U *ausgewählt werden.*

Beweis: Sei m die maximale Zahl linear unabhängiger Vektoren aus $\{u_1, \ldots, u_k\}$, nach Umnummerierung nehmen wir an, $u_1, \ldots, u_m$ sind linear unabhängig. Also sind die anderen Vektoren $u_{m+1}, \ldots, u_k$ als Linearkombinationen der u_1 bis u_m darstellbar $\Rightarrow$ damit sind dann aber alle $u \in U$ als Linearkombinationen aus $u_1, \ldots, u_m$ darstellbar $\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_m\}$ Basis und $\dim U = m \leq k$.

□

Aus Untervektorräumen kann man „größere“ Untervektorräume aufbauen:

Zu zwei Geraden gehören zwei Richtungsvektoren; beide Richtungsvektoren zusammen spannen eine Ebene auf, falls sie linear unabhängig sind.

Definition 3.45 (Direkte Summe von Untervektorräumen) U, W *seien Untervektorräume von* V *mit Basen* $\{u_1, \ldots, u_k\}$ *bzw.* $\{w_1, \ldots, w_m\}$ *und* $U \cap W = \{0\}$, *dann definieren wir*

$$\begin{aligned} U \oplus W &:= \{u + w | u \in U, w \in W\} \\ &= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m\} \end{aligned}$$

Beobachtung: $\dim U \oplus W = k + m$
Hierzu: Zu zeigen ist, dass $\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis bildet, dazu fehlt nur noch

der Nachweis, dass $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig sind. Dazu betrachtet man

$$\underbrace{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k}_{\in U} = \underbrace{-\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_m w_m}_{\in W} .$$

Da $U \cap W = \{0\}$, müssen beide Seiten der Gleichung Null sein. Aus der linearen Unabängigkeit der $\{u_i\}$ folgt dann, dass alle $\alpha_i = 0$, ebenso folgt $\beta_i = 0$, da die $\{w_i\}$ linear unabhängig sind.

Beispiel 3.46 *$r, q \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig*

$E = \{tr + sq \mid t, s \in \mathbb{R}\}$	*Ebene*
$n = r \wedge q \left(\in \mathbb{R}^3\right)$	*Normale*
$N = \{tn \mid t \in \mathbb{R}\}$	*Gerade, senkrecht zu E*

$\mathbb{R}^3 = E \oplus N$

3.5 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 3.1

a) Gegeben ist eine Gerade durch

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{3}{5}y_1 + \frac{4}{5}y_2 = 12 \right\}.$$

Berechnen Sie Vektoren $x, r \in \mathbb{R}^2$, so dass sich die Gerade als

$$G = \{x + tr \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

schreiben läßt.

b) Gegeben sei eine Ebene durch

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

finden Sie $n_1, n_2, n_3, d \in \mathbb{R}$ mit $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, so dass sich die Ebene schreiben läßt als

$$E = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = d\}.$$

c) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $(5,1,4)$ zur Ebene E durch Minimierung der Funktion

$$f(t,s) := \|y - (x + tr + sq)\|^2.$$

Betrachten Sie dazu die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = 0.$$

Anwesenheitsaufgabe 3.2 Zeigen Sie, dass mit dem Euklidischen Skalarprodukt und der Euklidischen Norm für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

a) $\langle x+y, x-y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$

b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
(Parallelogramm-Gleichung)

Anwesenheitsaufgabe 3.3 Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist gegeben durch

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

a) Formulieren Sie für Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

b) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung durch direktes Nachrechnen im $\mathbb{R}^2$.

Anwesenheitsaufgabe 3.4 Sind die folgenden Polynome linear abhängig?

$$\begin{aligned} t &\mapsto 1+t \\ t &\mapsto 2+t \\ t &\mapsto 2t \end{aligned}$$

Anwesenheitsaufgabe 3.5 Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ genau dann orthogonal sind, wenn gilt

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||.$$

Interpretieren Sie die Aussage für $n = 2,3$ geometrisch.

Aufgabe 3.6

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{7}{\sqrt{5}} \right\} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wobei sie die Gerade sowohl in der Form $G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, als auch in der Form $G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$ angeben und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 3.7 Eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist (analog zum $\mathbb{R}^2$) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \,|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus $b)$ ist das?

Aufgabe 3.8 Seien V und W $\mathbb{R}-$Vektorräume.
Das Kartesische Produkt $V \times W$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare

$$V \times W = \{(v, w) \,|\, v \in V, w \in W\}.$$

Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit der Addition

$$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$$

und der Skalarmultiplikation

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

ebenfalls ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist.

Aufgabe 3.9 a) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.
b) Bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so geben Sie bitte einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt.
Tipp: Berücksichtigen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
c) Sind die drei Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Wie lauten die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis?

Aufgabe 3.10 Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$	ja □	nein □
b) $\{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja □	nein □
c) $\{(x,2x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja □	nein □
d) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$	ja □	nein □
e) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$	ja □	nein □

Aufgabe 3.11 Es sei $\mathscr{P}^k = \operatorname{span}\{1, t, t^2, \cdots, t^k\}$ der Vektorraum der Polynome, deren Grad höchstens $k (\in \mathbb{N})$ sei. Zeigen Sie, daß

$$U := \{p \in \mathscr{P}^k \mid p(5) = 0\,,\ p(7) = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathscr{P}^k$ ist.

Aufgabe 3.12 Gegeben seien folgende drei quadratische Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + 2x + 3\,, \\ p_2(x) &= 3x^2 + 2x + 1\,, \\ p_3(x) &= x^2 + x + 2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Polynome linear unabhängig sind und eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bilden. Wie lautet die Darstellung der Polynome

$$p(x) = 5x^2 + 5x + 6 \quad \text{und} \quad q(x) = 3x + 7$$

bezüglich dieser Basis?

Aufgabe 3.13 Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarprodukte sind.

a) $j(x,y) := x_1y_1 - x_2y_2$

b) $k(x,y) := 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

Aufgabe 3.14 Ein Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$ werde durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders unter Verwendung des Skalarprodukts und des Kreuzprodukts. Hierfür dürfen Sie die Formel

$$V(T) = \frac{1}{3} A \cdot h$$

verwenden, wobei A die Grundfläche und h die Höhe des Tetraeders sind.

Aufgabe 3.15

a) Geben Sie je ein Beispiel für einen eindimensionalen und einen zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U = U_1 \cap U_2$ zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V wieder ein Untervektorraum ist.

c) Beschreiben Sie, welche unterschiedlichen Fälle beim Schneiden eines eindimensionalen Untervektorraums des R^3 mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ auftreten können.

Aufgabe 3.16

a) Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\|\cdot\|_g$ die davon induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|x-y\|_g^2 = \|x\|_g^2 + \|y\|_g^2 - 2g(x,y).$$

b) Was bedeutet dies geometrisch, wenn man für $g(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt wählt?
Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung des euklidischen Skalarproduktes.

Aufgabe 3.17

a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d\}$.

Aufgabe 3.18 Weisen Sie nach, daß die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 3.19 Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear abhängig sind.

b) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear abhängig sind und $\|w\| = 1$.

c) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$?

d) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ und $\|w\| = 1$?

Aufgabe 3.20 Welche Aussagen sind richtig?

a) Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) zu $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^2$, dann sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear abhängig.

ja □ nein □

b) Ist $\mathbf{x}$ orthogonal (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) zu $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^3$, dann sind $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ linear abhängig.

ja □ nein □

c) Ist $\mathbf{x}$ orthogonal (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) zu $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^3$, dann ist $\mathbf{x}$ orthogonal (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) zu jeder Linearkombination $a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$. ja □ nein □

d) V sei ein reeller Vektorraum. Wenn die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ linear unabhängig sind und $\dim V = k$ gilt, dann bilden $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eine Basis.

ja □ nein □

e) V sei ein reeller Vektorraum. Die Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ seien linear abhängig. Dann läßt sich $\mathbf{w}_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ darstellen. ja □ nein □

Aufgabe 3.21 Sei V ein Vektorraum.

a) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

ja □ nein □

b) Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

ja □ nein □

c) Wenn eine Basis von V endlich ist, sind alle Basen von V endlich.

ja □ nein □

d) Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren der Form (α, α, α). ja □ nein □

e) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus Vektoren der Form (x, x, x). ja □ nein □

f) Jeder Vektor der Form (α, α, α) kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja □ nein □

g) Jeder Vektor der Form (α, α, α) mit $\alpha \neq 0$ kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja □ nein □

Aufgabe 3.22

a) Kann man die in i) und ii) angegebenen Mengen zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen? Falls ja, führen Sie diese Ergänzung durch.

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

b) Kann man aus den Mengen in i) und ii) durch Wegstreichen von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden? Falls ja, wie?

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

4.1 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen und ihre Darstellung

So wie wir Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet haben, so betrachten wir nun Abbildungen von Vektorräumen in Vektorräume.

Definition 4.1 *Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V, W heißt* linear, *falls*

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= \alpha f(v) && \text{für alle } v \in V \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{K} \\ f(u+v) &= f(u) + f(v) && \text{für alle } u, v \in V \end{aligned}$$

Beispiele 4.2

- $V, W = \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f$ *ist lineare Funktion genau dann, wenn* $f(x) = \lambda x$ *für ein* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}, f(x) = \lambda x_1 + \mu x_2$
- $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2, f(x) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Die Interpretation im Kontext einer Basis ist hierbei wie folgt: Wenn $f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, *dann sind* y_1, y_2 *die Koordinaten des Bildvektors bezüglich der Standardbasis* e_1, e_2 *und* x_1, x_2 *die Koordinaten desselben Bildvektors in der Basis* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $V = \{p : t \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^k | \alpha_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ *(Polynomraum)*
  $f : V \to V; p \mapsto p'$, *wobei* $p' = t \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_2 t^2 + \ldots + k\alpha_k t^{k-1}$
  Diese Abbildung f ist linear, denn
  $f(\alpha p) = (\alpha p)' = \alpha p' = \alpha f(p)$,
  $f(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2' = f(p_1) + f(p_2)$.

Satz 4.3 *Seien V und W Vektorräume, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, sowie $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis: Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \overset{\text{linear}}{\Rightarrow} f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

D.h. f ist durch die Bilder w_i der Vektoren v_i eindeutig bestimmt. Z.z. ist noch f ist insgesamt linear:

$$\begin{aligned}
v &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \\
u &= \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \\
f(\lambda v) &= f\left((\lambda\alpha_1)v_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)v_n\right) \\
&= \lambda\alpha_1 f(v_1) + \ldots \lambda\alpha_n f(v_n) \\
&= \lambda\left(\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)\right) = \lambda f(v) \\
f(v+u) &= f\left((\alpha_1+\beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)v_n\right) \\
&= (\alpha_1+\beta_1)f(v_1) + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)f(v_n) \\
&= (\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)) + (\beta_1 f(v_1) + \ldots + \beta_n f(v_n)) = f(v) + f(u)
\end{aligned}$$

□

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume, $\dim V = n, \dim W = m, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Basis von $V, \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W. Da $f : V \longrightarrow W$ linear, ist f nach Satz 4.3 eindeutig bestimmt durch die Bildvektoren $\big(f(v_j)\big)_{j=1,\ldots,n}$. Diese sind in der Basis von W eindeutig darstellbar

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Die Zahlen a_{ij} mit $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ ordnen wir in einem Schema an:

$$A_f := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \big(a_{ij}\big)_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$$

Dieses Schema mit m Zeilen und n Spalten bezeichnet man als $m \times n-$*Matrix* A_f, die Menge aller $m \times n-$Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ nennen wir $\mathbb{R}^{m,n}$.

Folgerung 4.4 *Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$ und W ein Vektorraum mit Basis $\{w_1,\dots,w_m\}$ sowie $f: V \to W$ linear.*

(i) Die Matrix A_f charakterisiert eindeutig die lineare Abbildung $f: V \to W$ bezüglich gegebener Basen beider Vektorräume.
Achtung: Wählt man andere Basen, so ergibt sich in der Regel eine andere Matrix.

(ii) In den Spalten der Matrix A_f stehen die Koeffizienten der Bilder $f(v_j)$ der Basisvektoren $v_j, j = 1,\dots,n$ aus V bezüglich der Basis $\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$, siehe Gleichung (14).

(iii) Sei $x \in V$ mit der Basisdarstellung $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, dann folgt für $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f(v_j)x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}w_i\right) x_j = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)}_{= a_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} w_i$$

Dabei bezeichnet $a_i = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}$ die i-te Zeile von A_f. Ist also $(x_1,\dots,x_n)$ Basisdarstellung von $x \in V$, dann ist der Vektor $a_i \cdot (x_1,\dots,x_n)$ bestehend aus den euklidischen Skalarprodukten der Zeilen a_i von A_f mit den Koeffizienten $(x_1,\dots,x_n)$ der Basisdarstellung von x in der Basis von V die Basisdarstellung von $f(x)$ in der Basis von W.
Merkregel: Matrix *mal* Koeffizienten von x *ergibt* Koeffizienten von $f(x)$

$$\textit{Wir schreiben:} \begin{pmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (x_1,\dots,x_n) \\ a_2 \cdot (x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ a_m \cdot (x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Achtung: Man muss stets den Vektor $x \in V$ von seinen Koeffizienten $(x_1,\dots,x_n)$ bezüglich der Basis von V unterscheiden.

(iv) einfacher Fall: $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m, \{e_1,\dots,e_n\}$ Basis von $V, \{e_1,\dots,e_m\}$ Basis von W. In diesem Fall stimmen Vektor x und seine Koeffizienten bezüglich der Basis überein.

$$f(e_j) \overset{(iii)}{=} \begin{pmatrix} a_1 \cdot e_j \\ a_2 \cdot e_j \\ \vdots \\ a_m \cdot e_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}}_{= a^j}$$

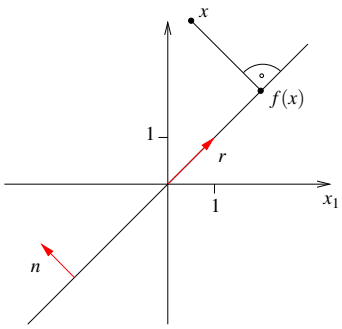
a^j bezeichnet dabei die j-te Spalte der Matrix A_f. Die Bilder der Einheitsvektoren stehen also in den Spalten von A_f (vgl. (ii)).

Beispiele 4.5 (Matrixdarstellungen von linearen Abbildungen)

(i) *Projektion auf eine Gerade im $\mathbb{R}^2$:*

Darstellung als Abbildung Darstellung von f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$f(x) = x - (x \cdot n)n$$



Die Linearität von f überprüft man leicht.

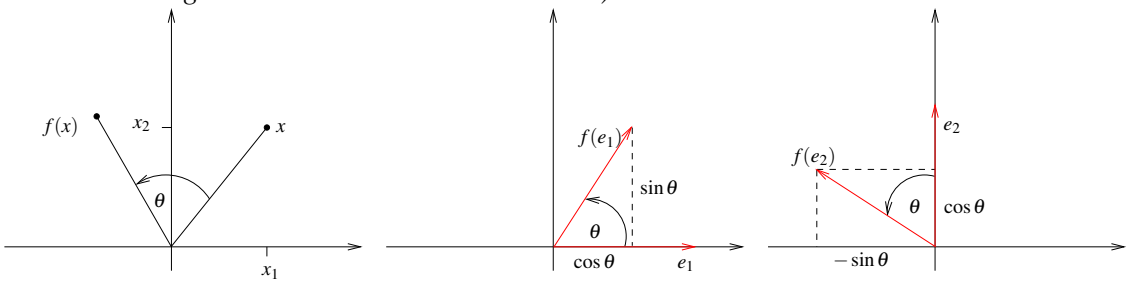
Matrixdarstellung von f:
Bezüglich der Basis $\{e_1, e_2\}$ in Urbildraum und Bildraum ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - (e_1 \cdot n)n = e_1 - n_1 n, \\ f(e_2) &= e_2 - n_2 n, \\ \Rightarrow A_f &= \begin{pmatrix} | & | \\ e_1 - n_1 n & e_2 - n_2 n \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - n_1 n_1 & -n_2 n_1 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2 n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \end{aligned}$$

Im Beispiel ist damit $A_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bezüglich der Basis $\{r, n\}$ in Urbildraum und Bildraum ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(r) &= r = 1r + 0n \rightsquigarrow 1.\ \textit{Spalte} \\ f(n) &= 0 = 0r + 0n \rightsquigarrow 2.\ \textit{Spalte} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

(ii) *Drehung:*
Elementargeometrisch ist klar, dass eine Drehung um den Ursprung eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist.
(d.h. statt den verlängerten Vektor zu drehen, kann man auch den Vektor nach der Drehung verlängern; statt den Ergebnisvektor einer Addition zu drehen, kann man auch die gedrehten Teilvektoren addieren.)



Matrixdarstellung in der Einheitsbasis $\{e_1, e_2\}$:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

(iii) *Skalarprodukt mit einem konstanten Vektor:*

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x$ *für festes* $a \in \mathbb{R}^n$*; offensichtlich ist* f *linear.*

Matrixdarstellung bzgl. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *als Basis des* $\mathbb{R}^n$ *und* $\{1\}$ *als Basis des Vektorraums* $\mathbb{R}$ $(\dim \mathbb{R} = 1)$*:*

$$A_f = (a \cdot e_1, \ldots, a \cdot e_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

(iv) *Multiplikation eines Skalars mit einem konstanten Vektor:*

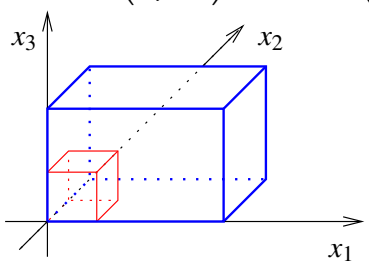
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, f(\lambda) = \lambda a$ *für festes* $a \in \mathbb{R}^n$*; offensichtlich ist* f *linear.*

Matrixdarstellung bzgl. $\{1\}$ *als Basis von* $\mathbb{R}$ *und* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *als Basis des* $\mathbb{R}^n$*:*

$$A_f = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

Bild des Basisvektors 1 *ist* $1a = a$

(v) *Streckung:* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_2 \\ \gamma x_3 \end{pmatrix}$ *für* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; *Linearität* ✓



Matrixdarstellung bzgl. $\{e_1, \ldots, e_n\}$*:*

$$A_f = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \alpha e_1 & \beta e_2 & \gamma e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

(vi) $V, W = \mathscr{P}^k$ *Raum der Polynome vom Grad* $\leq k, f : V \longrightarrow W; p \mapsto p'$
(Linearität haben wir bereits nachgewiesen, siehe Bsp. 4.2)

Darstellung bzgl. der Basis $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3, \ldots, t \mapsto t^k\}$*:*

$$\begin{aligned}
f(t \mapsto 1) &= (t \mapsto 0) && \Rightarrow \text{1. Spalte von } A_f = (0,\ldots,0)^T \\
f(t \mapsto t) &= (t \mapsto 1) && \Rightarrow \text{2. Spalte von } A_f = (1,0,\ldots,0)^T \\
f(t \mapsto t^2) &= 2(t \mapsto t) && \Rightarrow \text{3. Spalte von } A_f = (0,2,0,\ldots,0)^T \\
f(t \mapsto t^i) &= (t \mapsto it^{i-1}) = i(t \mapsto t^{i-1})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & 2 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 3 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & k-1 & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & k \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

Darstellung bzgl. der Basis $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto \frac{t^2}{2!}, t \mapsto \frac{t^3}{3!}, \ldots, t \mapsto \frac{t^k}{k!}\}$*:*

$$f\left(t \mapsto \frac{t^i}{i!}\right) = \left(t \mapsto i\frac{t^{i-1}}{i!}\right) = \left(t \mapsto \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & 1 \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

(vii) $V, W = \mathscr{P}^2, f : V \longrightarrow W,\ f(p) = q$*, wobei* $q(t) = p(t-s)$ *für festes* $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2) &= (t \mapsto a_0 + a_1(t-s) + a_2(t-s)^2) \\
&= (t \mapsto (a_0 - a_1 s + a_2 s^2) + (a_1 - 2a_2 s)t + a_2 t^2)
\end{aligned}$$

Die Linearität von f *ist wieder leicht nachzurechnen.*

Matrixdarstellung in der Basis $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$:

$$\begin{aligned}
f(t \mapsto 1) &= (t \mapsto 1) = 1(t \mapsto 1) \\
f(t \mapsto t) &= (t \mapsto t - s) = -s(t \mapsto 1) + 1(t \mapsto t) \\
f(t \mapsto t^2) &= (t \mapsto t^2 - 2st + s^2) = s^2(t \mapsto 1) - 2s(t \mapsto t) + 1(t \mapsto t^2) \\
\Rightarrow A_f &= \begin{pmatrix} 1 & -s & s^2 \\ 0 & 1 & -2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(viii) *Identische Abbildung $f : V \to V,\ f(x) = x$:*
Bezüglich gleicher Basen im Urbild- und im Bildraum ergibt sich stets die sogenannte Einheitsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

(ix) *Drehung in der Ebene $\{te_i + se_j \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^n$:*

Erinnerung: $n = 2 : \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Gedreht wird nur in der e_i, e_j – Ebene. Alle anderen Richtungen bleiben unberührt. Es soll gelten:
$f(e_k) = e_k$ für $k \neq i$ und $k \neq j$, d.h. in der k-ten Spalte steht eine 1 an der k-ten Zeile, in den anderen Zeilen nur Einträge 0, denn in diese Richtung wird nichts „hineingedreht". Auch in der k-ten Zeile steht neben der 1 in der k-ten Spalte ansonsten nur 0.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & c & & & & -s & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & s & & & & c & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= \cos\theta \\ s &= \sin\theta \end{aligned}$$

Weitere Beispiele finden Sie in den Übungen 4.11 und 4.12.

Bemerkung 4.6 *Sei V ein Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann lässt sich ein Vektor $x \in V$ bezüglich der Basis B durch Koordinaten $x^B = (x_i^B)_{i=1,\dots,n}$ darstellen.*
Wenn $V = \mathbb{R}^n$ und $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis ist, so ist

$$x = (x_i)_{i=1,\dots,n} = (x_i^E)_{i=1,\dots,n} = x^E,$$

der Vektor ist also gleich seiner Koordinatendarstellung bezüglich der Standardbasis.
Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und A_f die Matrix zu f bezüglich der Standardbasen in V und W ist, dann gilt also, dass

$$f(x) = A_f\, x.$$

Nur in diesem Fall kann man lineare Abbildungen und Matrizen ohne weiteres identifizieren. In allen anderen Fällen muss man stets dazu sagen, bezüglich welcher Basen in V und W die Matrix gemeint ist.

4.2 Verkettung von linearen Abbildungen und das Matrizenprodukt

Beispiel 4.7 *Wir drehen im $\mathbb{R}^2$ erst um einen Winkel α, dann um den Winkel β (vgl. obiges Beispiel (ii)):*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{\alpha\text{-Drehung}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)x_2 \\ (\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \overset{\beta\text{-Drehung}}{\longmapsto} & \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)x_2 \\ (\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)x_1 - (\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)x_2 \\ (\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)x_1 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)x_2 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Hintereinanderausführen zweier Drehungen ergibt also wieder eine Drehung.
Allgemein kann man für lineare Abbildungen zeigen:

Lemma 4.8 *Seien V, W, U Vektorräume, und $g : U \to W$ sowie $f : W \to V$ lineare Abbildungen. Dann ist $f \circ g : U \to V$ ebenfalls eine lineare Abbildung.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(\lambda \underbrace{x}_{\in U}) &= f(\underbrace{g(\lambda x)}_{\in W}) \overset{g \text{ linear}}{=} f(\lambda g(x)) \overset{f \text{ linear}}{=} \lambda f(g(x)) = \lambda (f\circ g)(x) \\
(f\circ g)(x+y) &= f(g(x+y)) \overset{g \text{ linear}}{=} f(g(x)+g(y)) \overset{f \text{ linear}}{=} f(g(x))+f(g(y)) \\
&= (f\circ g)(x)+(f\circ g)(y)
\end{aligned}$$

□

Zu Basen $D = \{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ von V, $E = \{w_j\}_{j=1,\dots,m}$ von W und $F = \{u_l\}_{l=1,\dots,k}$ von U seien y^D, z^E und x^F Koordinatenvektoren von $y \in V$, $z \in W$ und $x \in U$ sowie $B \in \mathbb{R}^{m,k}$ die Matrixdarstellung von g und $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ Matrixdarstellung von f. Wie sieht nun die Matrixdarstellung von $f \circ g$ aus?

$$\begin{aligned}
z &= g(x), & y &= f(z) = f(g(x)) \\
z^E &= Bx^F, & y^D &= Az^E = A(Bx^F) \\
z_j^E &= \sum_{l=1}^{k} B_{jl} x_l^F, & y_i^D &= \sum_{j=1}^{m} A_{ij} z_j^E = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} A_{ij}B_{jl}x_l^F = \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jl}\right)}_{=:C_{il}} x_l^F
\end{aligned}$$

Die Matrix

$$C \in \mathbb{R}^{n,k} \quad \text{mit } C_{il} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jl}$$

ist also die Darstellung der Abbildung $f \circ g$ bezüglich der Basen $D = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $F = \{u_1, \dots, u_k\}$. Wir schreiben $C = AB$ (*Matrizenprodukt*), und können damit die Koordinaten von $y = (f \circ g)(x)$ berechnen:

$$y^D = A(Bx^F) = (AB)x^F = Cx^F$$

Merkregel 4.9 (Matrizenprodukt) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,k}$. Dann ist das Matrizenprodukt $AB \in \mathbb{R}^{n,k}$ folgendermaßen definiert:*

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jl}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ l=1,\dots,k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{pmatrix}}_{\textit{Zeilen von } A} \begin{pmatrix} | & & | \\ b^1 & \cdots & b^k \\ | & & | \end{pmatrix} \Bigg\} \textit{Spalten von } B$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot b^1 & \cdots & a_1 \cdot b^k \\ \vdots & & \vdots \\ a_n \cdot b^1 & \cdots & a_n \cdot b^k \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.10

(i) *Wenn die Matrix B nur aus einer Spalte besteht, entspricht das Matrizenprodukt dem Matrix-Vektor-Produkt.*

(ii) *Da $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Abbildungen f, g und h, gilt auch $(AB)C = A(BC)$, für Matrizen A, B und C. Das Matrizenprodukt ist also assoziativ.*

Beispiele 4.11

(i) *In Beispiel 4.7 ergibt sich die Drehmatrix für den Winkel $\alpha + \beta$ als Matrizenprodukt der einzelnen Drehmatrizen für den Winkel α und β.*

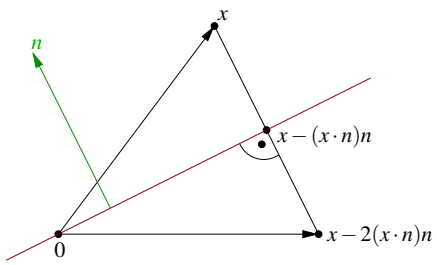
(ii)

$$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2,3}, B \in \mathbb{R}^{3,2} \text{ mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) $V = W = U = \mathbb{R}^n, \quad f(x) = x - 2(x \cdot n)n$
Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $n(\|n\| = 1)$ (vgl. Beispiel 4.5, (i))
Interpretation: x minus 2 mal die Länge der Projektion von x auf n in Richtung n



<u>*Matrixdarstellung:*</u> $f(x) = \overbrace{(\mathbb{1} - 2nn^T)}^{=A}x$

$$\text{wobei } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \in \mathbb{R}^{n,1},$$

$$n^T = (- n -) \text{ Zeilenvektor} \in \mathbb{R}^{1,n}.$$

Hierzu: $f(x) = \underbrace{\mathbb{1}x}_{=x} - 2n(\underbrace{n^T x}_{\substack{(-n-)\ \begin{pmatrix} | \\ x \\ | \end{pmatrix} \\ n\cdot x}}) = x - 2n(n\cdot x)$ *(vgl. Beispiel 4.5 (iii))*

Nun betrachten wir:

$$\begin{aligned}
(f\circ f)(x) &= f(x-2(n\cdot x)n) \\
&= x-2(n\cdot x)n-2\left[n\cdot(x-2(n\cdot x)n)\right]n \\
&= x-2(n\cdot x)n-2(n\cdot x)n+4(n\cdot x)\underbrace{n\cdot n}_{=\|n\|^2=1}\ n = x
\end{aligned}$$

Interpretation: Spiegelung verkettet mit Spiegelung ist die Identität.

<u>*Dasselbe in Matrixformulierung:*</u>

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{1}-2nn^T)(\mathbb{1}-2nn^T) = \mathbb{1}\mathbb{1}-2nn^T\mathbb{1}-\mathbb{1}2nn^T+4nn^Tnn^T \\
&= \mathbb{1}-4nn^T+4nn^T = \mathbb{1} \\
&\textit{denn}\quad nn^Tnn^T = \begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix}\underbrace{(-n-)\begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix}}_{n\cdot n=1}(-n-) = \underbrace{\begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix}(-n-)}_{\in\mathbb{R}^{n,n}} = nn^T
\end{aligned}$$

(iv) $V = W = U = \mathscr{P}^k$ *mit Basis* $\{t\mapsto 1, t\mapsto t, t\mapsto \frac{t^2}{2!}, t\mapsto \frac{t^3}{3!},\dots,t\mapsto \frac{t^k}{k!}\}$ *und der linearen Abbildung* $f(p) = p'$ *(vgl. Beispiel 4.5 (vi)). Es gilt:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\quad AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Matrixdarstellung zu $(f\circ f)(p) = p''$.

(v) *(vgl. Beispiel 4.5 (vii)) Es seien* $V = W = U = \mathscr{P}^2$ *mit Basis* $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$. *Betrachte die Abbildungen*

$$f(p)(t) = p(t-s), \quad d.h. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -s & s^2 \\ 0 & 1 & -2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(p)(t) = p(t-r), \quad d.h. \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -r & r^2 \\ 0 & 1 & -2r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -s-r & r^2+2sr+s^2 \\ 0 & 1 & -2r-2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(s+r) & (s+r)^2 \\ 0 & 1 & -2(s+r) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(p)(t) = p(t-(s+r)).$$

(vi) *Es seien* $V = W = U = \mathbb{R}^2$ *mit der Basis* $\{e_1, e_2\}$. *Betrachte die Abbildungen*

$$\begin{aligned} f &= \textit{Drehung um Winkel } \theta, \quad A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \\ g &= \textit{Drehung um Winkel } -\theta = (f)^{-1} \textit{ (Umkehrabbildung)}, \\ B &= \begin{pmatrix} cos(-\theta) & -sin(-\theta) \\ sin(-\theta) & cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow AB &= \begin{pmatrix} c^2+s^2 & -cs+sc \\ -sc+cs & s^2+c^2 \end{pmatrix} \overset{cos^2\theta+sin^2\theta=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = x. \end{aligned}$$

Definition 4.12 *Sei* $f : V \longrightarrow W$ *linear, dann heißt*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\,(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \quad \textit{der } \mathrm{Kern} \textit{ von } f \\ \textit{und} \quad &\mathrm{Bild}\,(f) = \{f(v) \mid v \in V\} \quad \textit{das } \mathrm{Bild} \textit{ von } f. \end{aligned}$$

Bei gegebenen Basen für V *und* W *und einer Matrixdarstellung* A *zu* $f : V \longrightarrow W$, *schreiben wir auch* $\mathrm{Ker}\,(A)$ *bzw.* $\mathrm{Bild}\,(A)$.

Beispiele 4.13

(i) *Es seien* $V = W = \mathscr{P}$, *der Raum aller Polynome (nicht endlich dimensionaler Raum)*

und $f(p) = p'$. Dann sind

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) &= \{p \in \mathscr{P} \mid p' = 0\} = \{t \mapsto \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{(konstante Funktionen)}, \\
\operatorname{Bild}(f) &= \mathscr{P}, \quad \textit{da zum Polynom } p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^k \\
&\quad \textit{das Polynom } q(t) = \alpha_0 t + \frac{\alpha_1}{2} t^2 + \frac{\alpha_2}{3} t^3 + \ldots + \frac{\alpha_k}{k+1} t^{k+1} \\
&\quad \textit{die Eigenschaft } q' = p \textit{ hat.} \\
&\quad \textit{(D.h. jedes Polynom kann durch Ableitung aus} \\
&\quad \textit{einem anderen hervorgegangen sein.)}
\end{aligned}$$

(ii) Es seien $V = W = \mathscr{P}^k$ und $f(p) = p'$. Dann sind

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) &= \textit{konstante Funktionen} = \mathscr{P}^0, \\
\operatorname{Bild}(f) &= \mathscr{P}^{k-1}, \textit{ da Polynome mit Term } \alpha_k t^k \textit{ sich} \\
&\quad \textit{nicht durch Ableitung über } \mathscr{P}^k \textit{ ergeben.}
\end{aligned}$$

(iii) Betrachtet man die Projektion auf eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Beispiel 4.5 (i)): $f(x) = x - (x \cdot n)n$ wobei n senkrecht auf der Geraden steht und $\|n\| = 1$. Offenbar ist $\operatorname{Bild}(f)$ genau die Gerade auf die projiziert wird. $\operatorname{Ker}(f)$ enthält alle Vektoren die auf den Nullvektor projiziert werden, das sind genau diejenigen die senkrecht auf der Geraden stehen (und die ebenfalls eine Gerade durch den Ursprung bilden).

(iv) Betrachten wir die lineare Abbildung zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\right\} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

D.h. der Kern ist geometrisch eine Gerade.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Bild}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid \textit{es gibt } x \in \mathbb{R}^3 \textit{ mit } Ax = b \right\} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_2 \\ & & 2x_2 & & & = & b_3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & = & b_1 - b_3 \\ x_1 + x_3 & = & b_2 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} b_3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & = & b_1 - b_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} b_3 \\ 0 & = & b_1 - b_3 - b_2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ & \operatorname{Bild}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - b_3 - b_2 = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

D.h. das Bild ist geometrisch eine Ebene.

Allgemein gilt, falls $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V ist:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Bild}(f) &= \{ f(v) \mid v \in V \} \\
&= \left\{ f(v) \mid v \in \operatorname{span}\{v_1, \dots v_n\} \right\} \\
&= \operatorname{span}\{ f(v_1), \dots f(v_n) \}
\end{aligned}
$$

Also gilt für eine Matrix A

$$
\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\{Ae_1, \dots Ae_n\} = \operatorname{span}\{a^1, \dots a^n\},
$$

wobei a^i (wie oben) die Spalten von A sind. Das Bild einer Matrix ist also der von den Spalten aufgespannte Raum.

Also kann man alternativ auch folgendermaßen vorgehen: Addition und Multiplikation von Spalten *ändert offensichtlich das Bild (d.h. die Menge aller als Linearkombination darstellbaren Vektoren) nicht. Man bringt die Matrix also durch Spaltenumformungen auf eine einfachere Form:*

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Beide Darstellungen beschreiben die selbe Ebene.

Weitere Beispiele finden Sie in Aufgabe 4.9.

Satz 4.14 $\mathrm{Ker}\,(f)$ *ist ein Untervektorraum von* V. $\mathrm{Bild}\,(f)$ *ist ein Untervektorraum von* W.

Beweis: $\mathrm{Ker}\,(f)$ und $\mathrm{Bild}\,(f)$ sind beide nicht leer, denn sie enthalten stets den Nullvektor. Weiterhin:

(i) $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow f(v_1) = 0,\ f(v_2) = 0 \overset{f\ linear}{\Rightarrow} f(v_1+v_2) = 0 \Rightarrow v_1+v_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

$v \in \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow f(v) = 0,\ f(\alpha v) \overset{f\ linear}{=} \alpha f(v) = 0 \Rightarrow \alpha v \in \mathrm{Ker}\,(f)$

(ii) $f_1 = f(v_1),\ f_2 = f(v_2)$, d.h. $f_1, f_2 \in \mathrm{Bild}\,(f)$,

z.z. $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathrm{Bild}\,(f)$.

Hierzu: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \overset{f\ linear}{=} \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$

$\Rightarrow$ Beh.

□

Bemerkung 4.15

- *Wenn* $(x_i^B)_i$ *Komponenten von* x *bzgl. Basis* B *von* V *und* $(b_i^C)_i$ *Komponenten von* b *bzgl. Basis* C *von* W*, so ist* $\mathrm{Ker}\,(f)$ *die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems* $Ax^B = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f) &= \left\{x \in V \mid Ax^B = 0\right\} \\ \mathrm{Bild}\,(f) &= \left\{b \in W \mid \textit{Es gibt ein } x \in V \textit{ mit } Ax^B = b^C\right\} \end{aligned}$$

- *Sei* x_0 *eine Lösung von* $f(x) = b$*, dann ist* $\{x_0 + x \mid x \in \mathrm{Ker}\,(f)\}$ *die gesamte Lösungsmenge.*

Hierzu: (i) $f(x_0+x) = f(x_0) + f(x) = b + 0 = b$

$\Rightarrow x_0 + x$ *ist auch Lösung.*

(ii) *Sei* y *eine beliebige Lösung, d.h.* $f(y) = b$;

definiere $x := y - x_0$, $f(x) = f(y) - f(x_0) = b - b = 0$

$\Rightarrow y = x_0 + x$ *mit* $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

□

Diese Lösungsmengen sind affine Unterräume.

Betrachte: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\} m \text{ Zeilen}}_{n \text{ Spalten}}$$

(wobei gelte $a_{11}, \dots a_{kk} \neq 0$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, k \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \sum_{j=i+1}^{n} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \text{ für alle } i = 1, \dots, k \right\} \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung des Kerns sind also die $x_{k+1}, \dots, x_n$ frei wählbar. Anschließend kann man $x_k = \sum_{j=k+1}^{n} -\frac{a_{kj}}{a_{kk}} x_j$ aus diesen Werten berechnen. Sobald man x_k kennt, kann man analog x_{k-1} berechnen etc. Für das Bild erhalten wir

$$\operatorname{Bild}(A) = \{ b \in \mathbb{R}^m \mid b_{k+1} = \dots = b_m = 0 \}.$$

Zu beliebig wählbaren $b_1, \dots b_k$ kann man nämlich wie oben ein Urbild berechnen, indem man $x_{k+1}, \dots, x_n$ frei wählt und dann mittels $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$ die weiteren Komponenten $x_k, \dots x_1$ berechnet.

Beobachtung:
Bei $x \in \operatorname{Ker}(A)$ könnnen wir also $n-k$ Komponenten frei wählen, die anderen ergeben sich dann automatisch. Zu $b \in \operatorname{Bild}(A)$ können wir k Komponenten frei wählen, die restlichen müssen Null sein.

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Bild}(A) &= k \\ \dim \operatorname{Ker}(A) &= n-k \end{aligned}$$

Ingesamt sehen wir, dass

$$\dim \operatorname{Bild}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = n = \dim \text{Urbildraum}.$$

Überlegungen zum Kern einer Abbildung und dessen Dimension finden Sie auch in Übung 4.13.

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Wenden wir uns nun dem Lösen linearer Gleichungssysteme zu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} A & x & = & b \\ \in \mathbb{R}^{m,n} & \in \mathbb{R}^n & & \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Beispiel 4.16 *Betrachte*

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{array}{l} I \\ II - 2I \\ III - I \end{array} \right.$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{array}{l} I \\ II \\ III - \frac{1}{2}II \end{array} \right.$$

Nun setzen wir rückwärts ein:

$$\begin{aligned} A^{(3)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= b^{(3)} \\ \frac{1}{2}x_3 &= 2 \Rightarrow x_3 = 4 \\ -2x_2 - 3 \cdot 4 &= 0 \Rightarrow x_2 = -6 \\ x_1 - 6 + 8 &= 1 \Rightarrow x_1 = -1 \end{aligned}$$

Man kann die hier verwendeten Zeilenoperationen auch als Matrizenmultiplikation auffassen. Dazu definiert man

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

und stellt fest, dass

$$A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)}, \quad b^{(2)} = L^{(1)}b^{(1)}, \qquad A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)}, \quad b^{(3)} = L^{(2)}b^{(2)}.$$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Übung 4.10. Aufgabe 4.22 diskutiert, welche Arten von linearen Zeilenoperationen bei der LR-Zerlegung *nicht* erlaubt sind.

Allgemein erhält man **das Gaußsche Eliminationsverfahren**
1. Schritt: Angenommen, $a_{11} \neq 0$.

Multipliziere die erste Zeile mit $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, addiere dazu die $i-$te Zeile und lege das Ergebnis in der $i-$ten Zeile ab:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\underbrace{\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}+a_{21}\right)}_{=0}x_1 & + & \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}+a_{22}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}+a_{2n}\right)x_n & = & -\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1+b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{11}+a_{m1}\right)}_{=0}x_1 & + & \left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12}+a_{m2}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}+a_{mn}\right)x_n & = & -\frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1+b_m
\end{array}$$

Dies kann man als neues Gleichungssystem schreiben:

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

Dabei ist $A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)}$ ein Matrizenprodukt und $b^{(2)} = L^{(1)}b^{(1)}$ ein Produkt aus Matrix mal Vektor mit den Matrizen $L^{(1)} \in R^{m,m}$ sowie $A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$ und

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ -\frac{a_{i1}}{a_{11}} & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -l_{21}^{(1)} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ -l_{i1}^{(1)} & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -l_{m1}^{(1)} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $l_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Hierbei führt die Multiplikation mit der Matrix $L^{(1)}$ von links dazu, dass die neue i-te Zeile von $A^{(2)}$ gleich der i-ten Zeile von A minus $\frac{a_{i1}}{a_{ii}}$ mal die erste Zeile von A ist. Damit ergibt sich:

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{(2)}x = b^{(2)}$$

Um einzusehen, dass diese Operation die Lösungsmenge tatsächlich nicht verändert, überlegt man sich zunächst, dass

$$Ax = b \qquad \Rightarrow \qquad A^{(2)}x = L^{(1)}Ax = L^{(1)}b = b^{(2)}.$$

Wenn man in $L^{(1)}$ alle Vorzeichen unter der Diagonalen umkehrt, so erhält man die umgekehrten Zeilenoperationen (Addition statt Subtraktion). Damit kann man also aus $A^{(2)}$ wieder A machen, und daher erhält man analog die umgekehrte Folgerung

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \Rightarrow Ax = b.$$

Zusammen ergibt sich, dass beide Gleichungssysteme äquivalent sind.

<u>2. Schritt:</u> Angenommen, $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
Multipliziere die zweite Zeile mit $-\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, addiere dazu die $i-$te Zeile und lege das Ergebnis wieder in der $i-$ten Zeile ab.

<u>Es ergibt sich ein neues Gleichungssystem:</u>
$A^{(3)}x = b^{(3)}$ mit $A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)}, b^{(3)} = L^{(2)}b^{(2)}$, wobei

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -l_{32}^{(2)} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -l_{m2}^{(2)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } l_{i2}^{(2)} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

$\vdots$
<u>$k-$ter Schritt:</u> $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$ mit $A^{(k+1)} = L^{(k)}A^{(k)}, b^{(k+1)} = L^{(k)}b^{(k)}$, wobei

$$\mathbb{R}^{m,m} \ni L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -l_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -l_{m,k}^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } l_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Schema 4.17 (Algorithmus der Gauß-Elimination)

Für den Fall $m = n$ und $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$:

```
function A = gauss( A, b )
% Gauss method
% argument "A" is a matrix with A(i,j) = A_ij
% and "b" is the right hand side.

% get the length of the vector
[m,n] = size( b );

for k = 1:(n-1)                          % eliminiere Spalte
    for i =(k+1):n                       % bearbeite Zeile
        l = A(i,k)/A(k,k);
        for j = k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - l*A(k,j);
        end
        b(i) = b(i) - l*b(k);
        A(i,k) = 0;         % nicht unbedingt notwendig
    end
end
```

Was macht man, wenn $a_{kk}^{(k)} = 0$ gilt?

- Zeilen vertauschen (Gleichungen umnummerieren)
- Spalten vertauschen (Variablen umnummerieren)

Wenn beides nicht geht, dann sind bereits alle Zeilen ab Zeile k nur mit Nullen gefüllt:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{pmatrix}$$

Fall 1: $b_k^{(k)} = \cdots = b_m^{(k)} = 0 \Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem ist lösbar und $x_k, \ldots x_n$ sind (nach eventueller Umnummerierung) frei wählbar $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A) = n - (k-1)$.

Fall 2: $b_i^{(k)} \neq 0$ für ein $i \in [k, m] \Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.
Ein Beispiel für diese Fälle finden Sie in Übung 4.14.

Wenn das Verfahren in dieser Form bis zum Ende durchführbar ist, erhalten wir ein Gleichungssystem der Form

$$Rx = b \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dies kann man von unten nach oben durch Einsetzen lösen.

Schema 4.18 (Rückwärtseinsetzen)

```
function x = bw_insert( R, b )
% insert backwards
% argument "R" is the upper right triangular matrix
% and "b" is the right hand side.

% get the length of the vector
[m,n] = size( b );

for k = n:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - R(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/R(k,k);
end
```

Folgerung 4.19 (Dimensionsformel) *Sei $f : V \to W$ linear und* $\dim V$ *endlich, dann gilt:*

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$$

Beweis: Betrachte die Matrixdarstellung A_f von f zu irgendwelchen Basen in V und W. Man kann diese Matrix unter Zuhilfenahme von linearen Zeilenoperationen, Zeilen- und Spaltenvertauschungen immer auf die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & a_{kk} & \dots \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

(wobei $a_{ii} \neq 0$ für alle $i \leq k$) bringen, wie wir uns anhand des Gauß-Verfahrens überlegt haben. Wir haben uns ebenfalls überlegt, dass sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems dadurch nicht verändert, wenn man die selben Operationen auch auf die rechte Seite anwendet.

Um nun $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Ker}(A_f)$ zu berechnen, suchen wir Lösungen von $A_f x = 0$. Da die rechte Seite der Nullvektor ist, verändert sie sich durch Zeilenoperationen nicht. Wir können also stattdessen das Gleichungssystem $A\tilde{x} = 0$ betrachten, wobei $\tilde{x}$ aus x durch Umnummerieren der Einträge entsprechend der durchgeführten Spaltenvertauschungen entsteht. Wie wir uns bereits oben überlegt haben, kann man dann $\tilde{x}_{k+1}, \cdots, \tilde{x}_n$ frei wählen, entsprechend sind also in x auch $n-k$ Komponenten frei wählbar.
Analog kann man sich überlegen, dass sich die Dimension des Bildes durch linearen Zeilenoperationen, und Zeilenvertauschungen nicht ändert (denn die Operationen, die auf der rechten Seite durch Multiplikation mit den Matrizen L^k durchgeführt werden, ändern die Bilddimension nicht — vielmehr sind diese sind invertierbar). Spaltenvertauschungen haben offenbar gar keinen Einfluss auf das Bild. Oben haben wir bereits gesehen, dass $\dim \operatorname{Bild}(A) = k$. Insgesamt gilt also

$$\dim V = n = n - k + k = \dim \operatorname{Ker}(A_f) + \dim \operatorname{Bild}(A_f).$$

□

Folgerung 4.20 (Spaltenrang = Zeilenrang) *Für den Spaltenrang definiert als die Dimension des von den Matrixspalten aufgespannten Raums (=*$\dim \operatorname{Bild}(A)$*), und den Zeilenrang, definiert als die Dimension des von den Matrixzeilen aufgespannten Raums, gilt:*

Spaltenrang = Zeilenrang

Beweis: Wie oben bringt man die Matrix durch lineare Zeilenoperationen, Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & a_{kk} & \cdots \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die ersten k Zeilen dieser Matrix sind offensichtlich linear unabhängig, da $a_{ii} \neq 0$. Also ist auch ihr Zeilenrang gleich k. Durch lineare Zeilenoperationen verändert sich die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Raumes aber nicht, denn die neuen Zeilen sind ja Linearkombinationen der alten Zeilen und umgekehrt. Vertauschungen (d.h. Umnummerierungen) ändern die Dimension ebenfalls nicht. Also ist auch der Zeilenrang der Ursprungsmatrix k.
Dass der Spaltenrang k ist, haben wir uns ja bereits oben überlegt.

□

Notation 4.21 *Wir sagen für Spalten- bzw. Zeilenrang*

Rang von A $\quad (\operatorname{Rang}(A))$

Den Rang einer Matrix berechnen Sie in Übung 4.15.

Folgerung 4.22 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\operatorname{Rang}(A) = n$ (maximaler bzw. voller Rang). Daraus folgt*

(i) Die Zeilen- und Spaltenvektoren bilden jeweils eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ *(* $\dim \operatorname{Ker}(A) = 0$ *)*

(iii) Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

4.4 Inverse Matrizen

Wenn eine quadratische Matrix A vollen Rang hat, dann gibt es zu jedem b genau ein x mit $Ax = b$. Es gibt also eine Abbildung (die Umkehrabbildung zu $x \mapsto Ax$), die die rechte Seite b auf die Lösung x des zugehörigen Gleichungssystems abbildet. Wenn diese Abbildung linear ist (was man zeigen kann), so muss sie durch eine Matrix darstellbar sein. Die Matrix können wir bestimmen, indem wir die Umkehrabbildung für alle Einheitsvektoren auswerten.
Dazu betrachten wir zunächst eine sogenannte Rechtsinverse Matrix $\mathscr{Y}$ und eine Linksinverse $\mathscr{X}$:

- Löse die n Gleichungssysteme: $A \begin{pmatrix} | \\ y_i \\ | \end{pmatrix} = e_i$

  Definiere die Matrix $\mathscr{Y} = \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \cdots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, dann gilt

$$A\mathscr{Y} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

  Wie bisher bezeichnen mit $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ die *Einheitsmatrix*, die die identische Abbildung (bei fester Basis) $f : V \to V$, $x \mapsto x$ darstellt.

- Löse die n Gleichungssysteme: $(\text{—}\, x_i \,\text{—})A = (\text{—}\, e_i \,\text{—})$.

Definiere die Matrix $\mathscr{X} = \begin{pmatrix} — & x_1 & — \\ — & x_2 & — \\ & \vdots & \\ — & x_n & — \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\mathscr{X}A = \begin{pmatrix} — & e_1 & — \\ & \vdots & \\ — & e_n & — \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

- Nun zeigen wir $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$: $\quad \mathscr{X} = \mathscr{X}\mathbb{1} = \mathscr{X}A\mathscr{Y} = \mathbb{1}\mathscr{Y} = \mathscr{Y}$

Zusammengefasst gelangen wir zu folgender Definition:

Definition 4.23 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt* invertierbar *, falls es eine Matrix B gibt mit:*

$$BA = AB = \mathbb{1}$$

Wir schreiben $A^{-1} := B$.

Falls $\operatorname{Rang}(A) = n$ ist, so ist A invertierbar und man berechnet A^{-1} wie oben beschrieben, $A^{-1} = \mathscr{X} = \mathscr{Y}$.

Beispiele 4.24

- $A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$
- $A = \mathbb{1} - 2nn^T$ *mit* $||n|| = 1$ *(Spiegelung), dann ist* $A^{-1} = A$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Weitere Beispiele für inverse Matrizen finden Sie in Übung 4.16 und 4.1.

Betrachten wir die Struktur des Raumes der Matrizen:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{(skalare Multiplikation)}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{(Addition)}$$

Wir überprüfen leicht die Vektorraumaxiome für den Raum der Matrizen. Wenn man die Spalten einer $m \times n$ Matrix untereinander in einem Spaltenvektor mit mn Einträgen anordnet, so werden Matrizen zu Vektoren im $\mathbb{R}^{mn}$. Die skalare Multiplikation überträgt sich genauso wie die komponentenweise Addition. Damit sind die Vektorraumeigenschaften dann auch offensichtlich erfüllt.

Folgerung 4.25 *Der Raum der $m \times n$ Matrizen ist ein Vektorraum der Dimension mn.*

Eine Basis des Raums $\mathbb{R}^{m,n}$ ist gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Konkret auf dem $\mathbb{R}^{2,2}$ erhält man die kanonische Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir $n \times n$-Matrizen und die Matrizenmultiplikation. Es gilt

$$A, B, C \in \mathbb{R}^n : \quad A(BC) = (AB)C.$$

Das heisst für die Matrizenmultiplikation gilt ein Assoziativgesetz. Ebenso gilt ein Distributivgesetz, nämlich

$$A, B, C \in \mathbb{R}^n : \quad (A+B)C = AC + BC.$$

Aber Achtung: Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$, d.h. die Matrizenmultiplikation ist **nicht** kommutativ. Ferner gibt es Matrizen $A \neq 0$, $B \neq 0$ mit $AB = 0$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.26

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notation 4.27 *Mit $GL(n)$ bezeichnen wir die Menge der invertierbaren Matrizen.*

Achtung: Für $n > 1$ ist $GL(n)$ kein Körper.
Den Zusammenhang zwischen dem Matrizenprodukt und der Matrix-Inversen betrachten Sie in Übung 4.2.

4.5 Die Gauß-Elimination als LR-Zerlegung

Kehren wir zur Gauß-Elimination zurück ($m = n$, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$):

$$\begin{aligned} R := \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} = A^{(n)} &= L^{(n-1)} A^{(n-1)} \\ &= L^{(n-1)} L^{(n-2)} A^{(n-2)} = L^{(n-1)} \dots L^{(1)} A \end{aligned}$$

Wir beobachten zunächst:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}}_{L^{(k)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}}_{(L^{(k)})^{-1}} = \mathbb{1}$$

D.h. die Matrizen $L^{(k)}$ sind invertierbar und die Inversen können leicht angeben werden. Wir folgern weiter:

$$\begin{aligned} R &= L^{(n-1)} \dots L^{(1)} A \\ \Rightarrow (L^{(n-1)})^{-1} R &= L^{(n-2)} \dots L^{(1)} A \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{(L^{(1)})^{-1} \dots (L^{(n-1)})^{-1}}_{=:L} R &= A \end{aligned}$$

Nun gilt es die Matrix L explizit zu bestimmen.

Ferner: $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & | & \ddots & & \\ & & l & & \ddots & \\ & & | & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & \tilde{L} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & | & \ddots & & \\ & & l & \tilde{L} & \ddots & \\ & & | & & & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt mittels Iteration $L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21}^{(1)} & \ddots & & \\ | & & \ddots & \\ l_{n1}^{(1)} & \cdots & l_{n(n-1)}^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$.

Zusammenfassend sehen wir, dass A zerlegt werden kann in eine linke untere Dreiecksma-

trix L und eine rechte obere Dreiecksmatrix R:

$$A = LR$$

Bemerkung 4.28 *Im Fall verschiedener rechter Seiten b und gleicher Matrix A:*

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Lösen von } Ax = b: & & \textit{1. Zerlege} A = LR \textit{ nur einmal} \\ \textit{Vorwärtseinsetzen} & \rightarrow & \textit{2. Löse } Ly = b \\ \textit{Rückwärtseinsetzen} & \rightarrow & \textit{3. Löse } Rx = y \end{array}\right\} LRx = b \Leftrightarrow Ax = b$$

Beispiel 4.29 *Für die Matrix aus Beispiel 4.16 erhalten wir die folgenden Matrizen L und R. Man sieht, dass in L genau dort Einträge (die weder Null noch Eins sind) stehen, wo in R Nullen stehen, man kann diese Einträge also igemeinsam in einer Matrix speichern.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & -2 & -3 \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 2 & 1 & \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

speichern

Schema 4.30 (*LR*-Zerlegung) *Im Fall $m = n$ unter der impliziten Annahme $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$ (d.h. ohne Zeilenvertauschung) speichert man die L-Matrix direkt im unteren Dreieck der Ausgangsmatrix (die 1-Einträge auf der Diagonalen muß man nicht speichern):*

```
function A = LRdecomposition( A )
% LR - decomposition
% argument "A" is a matrix with A(i,j) = A_ij
% L and R are stored in A

% get the size of the matrix
[m,n] = size( A );

for k = 1:(n-1)
    for i =(k+1):n
        l = A(i,k)/A(k,k);
        A(i,k) = l;
        for j = k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - l*A(k,j);
        end
    end
end
```

In Aufgabe 4.19 sehen Sie, wie man diese Funktion zusammen mit Vorwärts- und Rückwärts-Einsetzen zu einem Programm zum Lösen von linearen Gleichungssystemen zusammensetzt.

4.6 Determinanten

Bisher haben wir lineare Abbildungen kennengelernt, die mittels Matrizen kodiert werden. Ferner haben wir gesehen, dass Matrizen selber wieder einen Vektorraum bilden. Jetzt wollen wir eine wichtige spezielle Abbildung auf $n \times n$-Matrizen betrachten, die Determinante.

Wir suchen eine Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(D1) det ist linear in jeder Zeile, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \alpha a_j + \beta \tilde{a}_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \tilde{a}_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}$$

(D2) Ist $\operatorname{Rang}(A) < n$, dann ist $\det A = 0$

(D3) $\det \mathbb{1} = 1$

Beispiel 4.31 *Betrachten wir den Fall $n = 2$, d.h. 2×2 Matrizen:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Nachweis von (D1)*:*

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta \tilde{a}_{11} & \alpha a_{12} + \beta \tilde{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (\alpha a_{11} + \beta \tilde{a}_{11})\, a_{22} - (\alpha a_{12} + \beta \tilde{a}_{12})\, a_{21} \\ &= \alpha\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \beta\,(\tilde{a}_{11}a_{22} - \tilde{a}_{12}a_{21}) \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(analog hierzu für die zweite Zeile)

Achtung: *In der Regel ist* $\det(\alpha A) \neq \alpha \det A$ *und* $\det(A+\tilde{A}) \neq \det A + \det \tilde{A}$*!*

Nachweis von (D2)*:*

$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad$ *Zeilen linear abhängig.*

Ohne Beschränkung nehmen wir an: $a_{21} = \alpha a_{11}, a_{22} = \alpha a_{12}$

$$\Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{pmatrix} = \alpha a_{11} a_{12} - \alpha a_{12} a_{11} = 0$$

Nachweis von (D3)*:* $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

Damit ist gezeigt, dass die obige Formel den Axiomen (D1), (D2), (D3) genügt. Wir wissen aber weder, wie die Determinante für $n \times n$*-Matrizen aussieht, noch (auch für* 2×2 *Matrizen) ob die oben beschriebene die einzige Funktion auf Matrizen ist, die diesen Axiomen genügt.*

Determinanten von 2×2-Matrizen finden Sie in Übung 4.4, eine ähnliche Formel für 3×3-Determinanten in Aufgabe 4.20.

Satz 4.32 *Es gibt genau eine Abbildung* $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$*, die allen drei Eigenschaften* (D1), (D2), (D3) *genügt. Wir nennen diese Abbildung die Determinante und schreiben* $\det A$ *für* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$*.*

Bemerkung 4.33 *Dieser Satz macht zwei Aussagen:*
(Existenz) *Es gibt eine solche Abbildung.*
(Eindeutigkeit) *Es gibt nicht mehr als eine solche Abbildung.*
Bevor wir den Satz weiter diskutieren hier eine Hilfsaussage.

Lemma 4.34 $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei eine Abbildung, für die Eigenschaften* (D1), (D2), (D3) *gelten, dann folgt:*

(i) Falls man $\tilde{A}$ *aus* A *durch Vertauschen zweier Zeilen erhält, so gilt*

$$\det \tilde{A} = -\det A.$$

(ii) Falls man $\tilde{A}$ *aus* A *durch Multiplikation einer Zeile mit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *erhält, so gilt*

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A.$$

(iii) Falls man $\tilde{A}$ *aus* A *erhält, indem man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile dazu addiert, so gilt*

$$\det \tilde{A} = \det A.$$

(Invariant unter elementaren Umformungen)

Beweis: zu (ii):

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \lambda a_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \overset{(D1)}{=} \lambda \det \underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{A}$$

zu (iii):

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_j + \lambda a_i & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \overset{(D1)}{=} \det \underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{A} + \lambda \det \underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_i & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{\overset{(*)}{=} 0}$$

$(*)$ gilt, denn Zeile i und Zeile j sind gleich, somit hat die Matrix einen Rang kleiner als n.

zu (i): ohne Beschränkung sei $i < j$ und wir notieren im Folgenden nur die i-te und j-te Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \\ — & a_j & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} \det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i + a_j & — \\ & \vdots & \\ — & a_j & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} \det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i + a_j & — \\ & \vdots & \\ — & a_j - (a_i + a_j) & — \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i + a_j & — \\ & \vdots & \\ — & -a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} \det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i + a_j - a_i & — \\ & \vdots & \\ — & -a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_j & — \\ & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\square$

Nachweis der Eindeutigkeit. Nun weisen wir die Eindeutigkeit nach und zeigen ein Schema zur praktische Berechnung. Erinnern wir uns hierzu an die Gauß-Elimination:

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{c|ccc} & - & a_1 & - \\ & & \vdots & \\ \hline & - & a_k^{(k)} & - \\ & & \vdots & \\ 0 & - & a_j^{(k)} & - \\ & & \vdots & \\ & - & a_n^{(k)} & - \end{array}\right)$$

wobei $a_j^{(k+1)} = a_j^{(k)} - l_{jk}^{(k)} a_k^{(k)}$ für $j = k+1, \ldots, n$ mit $l_{jk}^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Das heisst, der $k$te Schritt der Gauß-Elimination ist nichts anders als eine Folge von $n-k$ elementare Umformungen, bei denen ein Vielfaches der $k$ten Zeile zu einer anderen Zeile hinzuaddiert wird. Nach Lemma 4.34 (iii) wissen wir damit $\det A = \det A^{(2)} = \ldots = \det A^{(k)}$, sofern keine Zeilenvertauschungen notwendig waren in der Gauß-Elimination.
Falls m Zeilenvertauschungen nötig sind, dann ergibt sich nach Lemma 4.34 (i) pro Vertauschung ein Faktor (-1), d.h.

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)}$$

mit

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} r_{11} & & & & & \\ & r_{22} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei wurden keine Spaltenvertauschungen durchgeführt; d.h. es sind größere Absätze möglich zusammen mit abschließenden Nullzeilen!
Tritt eine Nullzeile auf (d.h. $\operatorname{Rang}(A) < n$), so folgt mit Lemma 4.34 (ii) und $\lambda = 0$:

$$\det A^{(n)} = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

Tritt keine Nullzeile auf, so folgt:

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)} \qquad \text{wobei } A^{(n)} = \begin{pmatrix} r_{11} & & & * \\ & r_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } r_{jj} \neq 0.$$

Mit weiteren elementaren Umformungen erreicht man, dass das obere Dreieck (*) auch verschwindet ($a_{n-1}^{(n)} \leftarrow a_{n-1}^{(n)} - \lambda a_n^{(n)}$, wobei $\lambda = \frac{a_{n-1,n}^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$ mit $a_{nn}^{(n)} = r_{nn}$, usw.). Damit folgt dann schliesslich wiederum mit dem obigen Lemma:

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^m \det A^{(n)} = (-1)^m \det \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \\
&\overset{(ii)}{=} (-1)^m r_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & r_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \ldots \quad = (-1)^m r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn} \underbrace{\det \mathbb{1}}_{=1}
\end{aligned}$$

Somit ist dann aber $\det A$ eindeutig bestimmt (denn jede Abbildung mit den Eigenschaften *(D1), (D2), (D3)* muss diesen Wert ergeben) und der Gauß-Algorithmus liefert ein praktisches Berechnungsverfahren. Da wir aber zu Beginn bereits angenommen haben, dass es eine solche Abbildung det existiert, ist die Existenz damit noch nicht bewiesen.

□

Eine ähnliche Überlegung finden Sie in Aufgabe 4.3.
Ferner halten wir fest:

Schema 4.35 (Algorithmus zur Berechung der Determinante) *Zur Berechung führe eine Gauß-Elimination auf der Matrix A durch. Falls hierzu m Zeilenvertauschungen notwendig sind, dann ergibt sich:*

$$\det A = (-1)^m r_{11} r_{22} \ldots r_{nn} \quad \textit{falls}\, A^{(n)} = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.36 *Diese Formel gilt auch, falls* $\operatorname{Rang}(A) < n$*, da dann mindestens ein* $r_{jj} = 0$ *ist.*
Beachten Sie, dass in der Gauß-Elimination nur genau die beschriebenen Zeilenoperationen erlaubt sind. Die Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl (die ja die Lösungsmenge eine Gleichungssystems unverändert lässt), ändert ja beispielsweise die Determinante.

Die Berechnung von Determinanten üben Sie in Aufgabe 4.18, den Zusammenhang zwischen Gauß-Elimination und Determinanten diskutieren auch die Aufgaben 4.21 und 4.22.

Nachweis der Existenz und eine rekursive Definition. Nun wenden wir uns dem Nachweis der Existenz einer Funktion auf Matrizen zu, die den Axiomen (D1), (D2), (D3) genügt. Dies tun wir, indem wir eine Formel (genauer gesagt mehrere Formeln) zur Berechnung angeben und nachweisen dass diese die Axiome erfüllen. Hierbei zeigen wir auch ein weiteres, theoretisch interessantes Berechnungsschema.

Satz 4.37 (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

$$\textit{Für } n > 1 \textit{ gilt:} \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die sich ergibt, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte der Matrix A streicht. Für $n = 1$ gilt $\det(a) = a$.
Die Formel gilt für jedes j mit $1 \leq j \leq n$.

Bemerkung 4.38 Die Formel für die Abbildung $\det(\cdot)$ ist rekursiv:

n=1: $\det a = a$ *für* $a \in \mathbb{R}$
Hier ist die skalare Zahl a gleichzeitig als 1×1 Matrix zu verstehen. Diese Funktion auf 1×1 Matrizen ist offensichtlich die einzige Funktion, die (D1),(D2),(D3) erfüllt.

n-1 $\rightsquigarrow$ n: *Wenn man $\det(\cdot)$ auf $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen berechnen kann, dann sagt die Formel aus dem Satz, wie $\det(\cdot)$ auf $n \times n$ Matrizen berechnet wird.*

Die Formel ist theoretisch interessant, aber für größere n ($n > 3$) algorithmisch viel zu teuer!

Beispiele 4.39

Fall $n = 2$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &\overset{j=1}{=} (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(a_{12}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$

Fall $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A \overset{\boxed{j=1}}{=} 1\cdot(3-1) - 2\cdot(1-2) + 1\cdot(1-6)$$

$$= 2 + 2 - 5 = -1$$

$$\det A \overset{\boxed{j=2}}{=} (-1)\cdot(2-1) + 3\cdot(1-2) - 1\cdot(1-4)$$

$$= -1 - 3 + 3 = -1$$

Nun zum Nachweis der Eigenschaften (D1),(D2),(D3):

$$\text{Zu zeigen:} \quad d(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} d(A_{ij}) \quad \text{erfüllt (D1),(D2),(D3).}$$

Hierbei können wir induktiv verwenden, dass für $d(\cdot)$ auf $(n-1)\times(n-1)$ Matrizen diese Eigenschaften schon nachgewiesen seien.

$\boxed{\text{zu (D1)}}$ (Linearität in der k-ten Zeile für $k = 1, \ldots, n$)

keine Beiträge aus der k-ten Zeile

$$d(a) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{d(A_{ij})}_{} + (-1)^{k+j} a_{kj} d(A_{kj})$$

Linear in der aus der k-ten Zeile stammende Einträgen

keine Beiträge aus der k-ten Zeile

Linearität offensichtlich

$\boxed{\text{zu (D2)}}$ Falls $\operatorname{Rang}(A) < n$ ist, folgt: Es gibt eine Zeile a_j, die Linearkombination der anderen Zeilen ist: $a_j = \sum_{i\neq j} \alpha_i a_i$. Mit elementaren Umformungen der Form

$$(*) \qquad a_j \longleftarrow a_j - \alpha_i a_i \quad \text{für alle } i \neq j$$

erhält man eine Matrix $\tilde{A}$ mit einer Nullzeile. Für diese Matrix $\tilde{A}$ gilt nach (D1) aber $d(\tilde{A}) = 0\, d(\tilde{A}) = 0$. D.h. zu zeigen ist, dass elementare Zeilenumformungen (*) die Abbildung $d(\cdot)$ nicht verändern.
Dazu genügt es zu zeigen, dass für eine Matrix A mit zwei gleichen Zeilen $d(A) = 0$

ist. Denn, wenn dies gilt so folgt:

$$d\begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \\ — & a_j & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} - \alpha\, \underbrace{d\begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{=0} \overset{(D1)}{=} d\begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \\ — & a_j - \alpha a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Also ist zu zeigen $\quad d\begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_s & — \\ & \vdots & \\ — & a_r & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{a_s = a_r,\, s<r}{=} 0 \quad$ für $n \times n$ Matrizen.

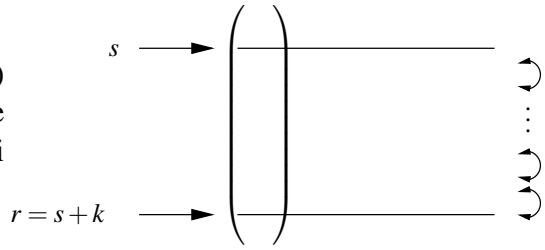
Den Beweis hierzu führen wir wiederum mit Induktion über die Dimension n:

$$(**) \quad \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} d(A_{ij}) = (-1)^{r+j} a_{rj} d(A_{rj}) + (-1)^{s+j} a_{sj} d(A_{sj})$$

für $i \neq s$ und $i \neq r \Rightarrow A_{ij}$ hat zwei gleiche Zeilen
$\Rightarrow d(A_{ij}) = 0$, damit gibt es nur zwei Summanden.

Falls $r = s+1$ ist, folgt $A_{rj} = A_{sj}$ und sowieso $a_{rj} = a_{sj}$. Ferner gilt dann $(-1)^{r+j} = (-1)(-1)^{s+j}$, d.h. zusammengefasst, die rechte Seite der obigen Gleichung $(**)$ verschwindet. Also ist $d(A) = 0$.

Falls $r = s+k$ gilt, dann genügen (k-1) Zeilenvertauschungen um aus A_{rj} die Matrix A_{sj} zu erzeugen (o.B.d.A. sei $r > s$).



Da für $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen aber bereits $d(B) = \det(B)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ gilt, folgt dass

$$d(A_{sj}) = (-1)^{k-1} d(A_{rj}) \overset{k=r-s}{=} (-1)^{r-s-1} d(A_{rj})$$

$$(**) \quad \Rightarrow \quad d(A) = (-1)^{r+j} a_{rj} d(A_{rj}) + \underbrace{(-1)^{s+j+r-s-1}}_{(-1)^{r+j-1} = -(-1)^{r+j}} a_{rj} d(A_{rj}) = 0.$$

$\boxed{\text{zu (D3)}}$

$$d(\mathbb{1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \delta_{ij} d(\mathbb{1}_{ij}) \overset{\substack{\text{nur für } i=j, \\ \delta_{ij} \neq 0}}{=} \underbrace{(-1)^{i+i}}_{=1} d(\mathbb{1}_{ii}),$$

wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$. Die Streichungsmatrix $\mathbb{1}_{ii}$ ist für jedes $i = 1, \cdots, n$ stets die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n-1,n-1}$. Mit Induktion über n erhält man $d(\mathbb{1}) = 1$.

Damit haben wir die drei Eigenschaften (D1), (D2), und (D3) gezeigt. Somit ist also $d(A) = \det A$.

□

Die Entwicklungsformel gibt uns viele verschiedene Wege eine Determinante zu berechnen. Aufgrund des Eindeutigkeitsresultats ist jedoch klar, dass für eine gegeben Matrix (unabhängig davon nach welcher Spalte man entwickelt) stets dieselbe Zahl herauskommen muss. Das Entwickeln von Determinanten üben Sie in Aufgabe 4.18.

Betrachten wir nun Rechenregeln für die Determinante: Die transponierte Matrix zu einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ erhält man, indem man die Zeilen und Spalten vertauscht:

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lemma 4.40 *Es gilt* $\det(A) = \det(A^T)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\det(A^T)$ die Eigenschaften (D1),(D2) und (D3) erfüllt:

$\boxed{\text{zu (D1)}}$ Z.z. $\det(A^T)$ ist linear in der j-ten Zeile für alle $j = 1, ..., n \Leftrightarrow \det(A)$ ist linear in der j-ten Spalte.
Dies ist offensichtlich, da für festen Spaltenindex j und für eine Entwicklung nach der $j$ten Spalte gilt

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}_{\text{linear in } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ ist.}}$$

$\boxed{\text{zu (D2)}}$ Es gilt $\text{Rang}\left(A^T\right) = \text{Rang}\,(A)$ (da Zeilenrang = Spaltenrang). Damit folgt aber: $\text{Rang}\,(A) < n \Rightarrow \text{Rang}\left(A^T\right) < n \Rightarrow \det(A^T) = 0$

$\boxed{\text{zu (D3)}}$ Es gilt $\det(\mathbb{1}^T) = \det(\mathbb{1}) = 1$.

Damit gilt $\det(A) = \det(A^T)$ nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsresultat.

$\square$

Insbesondere kann man also statt nach einer Spalte auch nach einer Zeile entwickeln, und statt elementarer Zeilenumformungen auch elementare Spaltenumformungen zur Berechnung verwenden.

Satz 4.41 *Mit der Determinante können wir eine explizite Formel für die inverse Matrix angeben, die sog.* Cramersche Regel*:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ji}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

Hierbei sind A_{ji} die Streichungsmatrizen aus 4.37.
Achtung: *In der Formel steht A_{ji},* **nicht** *A_{ij}.*

Beispiel 4.42

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Probe: $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis: Zu zeigen ist $A\tilde{A} = \det(A)\mathbb{1}$, wobei $\tilde{A} = \left((-1)^{i+j}\det A_{ji}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ die sog. *adjungierte Matrix* bezeichne.
Man entwickelt dazu $\det(A)$ nach Zeile i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ji} = (A\tilde{A})_{ii}$$

$\Rightarrow$ die Diagonale von $A\tilde{A}$ enthält nur Einträge $\det A$.

Was steht abseits der Diagonalen?
Die k-te Spalte von $\tilde{A}$ bleibt unverändert, wenn wir die k-te Zeile von A ändern, da diese in A_{ki} gestrichen wurde. Wenn wir in A nun die k-te Zeile durch die i-te Zeile ersetzen, so erhalten wir bei Entwicklung nach der dieser k-ten Zeile (falls $i \neq k$)

$$0 = \det\begin{pmatrix} — & a_i & — \\ \\ — & a_i & — \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{matrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ij}\det(A_{kj}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{jk} = (A\tilde{A})_{ik}\,.$$

Abseits von der Diagonalen sind also alle Einträge 0. Damit ist dann aber $A\tilde{A} = \det(A)\mathbb{1}$ gezeigt.

□

Satz 4.43 (Produktregel für Determinanten) *Für $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt:*

$$\det AB = \det A \det B$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Rang}\,(A) < n & \text{oder} & \text{Rang}\,(B) < n & \Leftrightarrow & \text{Rang}\,(AB) < n \Leftrightarrow \text{Ker}\,(AB) \neq \{0\} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \det A = 0 & & \det B = 0 & & \det AB = 0 \end{array}$$

D.h. wir können uns auf den Fall $\text{Rang}\,(A) = \text{Rang}\,(B) = n$ beschränken. Betrachten wir also diesen Fall:

Definieren wir

$$d : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}, d(A) = \frac{\det AB}{\det B}$$

($\det B \neq 0$ da $\text{Rang}\,(B) = n$). Wir zeigen nun, dass für $d(.)$ die Axiome (D1), (D2), (D3) gelten:

$\boxed{\text{zu (D1)}}$ Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ — & a_i & — \\ & \vdots & \end{pmatrix},$$

dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^{1,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,n}, a_i \mapsto a_i B$ linear $\Rightarrow \det AB$ linear in der i-ten Zeile für alle $i = 1, \ldots, n \Rightarrow d(A)$ linear in den Zeilen von A. (✓)

$\boxed{\text{zu (D2)}}$ siehe die Eingangsbetrachtung dieses Beweises für den Fall $\text{Rang}\,(A) < n$ (✓)

$\boxed{\text{zu (D3)}}$ $d(\mathbb{1}) = \frac{\det \mathbb{1} B}{\det B} = 1$ (✓)

Damit gilt aber nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz

$$d(A) = \frac{\det AB}{\det B} = \det A \quad \Rightarrow \quad \det AB = \det A \det B.$$

□

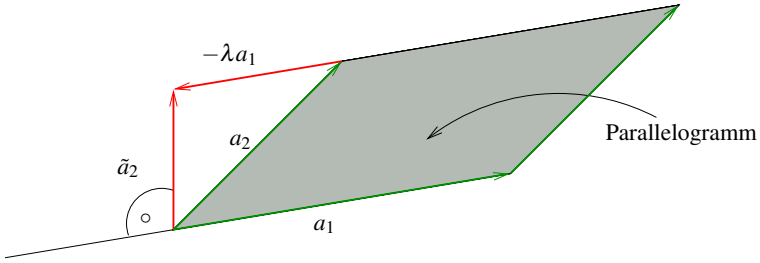
Folgerung 4.44 *Es gilt:*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

Beweis: $1 = \det \mathbb{1} = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

□

Geometrische Bedeutung der Determinante Erinnern wir uns, dass das Skalarprodukt der Längen- und Winkelmessung diente. Die Determinante hat ihre Anwendung in der Flächen- und Volumenbestimmung.



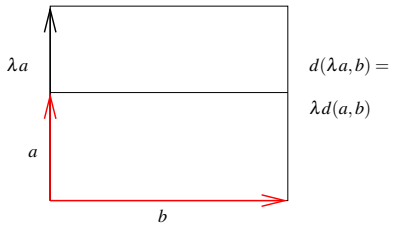
Was ist der Flächeninhalt

$$d(a_1, a_2)$$

des durch die Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms?

(i) Prinzip von Cavalieri: $$d(a_1, a_2) = d(a_1, \underbrace{a_2 - \lambda a_1}_{=\tilde{a}_2})$$

Die Fläche hängt nur von Grundseite und Höhe ab, wenn wir a_1 als Grundseite wählen, können wir den Endpunkt von a_2 also beliebig parallel zu a_1 verschieben.



(ii) $$d(a_1, \lambda a_2) = \lambda d(a_1, a_2)$$

Damit dies auch für $\lambda < 0$ gilt, vereinbaren wir, dass das Vorzeichen abhängig von der Orientierung der beiden Vektoren gewählt wird.

(iii) Daher gilt auch $d(a_1, a_2) = -d(a_2, a_1)$. Zum Nachweis verfahren wir wie folgt:

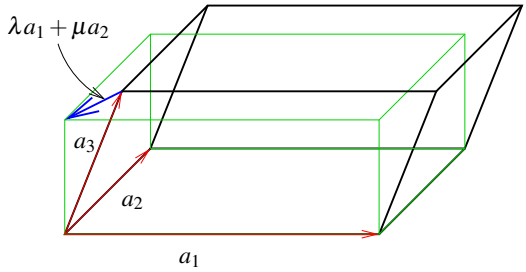
$$\begin{aligned} d(a_1, a_2) &= d(a_1, a_2 + a_1) = d(a_1 - (a_2 + a_1), a_2 + a_1) = d(-a_2, a_2 + a_1) \\ &= -d(a_2, a_2 + a_1) = -d(a_2, a_2 + a_1 - a_2) = -d(a_2, a_1) \end{aligned}$$

Vergleiche hier das Vorgehen im Beweis von Lemma 4.34.

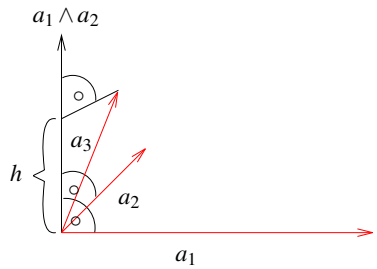
(iv) Das Einheitsquadrat hat Flächeninhalt $d(e_1, e_2) = 1$

Notieren wir a_1, a_2 in den Zeilen einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \end{pmatrix}$, dann sind dies genau die Eigenschaften, die wir beim Beweis der Eindeutigkeit der Determinante benutzt haben. Also $d(a_1, a_2) = \det(A)$. Der Flächeninhalt des durch a_1, a_2 aufgespannten Parallelogramms ist also gleich $\det \begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \end{pmatrix}$.

Dies gilt ganz analog für durch 3 Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte sogenannte *Parallelepipede*:



$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ — a_3 — \end{pmatrix} \overset{\det A = \det A^T}{=} \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
\text{Prinzip von Cavalieri} & \quad \det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ — a_3 — \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ — & a_2 & — \\ — a_3 - \lambda a_1 - \mu a_2 — \end{pmatrix} \\
\text{Volumen des Einheitswürfels} &= \det\begin{pmatrix} — e_1 — \\ — e_2 — \\ — e_3 — \end{pmatrix} = \det \mathbb{1} = 1
\end{aligned}$$



Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt Wir wissen bereits, dass $||a_1 \wedge a_2||$ gleich der Fläche des von a_1, a_2 aufgespannten Parallelogramms im $\mathbb{R}^3$ ist. Sei $h = a_3 \cdot \frac{a_1 \wedge a_2}{||a_2 \wedge a_3||}$ die Höhe des Parallelepipeds. Dann gilt, da $a_1 \wedge a_2$ senkrecht auf a_1 und a_2 steht, dass

$$|(a_1 \wedge a_2) \cdot a_3| = h||a_1 \wedge a_2||$$

das Volumen des Parallelepipeds darstellt. Nun gilt aber auch, dass

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ — a_3 — \end{pmatrix} &\overset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} a_{31}\underbrace{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}_{(a_1 \wedge a_2)_1} \\
&\quad + a_{32}\underbrace{(-1)(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}_{(a_1 \wedge a_2)_2} \\
&\quad + a_{33}\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{(a_1 \wedge a_2)_3} \\
&= a_3 \cdot (a_1 \wedge a_2)
\end{aligned}$$

D.h. beide Zugänge über Determinante und Kreuzprodukt führen auf den gleichen Volumenbegriff.

Betrachtet man eine Matrix als lineare Abbildung, so gibt ihre Determinante an, wie sich das Volumen eines Körpers unter dieser Abbildung ändert. Diese Eigenschaft betrachten Sie näher in Aufgabe 4.17.

4.7 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 4.1 Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Anwesenheitsaufgabe 4.2 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch AB invertierbar ist und die Inverse von AB die Matrix $B^{-1}A^{-1}$ ist.

Anwesenheitsaufgabe 4.3 Sei L eine linke untere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det L = l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn}.$$

Anwesenheitsaufgabe 4.4

a) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung, um einen beliebigen Winkel. Geben Sie die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildung an und berechnen Sie die Determinante der Matrix.

b) Betrachten Sie ebenfalls in $\mathbb{R}^2$ die Spiegelung an einer Gerade durch den Ursprung mit Normalenvektor n, wobei $\|n\| = 1$ gilt. Geben Sie die Matrixdarstellung an und berechnen Sie die Determinante dieser Matrix.

Anwesenheitsaufgabe 4.5

a) Bestimmen Sie das Bild des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bei der Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$.

b) Ist diese Abbildung linear?

c) Geben Sie die Matrixdarstellung der Punktspiegelung bezüglich der Standardbasis an.

d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Punktspiegelung bezüglich der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

an.

Anwesenheitsaufgabe 4.6 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion auf die Gerade

$$G = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Geben Sie die Matrixdarstellung bezüglich der Standard-Basis an.

b) Geben Sie Kern und Bild der Funktion f an.

Anwesenheitsaufgabe 4.7 Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \cdot z &= (z \wedge x) \cdot y \\ &= (y \wedge z) \cdot x\end{aligned}$$

gilt,

a) indem Sie es komponentenweise nachrechnen.

b) indem Sie folgende Eigenschaft der Determinante ausnutzen

$$\det \begin{pmatrix} -x- \\ -y- \\ -z- \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -z- \\ -x- \\ -y- \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: $|(x \wedge y) \cdot z|$ stellt das Volumen des von x, y und z aufgespannten Parallelepipeds dar.

Anwesenheitsaufgabe 4.8 Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das durch die beiden Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird.

Aufgabe 4.9 Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

Aufgabe 4.10 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen $(Ly = b)$ und anschließendes Rückwärtseinsetzen $(Rx = y)$.

Aufgabe 4.11

a) Wie lautet die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ (als Basis von Urbild- und Bildraum)?

b) Zeigen Sie, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung aus a) bezüglich dieser Basis (als Basis von Urbild- und Bildraum).

Aufgabe 4.12

a) Wie lautet die Matrixdarstellung einer Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis?

b) Können Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ angeben, bzgl. der (wenn man sie als Basis des Bild- als auch des Urbildraums verwendet) die Punktspiegelung eine andere Matrixdarstellung hat?

c) Bestimmen Sie für $p \in \mathscr{P}^3$ und festes $r \in \mathbb{R}$ die Matrixdarstellung in der Basis $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3\}$ der linearen Abbildung $f : \mathscr{P}^3 \to \mathscr{P}^3$, welche durch $f(p)(t) = p(t+r)$ definiert ist.

Aufgabe 4.13

a) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix A so, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = Ax$$

als Kern die Ebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

hat.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Ker}\,((\,)\,f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

c) Kann man A so wählen, dass

$$\mathrm{Ker}\,((\,)\,f) = H = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 1\}?$$

Aufgabe 4.14 Seien h_1, h_2, h_3 die unbekannten Höhen dreier Messpunkte über Normalhöhennull.

a) Durch Messungen haben Sie bestimmt:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= 45\,m \\ h_2 - h_3 &= -33\,m \\ h_3 - h_1 &= -12\,m \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Sie nur anhand dieser drei Messungen die drei Höhen h_1, h_2, h_3 *nicht* berechnen können.

b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, die drei Messungen seien:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= d_{12} \\ h_2 - h_3 &= d_{23} \\ h_3 - h_1 &= d_{31} \end{aligned}$$

Welche Bedingung müssen d_{12}, d_{23}, d_{31} erfüllen, damit mindestens eine Lösung h_1, h_2, h_3 existiert, die alle drei Gleichungen erfüllt?

Aufgabe 4.15 Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.16

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung A einer Drehung im $\mathbb{R}^2$, die um $45°$ entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung rotiert. Geben Sie die Inverse A^{-1} an und verifizieren Sie $AA^{-1} = \mathbb{1}$.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung B einer Spiegelung an der x_1-Achse im $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Inverse B^{-1} an und verifizieren Sie $B^{-1}B = \mathbb{1}$.

Aufgabe 4.17 Wir betrachten ein Parallelepiped P, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(P)$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(P)$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(P)$ gilt

$$\operatorname{vol} f(P) = |\det A| \cdot |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\det A| \cdot \operatorname{vol}(P).$$

c) Berechnen Sie für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von P $\operatorname{vol}(P)$, sowie das Volumen von $f(P)$ $\operatorname{vol}(f(P))$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}(f(P))$ einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ und $f(\vec{w})$ berechnen.

Aufgabe 4.18 Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.19

a) Implementieren Sie das Vorwärtseinsetzen zum Lösen von

$$Ly = b$$

in MATLAB, wobei L eine linke untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist. Sie dürfen im Programm verwenden, dass auf der Diagonalen nur Einsen stehen.

b) Verwenden Sie LR-Zerlegung, Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen, um das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 48 \\ 85 \\ 125 \\ 166 \end{pmatrix}$$

in MATLAB zu lösen.

Aufgabe 4.20 Rechnen Sie nach, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit folgender Regel berechnen lässt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.21
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Begründen Sie:

a) Falls A rechte obere Dreiecksform hat und alle Diagonaleinträge nicht null sind, so ist $Ax = b$ stets eindeutig lösbar.

b) Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist stets ein affiner Unterraum oder die leere Menge. Wann ist der Lösungsraum linear (d.h. ein Untervektorraum)?

c) Falls $\det A = 42$, so hat $Ax = b$ genau eine Lösung.

d) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.22 Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

a) Wir betrachten die Zeilenumformung

"k-te Zeile mit α multiplizieren"

i) Wann ändert diese Umformung die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht?

ii) Was passiert mit $\det(A)$ unter dieser Umformung?

iii) Geben Sie die Matrix L an, mit der man diese Umformung durch die Matrixmultiplikation LA durchführen kann.

b) Nun betrachten wir die Zeilenumformung

"k-te Zeile $= \alpha$ mal k-te Zeile + β mal j-te Zeile"

mit $k \neq j$.

i) Wann ändert diese Umformung die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht?

ii) Was passiert mit $\det(A)$ unter dieser Umformung?

iii) Geben Sie die Matrix $\tilde{L}$ an, mit der man diese Umformung durch die Matrixmultiplikation $\tilde{L}A$ durchführen kann.

Tipp: Überlegen Sie, wie sich diese Zeilenumformung durch eine Umformung wie in Aufgabenteil *a*) und eine normale Zeilenumformung darstellen läßt.

c) Berechnen Sie die beiden folgenden Matrixprodukte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vartheta & \varphi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.23 Geben Sie die Matrixdarstellungen folgender linearer Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ in der Standardbasis an:

a) Drehung um $\frac{\pi}{4}$,

b) Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$,

c) erst Drehung um $\frac{\pi}{4}$, dann Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$.

5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Zur Erinnerung: Zu einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

hatten wir bereits Richtungsableitungen kennengelernt:

$$\partial_i f(x) = \partial_{x_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Man nennt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *richtungsdifferenzierbar* in Richtung von x_i, falls dieser Grenzwert existiert (Siehe Definition 2.37). Der Vektor aller Richtungsableitungen (als Zeilenvektor) heißt

$$(\nabla f)(x) = (\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x)) .$$

In *1D* haben wir eine zweite Definition der Ableitungen kennengelernt, die äquivalent zur Definition mittels Differenzenquotienten ist:

Demnach heißt eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar* in $x^0 \in D$, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x^0) + a(x - x^0) + o(\underbrace{x - x^0}_{=h}),$$

wobei $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$ (Siehe Satz 2.29).

Hierzu haben wir die folgende Interpretation betrachtet:

$f(x^0) + \underbrace{a(x - x^0)}_{\text{lineare Funktion in } (x - x^0)}$ ist eine affine Funktion, die bis auf Terme höherer Ordnung ($o(x - x^0)$) die Funktion f in der Umgebung von x^0 approximiert.

Nun zum allgemeinen Fall: Hier greifen wir das Konzept einer lokalen Approximation durch eine affine Funktion auf und nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ falls die Funktion bis auf Terme höherer Ordnung in einer Umgebung von x durch eine affine Funktion approximiert werden kann. Die lineare Abbildung, die hierzu gehört, nennen wir Ableitung der Funktion in x. Die dazu gehörige Matrix (zum Beispiel bezogen auf die kanonischen Basen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$) ist eine $m \times n$ Matrix. Wir erhalten somit die folgende Definition:

Definition 5.1 (Differenzierbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$) *Eine Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

heißt (total) differenzierbar *in $x^0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare Abbildung $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x^0) + a(x - x^0) + o(x - x^0),$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ einen Funktion ist mit $\frac{o(h)}{||h||} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Die lineare Abbildung a bzw. die $m \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (mit $f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + o(x - x^0)$, wobei $A(x - x^0)$ nun das Matrix-Vektor-Produkt bezeichnet)zu a nennen wir Ableitung *von f in x^0 und bezeichnen A als* Jacobimatrix.

5.1 Skalare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$

Konzentrieren wir uns zunächst auf den Fall $m = 1$:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

Die dazugehörige Ableitungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{1,n}$ ist ein Zeilenvektor. Was steht in diesem Zeilenvektor? Betrachte hierzu eine Störung $x = x^0 + he_i$ von x^0 in Richtung e_i, dann gilt

$$\begin{aligned}
f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad &+ \quad (—A—) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + o(he_i), \\
\frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \quad &= \quad (—A—) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{o(he_i)}{h}, \\
(\partial_{x_i} f)(x^0) \quad &= \quad A_i, \quad (\nabla f)(x^0) = A.
\end{aligned}$$

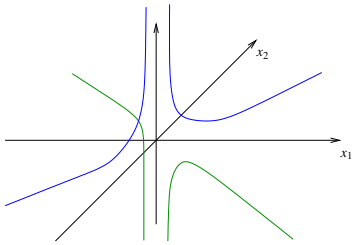
D.h. eine (total) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auch richtungsdifferenzierbar. Die Einträge der Jacobimatrix sind die partiellen Ableitungen.

Frage: Gilt dies auch umgekehrt, das heißt, sind die Begriffe (Ableitung über Differenzenquotient und Ableitung über Approximation mittels linearer Abbildungen) gleich?

Für $\boxed{n > 1}$ ist die Antwort negativ!

Gegenbeispiel:

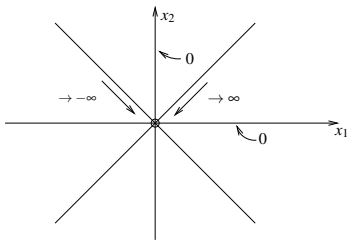
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$



(In der Abbildung bezeichnen die blauen Linien den Funktionsgraphen für $x_1 = x_2$, die grünen Linien für $x_1 = -x_2$). Für $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ ist der Funktionswert stets 0.

f ist richtungsdifferenzierbar in 0:

$$\frac{f(he_i) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{h \cdot 0}{h^4} - 0\right) = 0,$$



aber

$$f\left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right) = \frac{h^2}{4h^4} = \frac{1}{4h^2} \xrightarrow{h \to 0} \infty.$$

D.h. f ist nicht einmal stetig, schon gar nicht (total) differenzierbar, denn

$$f\left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \infty \text{ für } h \to 0,$$

wenn aber f an der Stelle 0 total differenzierbar wäre, so wäre

$$f\left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right) = f(0) + \underbrace{A\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} + o(h)}_{\xrightarrow{h \to 0} 0} \longrightarrow 0 \text{ für } h \to 0.$$

Bemerkung 5.2 *Es gilt aber: Ist f richtungsdifferenzierbar und sind alle Richtungsableitungen stetig, dann ist f (total) differenzierbar.*

Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Begriffen von Differenzierbarkeit und Ableitung beleuchtet auch Aufgabe 5.5.

Notation 5.3 *Den Spaltenvektor* $(\nabla f)^T$ *bezeichnen wir als* Gradienten *von* f*:*

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Falls f *differenzierbar ist, so gilt:*

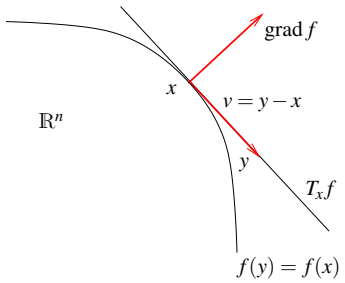
$$f(y) = f(x) + \operatorname{grad} f(x) \cdot (y-x) + o(y-x)$$

Bemerkung 5.4 *Häufig unterscheidet man nicht zwischen* ∇f *und* $\operatorname{grad} f$*! Hier werden wir jedoch diese Unterscheidung aus Gründen der Klarheit vornehmen.*

Geometrische Bedeutung des Gradienten Betrachte

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

und die lokale Approximation $\quad f(y) = f(x) + \operatorname{grad} f(x) \cdot (y-x) + o(y-x).$



Wähle Punkt $y = x + v$ nahe x:
Falls $\operatorname{grad} f(x) \cdot v = 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x+v) = f(x) + \operatorname{grad} f \cdot v + o(v) \\ &= f(x) + o(v) \end{aligned}$$

D.h. „bis auf einen sehr kleinen Term“ $o(v)$, ist $f(x+v)$ konstant, falls v senkrecht auf $\operatorname{grad} f(x)$ steht. Kleinheit von $o(v)$ bedeutet dabei wie üblich, dass nicht nur $o(v) \to 0$ für $v \to 0$ sondern auch $\frac{o(v)}{||v||} \to 0$ für $v \to 0$.

Wir definieren nun

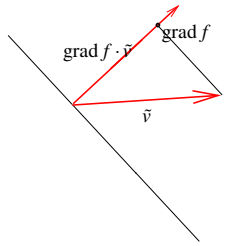
$$T_x^{aff} f = \{x + v \,|\, \operatorname{grad} f(x) \cdot v = 0,\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

für $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ als eine affine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ (d.h. ein affiner Unterraum der Dimension $n-1$, im Fall $n = 2$ also eine Gerade durch x). $T_x^{aff} f$ bezeichnet man als *affinen Tangentialraum*, er liegt tangential zur Niveaumenge von f durch x.

Betrachte nun $f(x+v)$ mit $||v|| = \varepsilon$:

$$f(x+v) = f(x) + (\operatorname{grad} f) \cdot v + o(v)$$

Wähle $v := \varepsilon \frac{\operatorname{grad} f}{||\operatorname{grad} f||}$ dann gilt offensichtlich $||v|| = \varepsilon$ und v zeigt in Richtung des Gradienten. Wir folgern nun



$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \underbrace{||\text{grad}\, f||\varepsilon}_{\substack{\geq \text{grad}\, f \cdot \tilde{v} \\ \text{für alle } ||\tilde{v}|| = \varepsilon}} + o(v) \\ &\geq \underbrace{f(x) + (\text{grad}\, f) \cdot \tilde{v}}_{= f(x+\tilde{v}) - o(\tilde{v})} + o(v) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$f(x+v) \geq f(x+\tilde{v}) + \underbrace{o(v) - o(\tilde{v})}_{\substack{\text{Terme höherer} \\ \text{Ordnung}}} \qquad \text{für } v = \varepsilon \frac{\text{grad}\, f}{||\text{grad}\, f||}, \quad \text{und alle} \quad ||\tilde{v}|| = \varepsilon$$

Damit folgt:

Folgerung 5.5 *Der Gradient* grad f *ist die Richtung des steilsten Anstiegs und* $-$grad f *die des steilsten Abstiegs.*

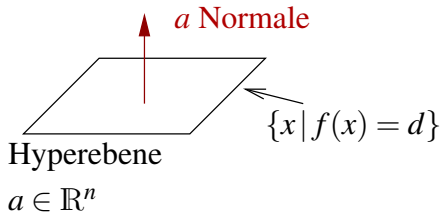
Beispiele 5.6 *(i)* $f(x) = a \cdot x$ *(lineare Funktion)*

Es gilt:

$f(y) = a \cdot y = a \cdot x + a \cdot (y - x) = f(x) + a \cdot (y - x)$

D.h. $\text{grad}\, f = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix}$

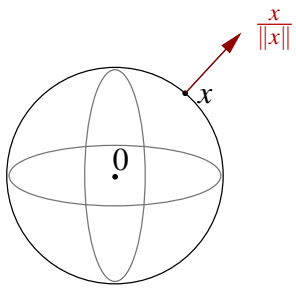
(Funktion ist ihre eigene lineare Approximation)



(ii) $f(x) = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$$\partial_i f(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \Rightarrow \text{grad}\, f = \frac{x}{||x||}$$

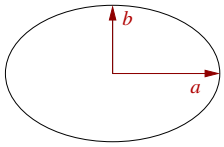
Die Menge $\{x \,|\, f(x) = R\}$ *ist eine Kugel mit Radius R.*
Der Gradient ist nur definiert für $x \neq 0$.
Der Vektor $\frac{x}{||x||}$ *zeigt nach außen.*



(iii) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}$ *auf* $\mathbb{R}^2$,

Die Menge $\{x \,|\, f(x) = 1\}$ *ist eine Ellipse mit Halbachsen* a, b:

$$\text{grad}\, f = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{a^2} \\ \frac{x_2}{b^2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}}$$

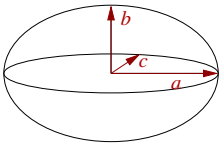


(iv) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2}$ *im* $\mathbb{R}^3$,

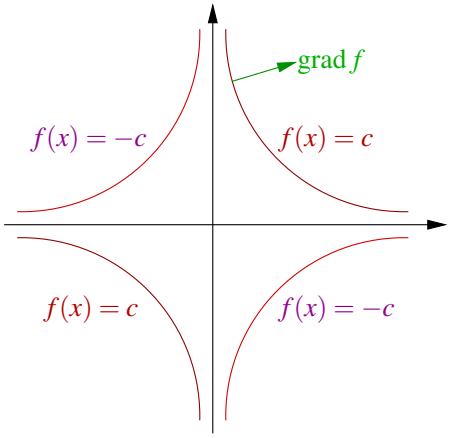
dort ist $\{x \,|\, f(x) = 1\}$ *ein Ellipsoid mit Halbachsen* a, b, c*:*

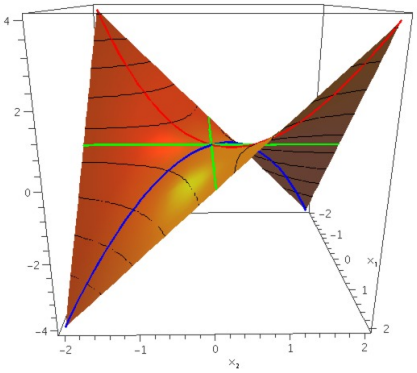
$$\operatorname{grad} f = \frac{\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{x_3}{c^2}\right)^T}{f(x)}$$

Auch hier ist der Gradient nur definiert für $x \neq 0$.



(v)





$$f(x) = x_1 x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \textit{Es gilt: } x_1 x_2 = c \Leftrightarrow x_2 = \frac{c}{x_1}$$

(vi) $f(x) = Ax \cdot x, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\boxed{n=1}$ $\quad A \in \mathbb{R},\ f(x) = Ax^2, \quad f'(x) = 2Ax$

$\boxed{n=2}$ $\quad f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 \end{pmatrix} = (A + A^T)x$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
f(x) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)x_i = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j \\
\partial_k f(x) &= \partial_k\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^{n} A_{ij}x_ix_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} A_{ik}x_ix_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} A_{kj}x_kx_j + A_{kk}x_k^2\right) \\
&= 0 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} A_{ik}x_i + 2A_{kk}x_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} A_{kj}x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ik}x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{kj}x_j \\
\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) &= (A^T + A)x
\end{aligned}$$

Bemerkung: *Falls A symmetrisch ist in dem Sinn, dass $A^T = A$ ist, dann folgt*

$$\operatorname{grad} f(x) = 2Ax \qquad (\textit{vgl. den Fall } n = 1).$$

Weitere Beispiele zum Gradienten finden Sie in Aufgabe 5.4 und 5.6.

5.2 Kurven im $\mathbb{R}^m$

Bisher haben wir uns auf den Fall $m = 1$ konzentriert. Betrachten wir nun den Fall $n = 1$ und $m > 1$ (Vektorwertige Funktionen über $\mathbb{R}$, Kurven):

Betrachte $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ | \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ | \\ \gamma_m \end{pmatrix}$. Dann ist γ differenzierbar in t, falls $\gamma(t+\tau) = \gamma(t) + A(t)\tau + o(\tau)$ mit $A(t) \in \mathbb{R}^m$ und $o(\tau)/\tau \to 0$ für $\tau \to 0$. Äquivalent erhalten wir

$$\frac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau} = \frac{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}(t+\tau) - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}(t)}{\tau} \xrightarrow{\gamma_i \text{ diffbar}} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_m' \end{pmatrix}(t) = A(t)$$

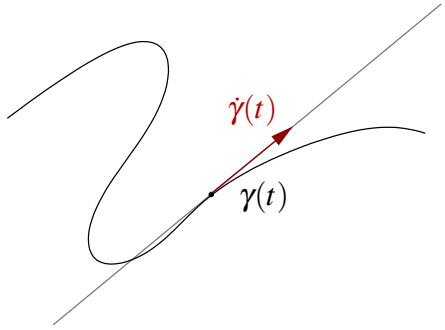
d.h. $\gamma(t+\tau) = \gamma(t) + \gamma'(t)(\tau) + o(\tau)$,

wobei $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_m' \end{pmatrix}(t) \in \mathbb{R}^{m,1}$ ein Spaltenvektor ist.

Bei vielen Anwendungen ist die Variable eine Zeit, deshalb schreiben wir $t \mapsto \gamma(t)$. Die Ableitung nach der Zeit schreiben wir auch mit einem Punkt:

Notation 5.7 $\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$

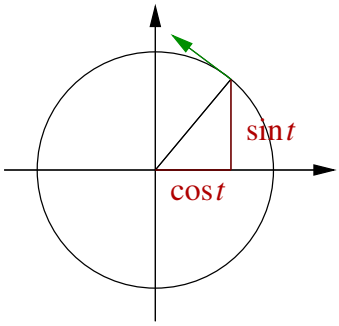
Interpretation von $\dot{\gamma}(t)$ als Geschwindigkeitsvektor:



$s \mapsto \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)(s-t)$
ist eine lokale affine Approximation der Kurve mit einer affinen Geraden im $\mathbb{R}^m$. Den Geschwindigkeitsbetrag zur Zeit t an der Position $\gamma(t)$ erhält man dann als $\|\dot{\gamma}(t)\|$.

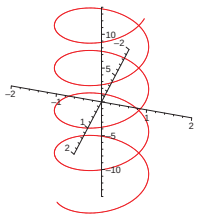
Beispiele 5.8 *(i)* $\boxed{m=2}$

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
\dot{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\
\|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1
\end{aligned}$$



D.h. γ durchläuft den Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1.

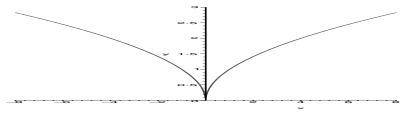
(ii) $\boxed{m=3}$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma(t)$ ist eine Schraubenlinie; die Kurve beschreibt Kreise mit Radius R und „schraubt“ sich dabei bei einer Umdrehung um 1 in die Höhe.

(iii) $\boxed{m=2}$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = t^2 = (t^3)^{\frac{2}{3}} = x(t)^{\frac{2}{3}}$



D.h. eine glatte Parametrisierung (d.h. glatte Komponentenfunktionen) führt nicht unbedingt zu geometrisch glatten Kurven.

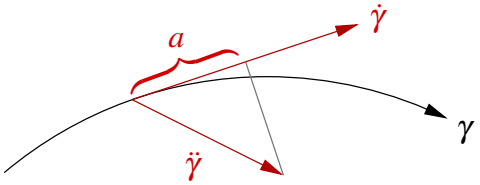
Weitere Beispiele zu Geschwindigkeitsvektoren von Kurven finden Sie in Aufgabe 5.1, 5.2 und 5.3.

Betrachten wir nun, wie man mit Ableitungen von Kurven rechnet:

(i) Wie leitet man Skalarprodukte ab?

$$\begin{aligned}
&x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m \qquad y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m \\
&\frac{d}{dt}(x(t)\cdot y(t)) = \frac{d}{dt}(x_1(t)y_1(t) + \ldots + x_m(t)y_m(t)) \\
&= \dot{x}_1 y_1 + x_1\dot{y}_1 + \ldots + \dot{x}_m y_m + x_m \dot{y}_m \\
&\qquad = \dot{x}(t)\cdot y(t) + x(t)\cdot \dot{y}(t)
\end{aligned}$$

(ii) Wie verändert sich der Betrag der Geschwindigkeit?



$\ddot{\gamma} = \partial_t^2 \gamma =$ Beschleunigung

$$\begin{aligned}
&\partial_t \|\dot{\gamma}(t)\| = \partial_t \sqrt{\dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)} \\
\overset{(*)}{=} \quad & \frac{2\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)}{2\sqrt{\dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)}} = \frac{\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = a
\end{aligned}$$

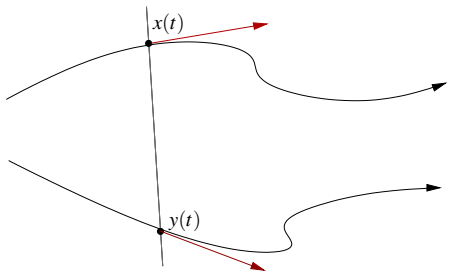
$(*) =$ summandenweises Differenzieren

(iii) Falls eine Kurve mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag (d.h. $a = 0$) durchlaufen wird, dann gilt $\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) = 0$, d.h. $\ddot{\gamma}$ steht senkrecht auf $\dot{\gamma}$.

Hierzu: $\|\dot{\gamma}\| = c \Rightarrow \dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) = c^2 \overset{\partial_t}{\Rightarrow} \ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) = 0$

(iv) Betrachten wir den Abstand zweier Kurven:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \|x(t) - y(t)\| \\
= \quad & \frac{\partial_t\big((x(t)-y(t))\cdot(x(t)-y(t))\big)}{2\|x(t)-y(t)\|} \\
= \quad & (\dot{x}(t) - \dot{y}(t))\cdot\frac{x(t)-y(t)}{\|x(t)-y(t)\|}
\end{aligned}$$



5.3 Vektorwertige Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

Bis jetzt haben wir skalare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ (Fall $n \geq 1, m = 1$) und Kurven (Fall $n = 1, m \geq 1$) betrachtet. Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall $n \geq 1,\ m \geq 1$ zu:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto f(x) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1,..,x_n) \\ f_2(x_1,..,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,..,x_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } f(y) &= f(x) + a(y-x) + o(y-x) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_m(y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} —\nabla f_1(x)— \\ \vdots \\ —\nabla f_m(x)— \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} + o(y-x) \end{aligned}$$

Dem liegt eine komponentenweise Betrachtung

$$f_i(y) = f_i(x) + \nabla f_i(x)(y-x) + o_i(y-x)$$

zugrunde. Damit sehen wir ein, dass die darstellende Matrix A zur linearen Abbildung $a(\cdot)$ die Gestalt

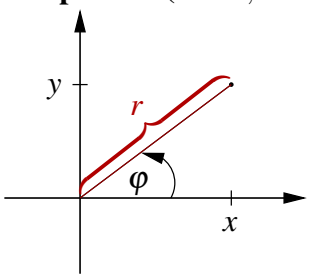
$$Df := A = \begin{pmatrix} —\nabla f_1(x)— \\ \vdots \\ —\nabla f_m(x)— \end{pmatrix} \qquad \textit{(Jacobi-Matrix)}$$

hat. D.h. wenn $A = (a_{ij})_{i,j}$ so ist $a_{ij} = \partial_{x_j} f_i(x)$; der Zeilenindex gibt also die Komponente von f an, die abgeleitet wird, der Spaltenindex die Variable, nach der abgeleitet wird.

Falls $n = 1,\ m \geq 1$ ist, gilt: $Df(t) = \partial_t f(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_m(t) \end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{(m,1)}$

Falls $n \geq 1,\ m = 1$ ist, gilt: $Df(x) = \nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \qquad \in \mathbb{R}^{(1,n)}$

Beispiel 5.9 ($n = 2,\ m = 2$) *Es gilt folgende Beziehung:*



$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi$$

$$y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

Definieren wir die zugehörige Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Als Jacobi-Matrix erhalten wir:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Anwendung: *Auswirkung von Störungen im Radius r und im Winkel φ auf die Position:*

$$\begin{pmatrix} x(r+\delta r, \varphi+\delta\varphi) \\ y(r+\delta r, \varphi+\delta\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} (\cos\varphi)\delta r - r(\sin\varphi)\delta\varphi \\ (\sin\varphi)\delta r + r(\cos\varphi)\delta\varphi \end{pmatrix}}_{Df(r,\varphi)\begin{pmatrix} \delta_r \\ \delta_\varphi \end{pmatrix}} + o\begin{pmatrix} \delta_r \\ \delta_\varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{r=0}$ *Der Effekt von Störungen in φ ist von höherer Ordnung.*

$\boxed{\varphi=0}$ *y ist sensitiv gegenüber Störungen in φ.*
x ist sensitiv gegenüber Störungen in r.

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 5.8.

Satz 5.10 (Kettenregel) *Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, dann ist $f \circ g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und es gilt*

$$\underbrace{D(f\circ g)(x)}_{\in\mathbb{R}^{m,k}} = \underbrace{(Df)(g(x))}_{\in\mathbb{R}^{m,n}}\underbrace{Dg(x)}_{\in\mathbb{R}^{n,k}} \qquad \textit{(Matrizenmultiplikation).}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(y+w) &= f(y) + \underbrace{Df(y)}_{A} w + o_f(w) \\
g(x+v) &= g(x) + \underbrace{Dg(x)}_{B} v + o_g(v) \\
\Rightarrow (f\circ g)(x+v) &= f(g(x) + Bv + o_g(v)) \\
&\overset{y=g(x)}{=} f(g(x)) + A(Bv + o_g(v)) + o_f(Bv + o_g(v)) \\
&= (f\circ g)(x) + ABv + \underbrace{Ao_g(v) + o_f(Bv + o_g(v))}_{=:\tilde{o}(v)}
\end{aligned}$$

mit $AB = (Df)(g(x))Dg(x)$.

Es bleibt zu zeigen: $\frac{\tilde{o}(v)}{\|v\|} \overset{!}{\longrightarrow} 0$ für $v \longrightarrow 0$. Es gilt:

$$\frac{\tilde{o}(v)}{\|v\|} = \frac{Ao_g(v)}{\|v\|} + \frac{o_f(Bv+o_g(v))}{\|v\|} = A\underbrace{\frac{o_g(v)}{\|v\|}}_{\overset{v\to 0}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{o_f(Bv+o_g(v))}{\|Bv+o_g(v)\|}}_{\overset{v\to 0}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{\|Bv+o_g(v)\|}{\|v\|}}_{\leq \underbrace{\frac{\|Bv\|}{\|v\|}}_{\leq C} + \underbrace{\frac{\|o_g(v)\|}{\|v\|}}_{\overset{v\to 0}{\longrightarrow} 0}} \overset{v\to 0}{\longrightarrow} 0$$

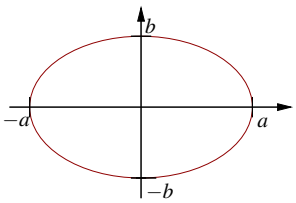
□

Beispiele 5.11 *(i)*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix},$$
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2+y^2},$$

$(f\circ g)'(t)$ direkt berechnet:

$$f\circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t},$$
$$(f\circ g)'(t) = \frac{-a^2\cos t\sin t + b^2\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}.$$



Falls $a=b=1$: $\quad (f\circ g)(t) = 1$ *und* $(f\circ g)'(t) = 0$
$(f\circ g)'(t)$ mit Kettenregel berechnet:

$$\nabla g(t) = \dot{g}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x,y) = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\Rightarrow ((\nabla f)(g(t)))\,\dot{g}(t) = \frac{(a\cos t, b\sin t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \overset{s.o.}{=} (f\circ g)'(t)$$

(ii)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad g(x) &= z + Bx \quad \textit{mit } z\in\mathbb{R}^n, B\in\mathbb{R}^{n,k} \\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad f(y) &= w + Ay \quad \textit{mit } w\in\mathbb{R}^m, A\in\mathbb{R}^{m,n} \\ (f\circ g) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad (f\circ g)(x) &= w + A(z+Bx) = (w+Az) + ABx \end{aligned}$$

$f, g, f\circ g$ sind affine Funktionen und es gilt

$$D(f\circ g) = AB = DfDg.$$

Beliebige Richtungsableitungen Betrachte $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_v f(x) &:= \partial_t f(x+tv)|_{t=0} \\ &\overset{\substack{g(t)=x+tv \\ (g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n)}}{=} \nabla f(g(0))\dot{g}(0) = \nabla f(x)v = \operatorname{grad} f \cdot v \qquad \text{(Richtungsableitung)} \end{aligned}$$

Folgerung 5.12 *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen und f sei die inverse Abbildung zu g, d.h. $(f \circ g)(x) = x$; dann gilt*

$$(Df)(g(x)) = (Dg(x))^{-1}.$$

Notation 5.13 $g^{-1} := f$ *(vgl. Umkehrfunktionen in 1D)*

Bemerkung 5.14 *Man kann zeigen, dass es genügt anzunehmen, dass $Dg(x)$ nicht singulär ist, um zu folgern, dass für eine Umgebung U von x gilt, dass $f = g^{-1}$ auf $g(U)$ existiert und dass für $y \in g(U)$ gilt, dass f differenzierbar ist und $(Dg(f(x))) = (Df)(g(x))^{-1}$. (vgl. Satz 13.25)*

Merkregel 5.15 $D(g^{-1}) = (Dg)^{-1}$
Achtung: *Die Auswertung erfolgt mal im Urbild, mal im Bild.*

Beweis: $f \circ g$ ist die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x$. Da $\partial_{x_j} x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ ist $D\,\mathrm{id} = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Mit der Kettenregel erhalten wir aus $\mathbb{1} = D(f \circ g)(x) = (Df)(g(x))\, Dg(x)$ die Behauptung.

□

Beispiele 5.16 *(i)* $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

Achtung: *Diese Abbildung ist nicht global invertierbar ($r = 0 \rightsquigarrow \varphi$ ist beliebig, ferner sind* sin *und* cos *2π-periodisch), aber für $r \neq 0$ ist sie lokal invertierbar.*

$$\begin{aligned} D_{(x,y)} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &= D_{(r,\varphi)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \\ \Rightarrow \quad D_{(x,y)} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &= \frac{1}{r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) *Spiegelung, vgl. Beispiele 4.11 (iii)*

$$\begin{aligned}
f(x,v) &= x - 2\frac{v(x\cdot v)}{\|v\|^2} = h(x) + (g\circ l)(x) \quad (v\,fest) \\
&\quad (wobei\ h(x) = x,\ g(t) = -2\tfrac{v}{\|v\|^2}t,\ l(x) = x\cdot v) \\
D_x f(x,v) &\overset{Kettenregel}{=} Dh + \dot{g}\nabla l \\
&= \mathbb{1} - 2\frac{v}{\|v\|^2}\underbrace{\nabla(x\cdot v)}_{v^T} = \underbrace{\mathbb{1} - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}}_{Matrix\ zu\ f\ (linear)} =: R \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir v als Variable und halten x fest:

$$\begin{aligned}
f_i(x,v) &= x_i - \frac{2v_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j x_j\right)}{\|v\|^2} \\
\Rightarrow \partial_{v_k} f_i &\overset{Produktregel}{=} 0 - 2\left(\frac{\delta_{ik}(v\cdot x)}{\|v\|^2} + \frac{v_i x_k}{\|v\|^2} - \frac{v_i(v\cdot x)2v_k}{(v\cdot v)^2}\right) \\
D_v f &= -2\left(\frac{(v\cdot x)}{\|v\|^2}\mathbb{1} + \frac{vx^T}{\|v\|^2} - \frac{(v\cdot x)2vv^T}{\|v\|^4}\right) \\
&= -\frac{2}{\|v\|^2}\left(vx^T + (v\cdot x)R\right) \qquad mit\, R = \mathbb{1} - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}
\end{aligned}$$

5.4 Die Geometrie von Funktionsgraphen

Betrachten wir nun genauer die Graphenabbildung: Zu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist $G_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, G_f(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}$ eine Kurve die den Graphen von f beschreibt. Die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die (für differenzierbares f) im Punkt $\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}$ eine Tangente an den Graphen ist, hat die Form

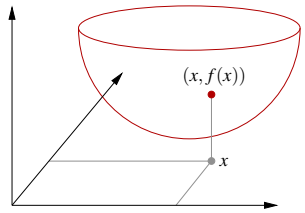
$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\end{pmatrix}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\end{pmatrix} = G_f'(x)$ ist ein Tangentialvektor an den Graphen.

Um dies auf Graphen skalarer Funktionen über dem $\mathbb{R}^n$ zu verallgemeinern, sei $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}; x\mapsto f(x)$ gegeben. Dann definieren wir

$$G_f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}; x\mapsto\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1,\ldots,x_n)\end{pmatrix}\right],$$

$$\Rightarrow DG_f(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \hline \nabla f(x) \end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{n+1,n}.$$



Beispiel 5.17

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2, \quad \nabla f(x,y) = (2x,2y), \\ DG_f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 2x & 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier sind die partiellen Ableitungen von G_f (d.h. die Spalten von DG_f) die Richtungsvektoren der Tangentialebene:

$$\begin{aligned} &\textit{Im Punkt } (0,0) \textit{ ist die Tangentialebene} && \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ &\textit{Im Punkt } (1,0) \textit{ ist die Tangentialebene} && \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie alle ihre Linearkombinationen die Tangentialvektoren an den Graphen im Punkt $(1,0)$, die Menge aller Tangentialvektoren ist also der Untervektorraum $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Dieser unterschiedet sich von der Tangentialebene lediglich durch die fehlende Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein bezeichnet man den affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$, der den Graphen in einem Punkt tangential berührt, als *affinen Tangentialraum*, den Untervektorraum aller Tangentialvektoren (der also durch den Ursprung verläuft) als *Tangentialraum*.

Definition 5.18 (Tangentialraum an den Graphen)

$$T_{(x,f(x))}G_f := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_1 f \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \partial_n f \end{pmatrix}\right\}$$

ist der Tangentialraum an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$, ein n-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$T^{aff}_{(x,f(x))}G_f := \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + T_{(x,f(x))}G_f$$

ist der affine Tangentialraum an G_f, ein n-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dabei sind $\begin{pmatrix} | \\ e_i \\ | \\ \partial_i f \end{pmatrix}$ für $i = 1, \ldots, n$ die Tangentialvektoren (zu den Koordinatenrichtungen). Es gilt

$$\begin{pmatrix} | \\ x + he_i \\ | \\ f(x + he_i) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | \\ x \\ | \\ f(x) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} | \\ e_i \\ | \\ \partial_i f \end{pmatrix}}_{\text{Tangente an } G_f \text{ für variierendes } h} + o(h)$$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 5.7.

Lemma 5.19 (Normalenvektor) *Der Vektor*

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f\|^2}} \begin{pmatrix} | \\ -\operatorname{grad} f \\ | \\ +1 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf $T_{(x,f(x))}G_f$ und hat die Länge 1.

Beispiel 5.20

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2, \\ N(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ N(1,0) &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 5.7.
Beweis:

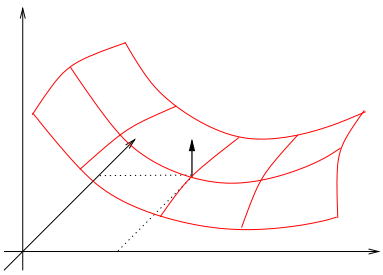
$$\begin{aligned} \text{Es gilt } ||N(x)|| &= \sqrt{N(x)\cdot N(x)} \qquad (\text{„}\cdot\text{“} = \text{ Skalarprodukt im } \mathbb{R}^{n+1}) \\ &= \sqrt{\frac{(-\operatorname{grad} f)\cdot(-\operatorname{grad} f)+1\cdot 1}{1+||\operatorname{grad} f||^2}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } N(x)\cdot\begin{pmatrix} e_i \\ \partial_i f \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1+||\operatorname{grad} f||^2}}(-\underbrace{\operatorname{grad} f\cdot e_i}_{\partial_i f}+1\partial_i f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

□

Beispiel 5.21



Betrachte

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-1)^2-(y-1)^2, \quad \textit{dann gilt} \\ \nabla f(x,y) &= (2(x-1),-2(y-1)), \\ N(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+4(x-1)^2+4(y-1)^2}}\begin{pmatrix} -2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Punkt $(1,1)$ *gilt* $N(1,1)=e_3$.

Lemma 5.22 (Notwendige Bedingung für lokales Maximum oder Minimum)
$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und f habe in $x\in\mathbb{R}^n$ ein lokales Maximum oder Minimum, dann gilt:

$$\operatorname{grad} f = 0.$$

Beweis: $t \mapsto f(x+tv)$ hat ebenfalls ein Extremum für $t=0$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ (= in allen Richtungen), d.h. aber

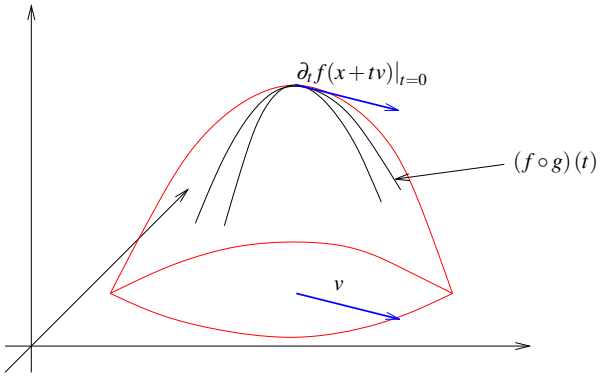
$$\partial_t f(x+tv) = 0 \qquad \text{für } t = 0.$$

Mit der Kettenregel für $(f \circ g)$ mit $g(t) = x + tv\,(g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ folgt:

$$\partial_t f(x+tv) = (\text{—}\nabla f\text{—}) \begin{pmatrix} | \\ \dot{g}(0) \\ | \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f \cdot v = 0$$

für alle v (insbesondere für $v = \operatorname{grad} f$).

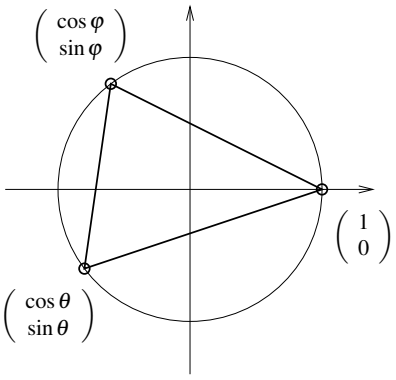
$\Rightarrow 0 = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f = ||\operatorname{grad} f||^2 \Rightarrow \operatorname{grad} f = 0.$



□

Beispiel 5.23

Wir suchen unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte auf dem Einheitskreis liegen, das mit dem maximalen Flächeninhalt.
Da Drehungen um den Ursprung die Fläche nicht ändern, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ein Eckpunkt auf der x-Achse liegt, also die Koordinaten $(1;0)^T$ hat. Da alle Punkte auf dem Einheitskreis liegen, lassen sich die beiden anderen Punkte als $(\cos\varphi;\sin\varphi)^T$ und $(\cos\theta;\sin\theta)^T$ darstellen. Dabei sind $\varphi,\theta \in [0,2\pi)$.



Die (vorzeichenbehaftete) Fläche ist dann

$$\begin{aligned} A(\varphi,\theta) &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \cos\theta - 1 & \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi - \sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}\big(sin(\theta-\varphi) + \sin\varphi - \sin\theta\big). \end{aligned}$$

Als partielle Ableitungen ergeben sich

$$\partial_\varphi A(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\big(-cos(\theta-\varphi)+\cos\varphi\big),$$
$$\partial_\theta A(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\big(cos(\theta-\varphi)-\cos\theta\big).$$

Da an den Extremstellen $\partial_\varphi A(\varphi,\theta) = \partial_\theta A(\varphi,\theta) = 0$ *ist, muss* $\cos\varphi = \cos\theta$ *sein. Da* $\varphi,\theta \in [0,2\pi)$ *liegen, ist entweder* $\varphi = \theta$ *oder* $\varphi = 2\pi - \theta$.
Im ersten Fall ist $\cos\varphi = \cos\theta = \cos 0$. *Da* $\varphi,\theta \in [0,2\pi)$, *bleibt nur* $\varphi = \theta = 0$. *Anhand des Vorzeichens der Funktion A überlegt man sich, dass dies ein Sattelpunkt ist.*
Im zweiten Fall ist $\cos(\varphi) = \cos(2\pi - 2\varphi)$. *Da* $\varphi \in [0,2\pi)$ *liegt, ist* $2\pi - 2\varphi \in (-2\pi, 2\pi]$.
Damit ergeben sich also die Möglichkeiten

- $2\pi - 2\varphi = \varphi$: *Also* $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\theta = \frac{4}{3}\pi$.
- $2\pi - 2\varphi = 2\pi - \varphi$: *Also* $\varphi = 0$, $\theta = 2\pi$, *nicht innerhalb des betrachteten Intervalls.*
- $2\pi - 2\varphi = -\varphi$: *Also* $\varphi = 2\pi$, *nicht innerhalb des betrachteten Intervalls.*
- $2\pi - 2\varphi = -2\pi + \varphi$: *Also* $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

Damit ergibt sich das gleichseitige Dreieck als Minimal- und Maximalstelle (abhängig von der Orientierung der Punkte hat die Fläche dabei unterschiedliches Vorzeichen).

5.5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Nach diesen konkreten Rechungen betrachten wir noch die allgemeine theoretische Einordnung mehrdimensionaler Funktionen in die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Definition 5.24 (Stetigkeit) *Eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *heißt* stetig *in* $x \in \mathbb{R}^n$, *falls für jede Folge* $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $x^{(k)} \in R^n$ *und* $||x - x^{(k)}|| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *gilt*

$$||f(x) - f(x^{(k)})|| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Vgl. Definition 2.9 zur Stetigkeit skalarer Funktionen in 1D)

Bemerkung 5.25 *(i) Der Stetigkeitsbegriff wird auf den Konvergenzbegriff für Folgen im* $\mathbb{R}^n$ *zurückgeführt. Die Konvergenz von Folgen im* $\mathbb{R}^n$ *kann man auf zwei Weisen betrachten:*

- *Eine Folge* $(x^{(k)})_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}_k$ *im* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert gegen* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *falls alle Komponentenfolgen* $(x_i^{(k)})_k$ *(dies sind gewöhnliche Folgen reeller Zahlen)*

gegen die entsprechende Komponente x_i von x konvergieren. Diese Variante haben wir bereits auf Seite 59 verwendet, um stetige Funktionen in höherer Dimension einzuführen.

- *Eine Folge $(x^{(k)})_k$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen x, falls der Abstand $||x^{(k)} - x||$ (ebenfalls eine Folge reeller Zahlen) gegen Null konvergiert. Die obige Definition verwendet diese Defintion von Konvergenz im $\mathbb{R}^n$.*

Beide Sichtweisen sind gleichwertig.

(ii) Mit beiden Ansätzen sieht man leicht, dass die Funktion auf Seite 179 in der Tat nicht stetig ist. Wenn man mit (wie dort vorgeführt) verschiedenen Folgen gegen den Nullpunkt läuft, so ergeben sich bei den Funktionswerten verschiedene Grenzwerte.

Auch in höherer Definition ergibt sich ein äquivalenter Stetigkeitsbegriff wie folgt:
Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x|| < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon\text{-Kugel bzw. } \varepsilon\text{-Ball um } x)\,.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stetig* in $x \in \mathbb{R}^n$, falls zu jeder ε-Kugel $B_\varepsilon(f(x))$ im $\mathbb{R}^m$ um $f(x)$ eine δ-Kugel $B_\delta(x)$ im $\mathbb{R}^n$ um x existiert, so dass

$$f(B_\delta(x)) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in B_\delta(x)\} \subset B_\varepsilon(f(x))\,.$$

Es wird also gefordert, dass es zu jeder Kugel $B_\varepsilon(f(x))$mit Radius ε um den Punkt $f(x)$ eine Kugel $B_\delta(x)$ mit Radius δ existiert, deren Abbildung in den Bildraum von f ("$f(B_\delta(x))$") innerhalb besagter Kugel $B_\varepsilon(f(x))$ liegt.

Nachweis der Äquivalenz: analog zum 1D-Fall. (✓)

Folgerung 5.26 *Wir erhalten somit direkt:*

- *Verkettungen $f \circ g$ stetiger Funktionen sind stetig.*
- *Produkte ($\cdot, \times$, Matrix-Vektor) stetiger Funktionen sind stetig.*
- *Summen stetiger Funktionen sind stetig.*

Satz 5.27 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit) *Eine differenzierbare Funktion ist stetig.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(x) + Df(x)(x_k - x) + o(x_k - x) \\ \Rightarrow ||f(x_k) - f(x)|| &= ||Df(x)(x_k - x) + o(x_k - x)|| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{||Df(x)(x_k - x)||}_{\leq C||x_k - x||} + \underbrace{||o(x_k - x)||}_{\overset{x_k \to x}{\longrightarrow} 0} \\ & \left[\text{z.B. } C = n \max_{i,j=1,\dots,n} \left|\partial_j f_i(x)\right|\right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Falls $||x_k - x|| \overset{k\to\infty}{\to} 0$ in $\mathbb{R}^n$, so folgt $||f(x_k) - f(x)|| \overset{k\to\infty}{\to} 0$ im $\mathbb{R}^m$

□

5.6 Nullstellen nichtlinearer Funktionen in höherer Dimension

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben. Gesucht ist die Nullstellenmenge

$$\mathcal{N}_f = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = 0\}.$$

Beispiele 5.28 $\boxed{n \geq 1, m = 1}$

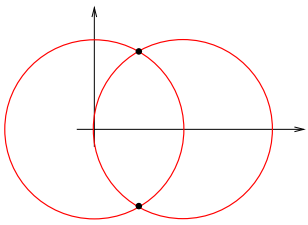
$\mathcal{N}_f = \{x \,|\, f(x) = 0\}$ *ist die Niveaumenge zum Wert* 0.

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_f =$ *Kreis um den Ursprung* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit Radius* 1.

$g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_g =$ *Kreis um* $\binom{1}{0}$ *mit Radius* 1.

$\boxed{n = 2, m = 2}$

$h(x,y) = \binom{f(x,y)}{g(x,y)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_h =$ *Schnittmenge der beiden Kreise.*

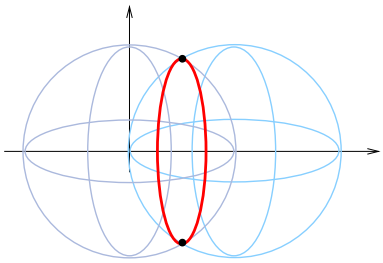


$\boxed{n = 3, m = 2}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \Rightarrow \mathcal{N}_f =$ *Kugel um* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit Radius* 1.

$g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \Rightarrow \mathcal{N}_g =$ *Kugel um* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit Radius* 1.

$h(x,y,z) = \binom{f}{g}(x,y,z) \quad \Rightarrow \mathcal{N}_h =$ *Schnittkreis der beiden Kugeln.*



$\boxed{n=3, m=3}$

$l(x,y,z) = by + cz$ *(Ebene durch den Ursprung* 0 *mit Normale* $\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}(0,b,c)^T$*)*

$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} f \\ g \\ l \end{pmatrix}(x,y,z) \quad \Rightarrow \mathcal{N}_h =$ *Schnittpunkte des obigen Schnittkreises mit der Ebene durch* 0 *mit der Normalen* $N = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Betrachten wir nun die Nullstellenbestimmung mittels Newtonverfahren im $\mathbb{R}^n$: Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto f(x)$ gegeben. Gesucht ist ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^*) = 0$.
<u>Ansatz:</u>

$$f(y) = \underbrace{f(x) + Df(x)(y-x)}_{\text{affine Abbildung}} + o(y-x)$$

Statt x^* mit $f(x^*) = 0$ zu suchen, suchen wir zu einem festen x ein $y = y(x)$ mit

$$f(x) + Df(x)(y-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Df(x)(y-x) = -f(x).$$

Nehmen wir an, dass $Df(x)$ invertierbar ist, dann kann das obige Gleichungssystem gelöst werden und die Lösung ist

$$y = x - Df(x)^{-1} f(x).$$

Wie im skalaren Fall iterieren wir dies:

Schema 5.29 (Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$)
Zumeinem Startvektor x^0 berechne iterativ

$$x^{k+1} = x^k - Df(x^k)^{-1} f(x^k)$$

(Vgl. skalarer Fall: $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$) (siehe Abschnitt 2.5)

Im Algorithmus: Man berechnet nicht die inverse Matrix, sondern löst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Df(x^k)z &= -f(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k + z \qquad\qquad (z = x^{k+1} - x^k). \end{aligned}$$

5.7 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 5.1 Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren an den Stellen $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ und tragen Sie diese in die Skizze ein.

Anwesenheitsaufgabe 5.2 Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1).$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren an den Stellen $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ und tragen Sie diese in die Skizze ein.

Anwesenheitsaufgabe 5.3 Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = (2-t)\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1).$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren an den Stellen $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ und tragen Sie diese in die Skizze ein.

Aufgabe 5.4 Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die $1-$Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1), $(x_1, -x_1)$. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

Aufgabe 5.5

a) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen x_i, $i = 1, \ldots n$ ist, dann ist f total differenzierbar. ja □ nein □

b) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist f richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen x_i, $i = 1, \ldots n$. ja □ nein □

c) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A \in \mathbb{R}^{n,1}$ ein Spaltenvektor. ja □ nein □

d) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A \in \mathbb{R}^{1,n}$ ein Zeilenvektor. ja □ nein □

e) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A = 0$. ja □ nein □

f) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann enthält die Jacobimatrix die partiellen Ableitungen. ja □ nein □

g) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann steht in der Jacobimatrix an einer Stelle h und an allen anderen 0. ja □ nein □

Aufgabe 5.6 Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &:= \max(|x_1|,|x_2|) \\ &= \frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|+||x_1|-|x_2||) \quad \text{und} \\ g(x_1,x_2) &:= |x_1|+|x_2| \,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2) = r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1,x_2) = r\} \,. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.
b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.
c) In welchen Punkten sind die Funktionen f, g differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?
Tipp: Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

Aufgabe 5.7 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \text{mit} \qquad x^2+y^2 < 1.$$

a) Worum handelt es sich bei dem Graphen dieser Funktion?

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt $(x,y,f(x,y))$.

d) Bestimmen Sie die Normale $N(x,y)$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt (x,y).

e) Geben Sie $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ und $N(x,y)$ für $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (\frac{1}{2},0)$ an.

Aufgabe 5.8 Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.9 Thema: Differenzierbarkeit

a) Was bedeutet für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dass f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist?

b) Wie hängen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zusammen?

c) Welche Voraussetzung an die partiellen Ableitungen impliziert die Differenzierbarkeit?

d) Welche geometrische Interpretation hat der Gradient von f an der Stelle x_0?

e) Wie berechnet man den Gradienten?

f) Was besagt der Satz von Schwarz?

g) Was ist eine Richtungsableitung?

h) Was ist ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum einer Funktion vom $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$?

i) Welches Gleichungssystem muss man lösen, um solche lokalen Extremwerte zu finden?

j) Was ist eine positiv (bzw. negativ) definite $(n \times n)$-Matrix?

k) Was ist die Hesse-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

l) Was folgt, wenn der Gradient an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches verschwindet und die Hessematrix dort positiv definit ist? Was gilt, wenn sie dort negativ definit ist?

Aufgabe 5.10 Thema: Differenzierbarkeit bei vektorwertigen Funktionen

a) Wie ist Differenzierbarkeit für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ definiert?

b) Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

c) Was versteht man unter der Jacobimatrix einer differenzierbaren Abbildung an einer Stelle x_0?

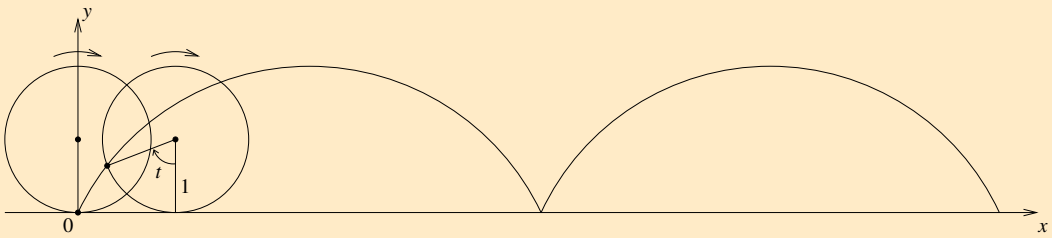
d) Was besagt die mehrdimensionale Kettenregel ?

e) Sind differenzierbare Abbildungen immer stetig?

f) Wie sind Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ definiert?

g) Was sind Kugel-, was Zylinderkoordinaten ?

Aufgabe 5.11 Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt!



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt beschreibt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil $a)$ um $(0,-1)^T$ verschieben und die Lösung aus Aufgabenteil $b)$ addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit.

Aufgabe 5.12 Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = 2x + 5y^2x$ im Punkte $(2,1,f(2,1))$.

Aufgabe 5.13 Gegeben seien die Funktionen

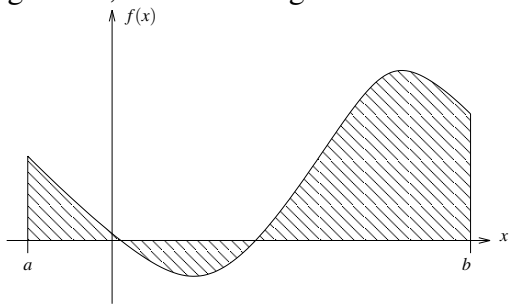
$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y + 2x \\ x^3 - 2y^2x \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\ln(1+y^2) + z \\ \cos(zx) + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls existent die Jacobimatrix $D(f \circ g)(2,0,0)$.

6 Integration von Funktionen in einer Dimension

Fragestellung: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $\{(x, f(x)) \,|\, x \in [a,b]\}$ und der $x-$Achse bestimmen. Die Anteile von Bereichen, in denen f negativ ist, sollen mit negativem Vorzeichen gewichtet werden.



Später werden wir den Zusammenhang zur Differentiation herausarbeiten.

6.1 Definition über Riemann-Summen

Wir betrachten eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$:

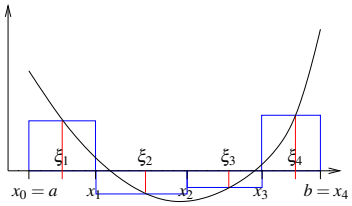
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
$$h = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$$

In jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ wählen wir eine Zwischenstelle ξ_k, dann ist der Flächeninhalt des Streifens

$$S_k := \{(x,y) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k, 0 \le y \le |f(\xi_k)|\}$$

gegeben durch

$$|x_{k-1} - x_k| \cdot |f(\xi_k)| \,.$$



Den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt können wir approximieren durch eine sogenannte *Riemann-Summe*:

$$S_h = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Beispiel 6.1 *(i) Betrachte*

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv c \qquad \textit{(konstante Funktion), dann ist} \\ S_h &= c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + \ldots + c(x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b-a). \end{aligned}$$

<u>*Wir schreiben:*</u> $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

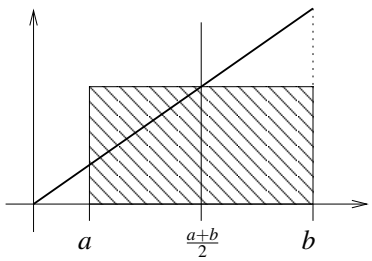
(ii) Betrachte die identische Abbildung

$$\begin{aligned}
f(x) &= x, \quad \textit{und wähle} \\
\xi_k &= x_k = a + (b-a)\frac{k}{n},\ k = 0,\dots,n \qquad \textit{(äquidistante Unterteilung).} \\
\Rightarrow S_h &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)}_{f(\xi_k)} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{x_k - x_{k-1}} \\
&= n\frac{a(b-a)}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \qquad \left[\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \\
&\overset{n\longrightarrow\infty\,(h\to 0)}{\longrightarrow} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = ab - a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{2ab}{2} \\
&= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

(Hier haben wir die Funktion in beliebig viele beliebig kleine Intervalle unterteilt und so beliebig genau approximiert.)
Wir schreiben

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$$

Geometrische Interpretation:



Definition 6.2 *Eine Funktion heißt* integrierbar *(*Riemann-integrierbar*), falls es eine Folge von Zerlegungen gibt, so dass unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen ξ_k die Folge S_h für $h \longrightarrow 0$ (gegen denselben Grenzwert) konvergiert. Den Grenzwert bezeichnen wir mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

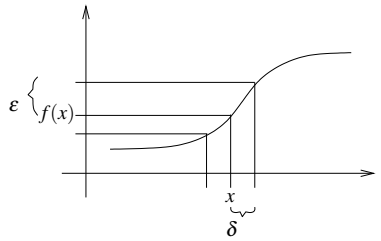
*und nennen ihn das (*Riemann-*)* Integral *von f über dem Intervall $[a,b]$.*

Satz 6.3 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f (auf $[a,b]$) integrierbar.*

Beweis: Zunächst konstruieren zu beliebigem ε eine Zerlegung, so dass für alle Wahlen von Zwischenstellen für die entstehenden Riemannsummen gilt

$$|S_h - \tilde{S}_h| \leq 2\varepsilon(b-a)\,.$$

(Erinnerung: f ist stetig in $x \Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle y mit $|y - x| < \delta$.)



Wähle also ε fest, dann konstruiere eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$:

Beginne mit $x_0 = a$. Zu bereits gewähltem x_{k-1} finde x_k folgendermaßen: f ist stetig in x_{k-1}, d. h. es gibt δ_k, so dass $|f(y) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$ für alle $|y - x_{k-1}| < \delta_k$; wähle größt mögliches δ_k.

Wähle nun $x_k = x_{k-1} + \frac{\delta_k}{2}$.

<u>Entweder</u> ist irgendwann δ_k so groß, dass $x_{k-1} + \frac{\delta_k}{2} \geq b$, dann setze $n = k, x_n = b$,

<u>oder</u> die Folge der x_k bricht nicht ab. Sie ist monoton (da alle $\delta_k > 0$) und beschränkt (durch b), konvergiert also gegen ein $x^* \leq b$. Da aber f in x^* stetig ist, kann man ein positives δ^* wählen, so dass $|f(y) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|y - x^*| < \delta^*$. Da andererseits $x_k \to x^*$, gilt $x_k \in (x^* - \frac{\delta^*}{4}, x^*]$ für genügend großes k.

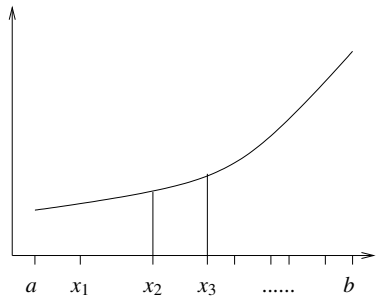
Für alle y mit $|y - x_k| < \frac{\delta^*}{2}$ gilt auch $|y - x^*| < \delta^*$, also $|f(y) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso gilt $|x_k - x^*| < \delta^*$, also $|f(x_k) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen folgt daraus $|f(x_k) - f(y)| < \varepsilon$ für alle y mit $|y - x_k| < \frac{\delta^*}{2}$.

Daher gilt $\delta_{k+1} \geq \frac{\delta^*}{2}$ (δ_{k+1} war ja größtmöglich gewählt), also

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\delta_{k+1}}{2} > x^* - \frac{\delta^*}{4} + \frac{\delta^*}{4} = x^*\,.$$

$\lightning$ zur Monotonie von (x_k).

Nun haben wir eine Zerlegung und auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ gilt $|f(\xi_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$ für alle Zwischenstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Betrachten wir also zwei verschiedene Zwischenstellen ξ_k und $\tilde{\xi}_k$, so gilt $|f(\xi_k) - f(\tilde{\xi}_k)| < 2\varepsilon$.



Das heißt aber, dass für zwei Riemannsummen $S_h, \tilde{S}_h$ dieser Zerlegung mit unterschiedlichen Zwischenstellen $\xi_k, \tilde{\xi}_k$ für $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$|S_h - \tilde{S}_h| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

Für jede Verfeinerung einer solchen Zerlegung (durch Anwenden des obigen Verfahrens auf alle Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$) und deren Riemannsummen $S_{h'}$ mit $h' \leq h$ gilt ebenfalls:

$$|S_h - S_{h'}| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

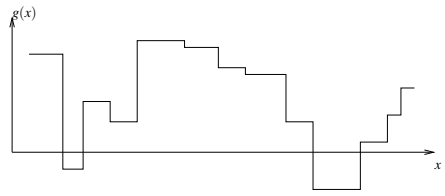
Konstruieren wir nun eine Folge von Zerlegungen für $\varepsilon \to 0$ durch schrittweises Verfeinern, so konvergieren die Riemannsummen demzufolge unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen.

□

Bemerkung 6.4 *Die Funktion*

$$g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \textit{mit} \qquad g(x) = f(\xi_k) \qquad \textit{auf}\ [x_{k-1}, x_k)$$
$$S_h(f) = \int_a^b g(x)\,dx$$

heißt Treppenfunktionsapproximation zu f .



Betrachten wir nun Regeln für das Integral und integrierbare Funktionen f, g auf $[a,b]$:

(i) Linearität (Addition):

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) + g(x)\,dx$$

(ii) Linearität (Multiplikation mit Skalar):

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(iii) Additivität:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für } a \le c \le b$$

(iv) Monotonie:

$$f(x) \le g(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Beweis: folgt direkt aus der Definition.

□

Satz 6.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Zu einer stetigen Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und einer stetigen, nicht negativen Funktion $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$
$$\left[p \equiv 1: \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\right]$$

Beweis: Sei $m = \min\{f(x)\,|\,x \in [a,b]\}, M = \max\{f(x)\,|\,x \in [a,b]\}$ (diese existieren, da f stetig ist), dann

$$\begin{aligned} m \le f(x) \le M \quad &\Rightarrow \quad mp(x) \le f(x)p(x) \le Mp(x) \\ \Rightarrow m\int_a^b p(x)\,dx \quad &= \quad \int_a^b mp(x)\,dx \\ &\le \quad \int_a^b f(x)p(x)\,dx \\ &\le \quad \int_a^b Mp(x)\,dx \\ &= \quad M\int_a^b p(x)\,dx \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Falls } \int_a^b p(x)\,dx = 0:}$ $\Rightarrow$ alle Integrale in obiger Ungleichungskette verschwinden

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)p(x)\,dx = 0 = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx \qquad \text{für jedes } \xi \in [a,b].$$

$\boxed{\text{Nun sei } \int_a^b p(x)\,dx \neq 0:}$ (d.h. $\int_a^b p(x)\,dx > 0$, also kann man die Ungleichungen dadurch dividieren ohne das sich das Ungleichheitszeichen umdreht)

$$\Rightarrow \qquad m \leq \underbrace{\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b p(x)\,dx}}_{=:\,Q} \leq M \qquad \text{d.h. } Q \in [m,M].$$

Nach dem Zwischenwertsatz (vgl. Seite 55) gibt es eine Zahl ξ, so dass

$$f(\xi) = Q \quad \Rightarrow \quad f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)p(x)\,dx.$$

□

Für $p \equiv 1$ hat die Zahl Q einen besonderen Namen:

Notation 6.6 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann bezeichnen wir*

$$\overline{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

*als (*Integral-*)* Mittelwert *von f auf $[a,b]$.*

Bemerkung 6.7 *Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass $f(\xi) = \overline{f}$.*

Definition 6.8 *Sei f integrierbar auf $[a,b]$, dann definieren wir:*

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Damit gilt dann auch allgemein:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

6.2 Zusammenhang Integration und Differentiation

Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation.

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ und x_0 eine feste Zahl aus dem Intervall. Dann definiert

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

eine Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen F eine *Stammfunktion* zu f.

Satz 6.9 (Zusammenhang Differential- und Integralrechnung) *Die Funktion F ist differenzierbar und es gilt*

$$F'(x) = f(x).$$

Beweis: Betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt\right) \qquad \text{(Integralmittel von } f \text{ auf } [x,x+h]) \\
&\overset{\text{Bemerkung 6.7}}{=} f(\xi) \qquad \text{für ein } \xi \in [x,x+h].
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\xi = \xi(h) \to x$ und wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(\xi) = f(\xi(h)) \to f(x).$$

Damit existiert aber der Grenzwert des Differenzenquotienten, also ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

□

Satz 6.10 *Sind F und G Stammfunktionen von f auf $[a,b]$, d.h. $F' = G' = f$, dann gibt es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass*

$$F(x) = G(x) + C \qquad \textit{für alle } x \in [a,b].$$

Beweis: $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$; mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, dass $(F-G)(x) \equiv C$. Andernfalls gäbe es ein $\xi \in [a,b]$ mit $(F-G)' \neq 0$.

□

Bemerkung 6.11

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = \int_b^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad (F-G)(x) \equiv \int_a^b f(t)\,dt$$

Notation 6.12 *Wir schreiben $F = \int f(t)\,dt$* (unbestimmtes Integral) *(festgelegt bis auf eine Konstante C) für eine beliebige Stammfunktion von f.*

Satz 6.13 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann gilt:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis: $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist nach obigem Satz Stammfunktion, also gilt $F(x) = F_a(x) + C$ für alle $x \in [a,b]$. Es folgt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F_a(b) - \underbrace{F_a(a)}_{=0} = (F(b)+C) - (F(a)-C) = F(b) - F(a).$$

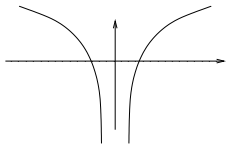
□

6.3 Weitere Integrationsregeln

- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ für $\alpha \neq -1$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$, $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$, $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$
- $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

  <u>hierzu:</u>
  Erinnerung (Ableitung der Umkehrfunktion): $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)}$ $\qquad x = f(y)$

  $$\ln = \exp^{-1} \text{ (Umkehrfunktion)} \quad \overset{x>0}{\Rightarrow} \quad \ln'(x) \overset{x=\exp(y)}{=} \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}$$

  $$\overset{x<0}{\Rightarrow} \quad (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$

  wobei arcsin die Umkehrfunktion zur Sinusfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist.
  <u>hierzu:</u>

  $$\sin' y = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$$
  $$\Rightarrow \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \overset{x=\sin y}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$

  wobei $\arctan x$ die Umkehrfunktion zu $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist.
  <u>hierzu:</u>

$$\begin{aligned}
&\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow \tan'(y) = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y,\\
&x = \tan y \Leftrightarrow y = \arctan(x) \quad \text{für } y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),\\
\Rightarrow\quad &\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} \overset{y=\arctan(x)}{=} \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

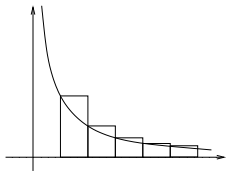
Weitere Integrale berechnen Sie in den Übungen 6.1 und 6.6.

Folgerung 6.14

$$\textit{Es gilt} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Eine Ähnliche Überlegung finden Sie in Aufgabe 6.8.
Beweis: Betrachte

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$



ferner gilt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot 1 = \int_1^{N+1} f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \frac{1}{n}$ für $t \in [n, n+1)$.
Insbesondere gilt $f(t) \geq \frac{1}{t}$ und damit

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \int_1^{N+1} f(t)\,dt \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(N+1) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Damit folgt dann aber

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

□

Siehe auch Beispiel 2.43.

Satz 6.15 (Substitutionsregel) *Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a,b]) \subset [c,d]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f, dann gilt

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

□

D.h. hinter der Substitutionsregel verbirgt sich die Kettenregel aus der Differentiation.

Merkregel 6.16 *Merke:* $s = \varphi(t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow$ „$ds = \varphi'(t)dt$“.

Beispiele 6.17

$$(i) \qquad \int_a^b \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{s}\,ds \qquad \textit{mit Substitution} \left[\begin{array}{ll} \varphi(t) = t^2+1, & f(s) = \frac{1}{s} \\ \varphi'(t) = 2t, & f(\varphi(t)) = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right]$$

$$= \ln|\varphi(b)| - \ln|\varphi(a)| = \ln(b^2+1) - \ln(a^2+1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \ln(t^2+1)$$

$$(ii) \qquad \int_a^b \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \qquad \textit{mit Substitution} \left[\begin{array}{ll} y & = \varphi(x) = 1-x^2 \\ dy & = -2x\,dx \end{array} \right]$$

$$= \sqrt{\varphi(b)} - \sqrt{\varphi(a)} = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2}$$

$$(iii) \qquad \int_a^b \sin t \cos t \, dt = -\int_{\cos a}^{\cos b} s \, ds = -\frac{1}{2}(\cos^2 b - \cos^2 a) \qquad \textit{mit Substitution} \begin{bmatrix} s = \cos t \\ \frac{ds}{dt} = -\sin t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int \sin t \cos t \, dt = -\frac{1}{2}\cos^2 t$$

(iv) *Die alternative Substitution* $\begin{bmatrix} s = \sin t \\ \frac{ds}{dt} = \cos t \end{bmatrix}$ *ergibt:*

$$\int_a^b \sin t \cos t \, dt = \int_{\sin a}^{\sin b} s \, ds = \frac{1}{2}(\sin^2 b - \sin^2 a)$$

$$\Rightarrow \int \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2}\sin^2 t = -\frac{1}{2}\cos^2 t + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$(v) \qquad \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy \qquad \textit{mit Substitution} \begin{bmatrix} x = \sin y \\ \frac{dx}{dy} = \cos y \end{bmatrix}$$

$$= \int \cos^2 y \, dy$$

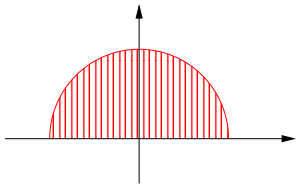
(Additionstheorem: $cos2y = cos^2 y - sin^2 y = 2cos^2 y - 1 \Rightarrow cos^2 y = \frac{1}{2}(cos(2y)+1)$*)*

$$= \frac{1}{2}\int \cos(2y) + 1 \, dy = \frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{y}{2}$$

(Additionstheorem: $\sin(2y) = 2\cos y \sin y$*)*

$$= \frac{1}{2}(\cos y \sin y + y) \overset{x=\sin y}{=} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right).$$

Anwendung:

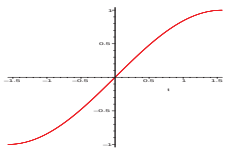


Fläche des Halbkreises:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

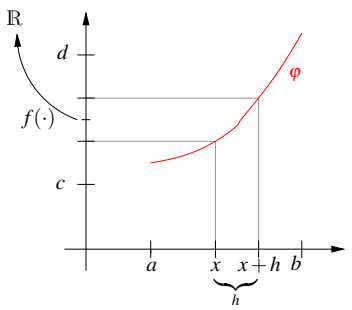
$$F = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(0 + \arcsin 1 - 0 - \arcsin(-1))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$



Weitere Beispiele finden Sie in den Übungen 6.2 und 6.7.

Bemerkung 6.18
φ beschreibt eine Deformation des Integrationsintervalls. Falls φ monoton ist $(\varphi' > 0)$,



repräsentiert $\varphi'(x) \approx \dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ *die Transformation von Streckenelementen (d.h. der Breite der Rechtecke der Riemann-Summe) aus dem Intervall* $[a,b]$ *mittels der Deformation* $(\varphi(x+h)-\varphi(x) \approx \varphi'(x)h)$. *Wenn man im Urbild integriert, muss man dies durch Anpassung der Grenzen berücksichtigen.*

Notation 6.19 *Wir schreiben* $F(b)-F(a) = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b = F(x)|_{x=a}^{x=b}$.

Satz 6.20 (Partielle Integration) *Seien* $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen und* f',g' *seien stetig, dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

Beweis: Setze $h(x) := f(x)g(x)$, dann gilt

$$[f(x)g(x)]_a^b = [h]_a^b = \int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

D.h. hinter der partiellen Integration verbirgt sich die Produktregel aus der Differentiation.

Beispiele 6.21

$$(i) \qquad \int_a^b xe^x\,dx \qquad \left(\textit{setze} \begin{bmatrix} g(x)=x, & f'(x)=e^x \\ g'(x)=1, & f(x)=e^x \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\int_a^b e^x\,dx + [xe^x]_a^b = [e^x(x-1)]_a^b \Rightarrow \int xe^x\,dx = e^x(x-1).$$

$$(ii) \qquad \int \sin t \cos t\,dt \qquad \left(\textit{setze} \begin{bmatrix} f'(t)=\sin t, & g(t)=\cos t \\ f(t)=-\cos t, & g'(t)=-\sin t \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\int (-\cos t)\cdot(-\sin t)\,dt + (-\cos t)\cdot\cos t = -\int \sin t\cos t\,dt - \cos^2 t$$

$$\Rightarrow 2\int \sin t\cos t\,dx = -\cos^2 t, \qquad \int \sin t\cos t\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 t.$$

$$(iii) \qquad \int_a^b \ln x\,dx = \int_a^b 1\ \ln x\,dx \qquad \left(\textit{setze} \begin{bmatrix} f(x)=x, & g(x)=\ln x \\ f'(x)=1, & g'(x)=\frac{1}{x} \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\int_a^b \underbrace{x\frac{1}{x}}_{1}\,dx + [x\ln(x)]_a^b = [x\ln(x)-x]_a^b \Rightarrow \int \ln x\,dx = x\ln(x)-x.$$

$$(iv) \qquad \int \arcsin x\,dx \qquad \left(\textit{setze}\ \left[\ f(x)=x,\quad g(x)=\arcsin x\ \right]\right)$$

$$= -\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + x\arcsin x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\textit{da:} \quad \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ \textit{(Substitution } s=1-x^2\textit{)}$$

Weitere Beispiele finden Sie in den Übungen 6.2 und 6.7.

Anwendung der bisherigen Ergebnisse auf das Integrieren rationaler Funktionen:

$$\text{Betrachte} \quad \begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^m. \end{aligned}$$

Gesucht: $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$

$\boxed{m=0}$

$$\int p(x)\,dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}x^{i+1} \quad \text{(Polynome)}$$

$\boxed{n \geq m}$ Mit Polynomdivision erreichen wir:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\tilde{p}(x)}_{\boxed{m=0}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\boxed{n<m}} \qquad \text{mit } r \in \mathscr{P}_l,\ l<m \text{ und } \tilde{p} \in \mathscr{P}_{n-m}$$

Damit haben wir den zweiten Fall $\boxed{n \geq m}$ auf die beiden Fälle $\boxed{m=0}$ und $\boxed{n \leq m}$ zurückgeführt. Es genügt also noch den Fall $\boxed{n<m}$ zu betrachten.

Wichtige Fallbeispiele:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a+x}\,dx &= \ln|a+x| \\
\int \frac{1}{b-x}\,dx &= -\ln|b-x| = \ln\frac{1}{|b-x|} \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \\
\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{y}\,dy \qquad \text{mit Substitution} \left[\begin{array}{l} y=1+x^2 \\ \frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}dy \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \\
\int \frac{x}{1-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x \qquad \text{vgl. Seite 213}
\end{aligned}$$

Im Fall allgemeiner rationaler Funktionen zerlegt man nun die Funktion in eine Summe dieser einfachen Funktionen:

Beispiele 6.22

(i) Nennerpolynome ohne reelle Nullstellen:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+7}\,dx = ?$$

Es ist $x^2-4x+7=(x-2)^2+3=3\left(\frac{(x-2)^2}{3}+1\right)$*, d.h. wir wählen für die Substitution* $t=\frac{x-2}{\sqrt{3}}$*:*

$$\begin{aligned}
(x^2-4x+7) &= 3(t^2+1), \\
\int \frac{2x+1}{x^2-4x+7}\,dx &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\sqrt{3}t+2, \\ 2x+1=2\sqrt{3}t+5 \end{array}\right] \\
&= \ln(1+t^2)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan t \\
&= \ln\left(1+\frac{(x-2)^2}{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

(ii) Nennerpolynome mit unterschiedlichen Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \frac{2x+5}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int -\frac{9}{x-2}+\frac{11}{x-3}\,dx \\
&= -9\ln|x-2|+11\ln|x-3|
\end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten A, B:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+5}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \\
1) \qquad & A+\frac{B(x-2)}{x-3}=\frac{2x+5}{x-3} \overset{x=2}{\Rightarrow} A=-9 \\
2) \qquad & \frac{A(x-3)}{x-2}+B=\frac{2x+5}{x-2} \overset{x=3}{\Rightarrow} B=11
\end{aligned}$$

Die obigen Konstanten A und B existieren und sind eindeutig festgelegt, da $x-2$ und $x-3$ eine Basis des (zweidimensionalen) $\mathscr{P}_1$ sind, sich $2x+5$ also eindeutig als Linearkombination dieser beiden Polynome schreiben laesst.

(iii) Nennerpolynome mit doppelten Nullstellen: Das Vorgehen unter (ii) funktioniert so nicht, wenn eine Nullstelle doppelt vorkommt. (Dann bilden die Linearfaktoren keine Basis.) In diesem Fall muss man den doppelten Linearfaktor gemeinsam behandeln:

$$\frac{3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{3x+2}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}$$

mit $A=5$ und $B=3$. Diese alternative Zerlegung ist möglich, da $x-1$ und 1 eine Basis von $\mathscr{P}_1$ bilden. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \frac{5}{(x-1)^2}dx+\int \frac{3}{x-1}\,dx \\
&= -\frac{5}{x-1}+3\ln|x-1|
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele finden Sie in Übung 6.4.

Bemerkungen 6.23 *Analoge Zerlegungen existieren auch für rationale Funktionen, bei denen der Nenner einen höheren Grad als 2 hat.*

6.4 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 6.1 Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\int_{-1}^{1} x^2+2x-\frac{1}{3}\,dx=0$ ja □ nein □

b) $\int_{-1}^{1} x^2+2x\,dx=0$ ja □ nein □

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{a)} \int_0^1 xe^x\,dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx\,, \quad \text{c)} \int \sqrt{x}\,dx\,.$$

Tipp: a) mit partieller Integration, b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration oder unter Verwendung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 6.3 Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

$$\text{a)} \int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx\,, \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin^4 x\,dx\,,$$

$$\text{c)} \int_{-\pi}^\pi \sin^5 x\,dx\,, \quad \text{d)} \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,dx\,.$$

Aufgabe 6.4 Berechnen Sie mit der Methode zum Integrieren rationaler Funktionen, die in der Vorlesung beschrieben wurde, die Integrale

$$\text{a)} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx\,.$$

Aufgabe 6.5 Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\int \sin(2x)\,dx = (\sin x)^2$ ja □ nein □

b) $\int \cos^2(x) + \sin^2(x)\,dx = x$ ja □ nein □

c) $\int 2x\cos x\,dx = \sin(x^2)$ ja □ nein □

d) $\int x \cdot e^x\,dx = x - e^x$ ja □ nein □

e) $\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(2x)$ ja □ nein □

Aufgabe 6.6 Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$ ja □ nein □

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = 0$ ja □ nein □

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = 0$ ja □ nein □

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \, dx = 0$ ja □ nein □

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+x^2} \sin x \, dx = 0$ ja □ nein □

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die zu integrierenden Funktionen und deren Symmetrieeigenschaften. Es ist nicht sinnvoll, die Integrale jeweils explizit auszurechnen.

Aufgabe 6.7 Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int \frac{2x}{x^2+5} \, dx$,

b) $\int \frac{1}{4+9x^2} \, dx$,

c) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$.

Tipp: a), b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration. Verwenden Sie bei c), dass nach der partiellen Integration auf der rechten Seite wieder das zu berechnende Integral (jedoch mit negativem Vorzeichen) steht.

Aufgabe 6.8 Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. Vergleichen sie dazu $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$ mit einem geeigneten Integral.

Aufgabe 6.9 Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx$

b) $\int\limits_0^{1} \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int\limits_0^{1} x^2 e^x dx$

M

7 Taylorentwicklung, Interpolation und numerische Integration

Die Ableitung einer Funktion ist verknüpft mit einer affinen Approximation der Funktion in der Umgebung des Punktes, an dem die Ableitung gebildet wird. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Approximation von Funktionen durch Polynome höherer Ordnung, die sogenannten Taylorpolynome. Basierend auf diesem Werkzeug können wir uns der Interpolation von Funktionen durch Polynome und der numerischen Approximation von Integralen zuwenden.

7.1 Taylorentwicklung

Erinnerung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion $:\Leftrightarrow$

$$f(y) = \underbrace{f(x) + f'(x)(y-x)}_{\substack{\text{affine Approximation von } f \\ \text{in der Nähe von } x}} + o(y-x).$$

Frage: Kann man f durch Polynome höheren Grades besser approximieren?

Dies geht für hinreichend glatte Funktionen (die genügend oft differenzierbar sind).

Satz 7.1 (Taylorentwicklung) *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei (n+1) mal differenzierbar mit stetiger (n+1)-ter Ableitung $f^{(n+1)}$, dann gilt für $x, y \in [a,b]$:*

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + R_{n+1}(y) \\ &\text{mit } R_{n+1}(y) = \frac{1}{n!}\int_x^y (y-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \quad \textit{(Restglied)} \end{aligned}$$

Man bezeichnet diese Darstellung von $f(y)$ als Taylorentwicklung um den Punkt x.

Bemerkungen 7.2 • *Es gilt folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(y)| &\leq \frac{1}{n!}\int_x^y \underbrace{|y-t|^n}_{\leq |y-x|^n} \underbrace{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}_{\leq \max_{s\in[a,b]}|f^{(n+1)}(s)|} dt \\
&\leq \frac{1}{n!}|y-x|^n \max_{s\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(s)\right| \left|\int_x^y dt\right| \\
&\leq \frac{|y-x|^{n+1}}{n!} \max_{s\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(s)\right|
\end{aligned}$$

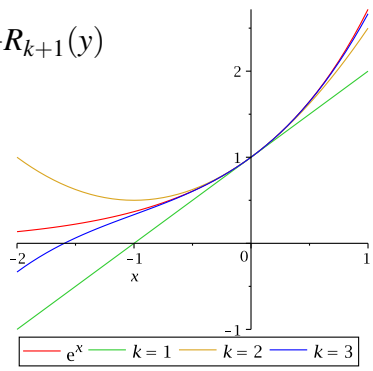
- $n = 1$: $f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R_2(y)$
  $\longrightarrow R_2(y) = o(y-x)$ *aus der Definition der Differenzierbarkeit.*

- $n \geq 1$: *Falls f hinreichend oft differenzierbar, dann ist f in der Nähe von x mit einem Polynom vom Grad n bis auf ein Restglied $R_{n+1}(y)$ approximierbar und es gilt $|R_{n+1}(y)| \leq C|y-x|^{n+1}$. Der Fehler wird also insbesondere nur klein, falls y nahe genug bei x liegt.*

- $p \in \mathscr{P}_k$: $p(y) = p(x) + p'(x)(y-x) + \ldots + \frac{p^{(k)}}{k!}(x)(y-x)^k + 0$
  (Das Restglied verschwindet, da $p^{(k+1)} \equiv 0$).

- $f = \exp$: *Wähle $x = 0$, dann ergibt sich*

$$\begin{aligned}
f(y) &= \exp(0) + \exp'(0)y + \frac{\exp''(0)}{2!}y^2 + \ldots + \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}y^k + R_{k+1}(y) \\
&= \underbrace{1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^k}{k!}}_{\text{Partialsumme der Exponentialreihe}} + R_{k+1}(y)
\end{aligned}$$



Beweis: [von Satz 7.1 durch vollständige Induktion über n]

$\boxed{n=0,1}$ $\quad f(y)-f(x) \overset{\text{Satz 6.13}}{=} \int\limits_x^y 1\, f'(t)\,dt$ (damit ist die Beh. für $n=0$ bewiesen)

$$\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \underbrace{\big[(t-y)f'(t)\big]_x^y}_{=0-f'(x)(x-y)} - \int\limits_x^y (t-y)f''(t)\,dt$$

$$= f'(x)(y-x) + \underbrace{\int\limits_x^y (y-t)f''(t)\,dt}_{R_2(y)} \quad (\Rightarrow \text{Beh. für } n=1)$$

$\boxed{n \rightsquigarrow n+1}$ $\quad$ z.z. $R_{n+1}(y) \overset{!}{=} \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x)(y-x)^{n+1} + R_{n+2}(y)$, hierzu:

$$R_{n+1}(y) = \frac{1}{n!}\int\limits_x^y \underbrace{(y-t)^n}_{f'}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g}\,dt$$

$$\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} -\frac{1}{n!}\left[\frac{(y-t)^{n+1}}{(n+1)}f^{(n+1)}(t)\right]_x^y + \frac{1}{n!}\int\limits_x^y \underbrace{\frac{(y-t)^{n+1}}{(n+1)}}_{f}\underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{g'}\,dt$$

$$= +\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)(y-x)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_x^y (y-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt}_{R_{n+2}(y)}.$$

□

Folgerung 7.3 *Es gilt* $R_{n+1}(y) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$ *für ein* ξ *zwischen* x *und* y.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $y > x$. Es gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 6.5:

$$R_{n+1}(y) \overset{\text{Satz 6.5}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_x^y (y-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1},$$

wobei $(y-t)^n$ eine nicht negative Gewichtsfunktion ist. Im Fall $x > y$ müssen wir zunächst das Vorzeichen $(-1)^n$ der Gewichtsfunktions aus dem Integral herausziehen, dann den Mittelwertsatz anwenden und anschließend das Vorzeichen wieder ins Integral hineinmultiplizieren.

□

Notation 7.4 *Wir schreiben für $R_{n+1}(y)$ auch $O(|y-x|^{n+1})$.*

allgemein: *Schreibe $f(s) = O(s^{n+1})$ wenn es positive Konstanten C und s_0 gibt, so dass $|f(s)| \leq C|s|^{n+1}$ für alle s mit $|s| \leq s_0$.*

Bemerkung 7.5

- *o, O sind universelle Symbole (auch Landau-Symbole). Sie stehen für eine* beliebige *Funktion, für die die entsprechende Abschätzung gilt, insbesondere bezeichnen sie auch innerhalb einer Rechnung keineswegs immer die gleiche Funktion.*
  Es gilt beispielsweise $O(s^n) - O(s^n) = O(s^n) \neq 0$.
- *Es gelten die Rechenregeln*
  - $s^n = O(s^n)$,
  - $O(s^n)O(s^m) = O(s^{n+m})$,
  - $O(s^n)/O(s^m) = O(s^{n-m})$,
  - $O(s^n) \pm O(s^m) = O(s^{\min\{n,m\}})$,
  - $KO(s^n) = O(s^n)$ *für Konstanten* $K \in \mathbb{R}$.
- *Unter Berücksichtigung dieser Regeln kann man mit o, O rechnen, z.B.*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{x} &= \frac{x + O(x^3)}{x} = 1 + O(x^2) \to 1 \text{ für } x \to 0, \\
\frac{\sin(x) - \exp(x) + 1}{x^2} &= \frac{x + O(x^3) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)) - 1}{x} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + O(x) \to -\frac{1}{2} \text{ für } x \to 0.
\end{aligned}$$

- *Das Verhalten einer Funktion wie $O(|y-x|^\alpha)$ mit $\alpha > 1$ impliziert das Verhalten wie $o(|y-x|)$.*
- *Falls g differenzierbar ist und $g(x-y) = O(|x-y|^{n+1})$,*
  dann gilt $g'(x-y) = O(|x-y|^n)$.
- *Die Abschätzung muss für alle* kleine *Werte von s gelten ($|s| \leq s_0$). In anderen Kontexten (z.B. wenn es um die Abschätzung der Laufzeit von Programmen geht), verwendet man die Notation $f(s) = O(s^{n+1})$ auch, falls die Abschätzung für* große *Werte von s (d.h. $|s| \geq s_0$) gilt.*

  Da normalerweise aus dem Kontext klar wird, ob große oder kleine Werte von s interessant sind, schreibt man dies in der Regel nicht dazu.

Die Rechenregeln gelten weiterhin, allerdings ist $O(s^n) \pm O(s^m) = O(s^{\max\{n,m\}})$.

Die Regel für die Ableitung und der Zusammenhang mit o gelten nicht.

Das Umgehen mit universellen Symbolen üben Sie in Aufgabe 7.6.
Aufgabe 7.8 enthält eine Anwendung der Taylorentwicklung in der Geodäsie.

Folgerung 7.6 *Es gelte für eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dass*

$$f(y) = a_0 + a_1(y-x) + a_2(y-x)^2 + \ldots + a_n(y-x)^n + O((y-x)^{n+1}),$$

dann folgt $a_0 = f(x), a_1 = f'(x), \ldots, a_k = \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}, \ldots, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$.

Beweis: Wähle $y = x$, dann folgt direkt $a_0 = f(x)$. Um a_1 zu bestimmen, leite die Gleichung einmal nach y ab

$$f'(y) = a_1 + 2a_2(y-x) + 3a_3(y-x)^2 + \ldots + na_n(y-x)^{n-1} + O((y-x)^n),$$

und setze wiederum $y = x$, woraus direkt $a_1 = f'(y)$ folgt. Erneutes Ableiten ergibt

$$f''(y) = 2a_2 + 6a_3(y-x) + 12a_4(y-x)^2 + \ldots + n\cdot(n-1)a_n(y-x)^{n-2} + O((y-x)^{n-1}),$$

d.h. mit $y = x$ erhält man $a_2 = \frac{f''(x)}{2!}$, usw.

□

Bemerkung 7.7 *Die Taylorentwicklung führt auf Partialsummen von Potenzreihen, falls die Funktion eine Potenzreihe ist (siehe auch Bemerkung 7.2 (v)).*

Beispiel 7.8 *Um die Taylorentwicklung von* $f(x) = \ln(x)$ *um den Punkt* 1 *zu berechnen, benötigen wir die Ableitungen von* f *an dieser Stelle:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x) & f(1) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -x^{-2} & f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(1) &= 2\\
f^{(4)}(x) &= -2\cdot 3x^{-4} & f^{(4)}(1) &= -2\cdot 3\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n} & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylorentwicklung

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + O\Big((x-1)^{n+1}\Big),$$

und man erhält z. B. den Näherungswert $\ln(1{,}1) \approx 0{,}095308$.

7.2 Differenzenquotienten

Betrachten wir die numerische Berechnung von Ableitungen. Hierbei ist der Ansatz der gleiche, wie bei der Definition von Ableitungen über Differenzenquotienten: Sei $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x); \qquad I = [a,b]$ eine differenzierbare Funktion, dann betrachte

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wir wissen bereits über den Fehler:

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{1}{|h|} \underbrace{\left| f(x+h) - \big(f(x) + f'(x)h\big) \right|}_{o(h)} = \left| \frac{o(h)}{h} \right| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Frage: Können wir eine genauere Aussage machen?

Ist f zweimal stetig differenzierbar (d.h. f', f'' existieren und f'' ist stetig), dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\overset{\text{Taylor-}}{\underset{\text{entwicklung}}{=}} \frac{1}{h}\left(f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 - f(x) \right) \\
&= f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!}h \quad \text{für ein } \xi \in I, \\
\Rightarrow \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &\leq \underbrace{\max_{\xi \in I} \left| \frac{f''(\xi)}{2} \right|}_{\leq C} h.
\end{aligned}$$

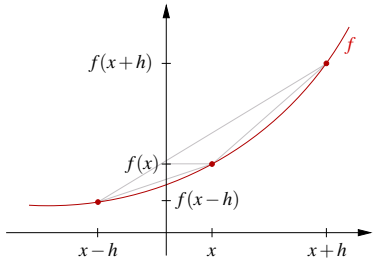
Wir sagen: Vorwärtsdifferenzenquotienten $\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$ sind eine 1. Ordnung Approximation der Ableitung, der Fehler verhält sich wie $O(h^1)$.

Ganz analog ist auch $\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$ (Rückwärtsdifferenzenquotient) (nur) eine 1. Ordnung Approximation.

Wie sehen bessere Approximationen aus?

Betrachten wir den zentralen Differenzenquotienten:

Wir führen eine Taylorentwicklung für $f(x+h)$ und $f(x-h)$ mit $\xi^-, \xi^+ \in I$ durch:



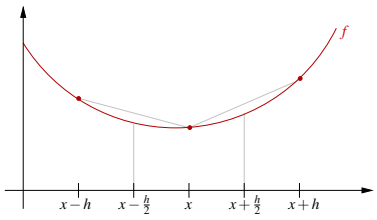
$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2h}\left(f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(\xi^+)}{3!}h^3\right.\\
&\quad \left.-\left(f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2-\frac{f'''(\xi^-)}{3!}h^3\right)\right)\\
&= 0+\frac{2f'(x)h}{2h}+0+\frac{1}{6}\left(f'''(\xi^+)+f'''(\xi^-)\right)\frac{h^3}{2h}\\
&= f'(x)+\frac{1}{12}\left(f'''(\xi^+)+f'''(\xi^-)\right)h^2\\
\Rightarrow \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| &\leq Ch^2.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten: Zentrale Differenzenquotienten sind für 3-mal stetig differenzierbare Funktionen eine 2. Ordnung (d. h. Fehler $O(h^2)$) Approximation der Ableitung.

In Übung 7.7 untersuchen Sie den Unterschied zwischen Approximationen erster und zweiter Ordnung. Einen weiteren Differenzenquotienten zur Approximation der ersten Ableitung betrachten Sie in Übung 7.5.

Zur Approximation zweiter Ableitungen:

Ansatz: Differenzenquotienten von Differenzenquotienten (jeweils zentral)



$$
\begin{aligned}
f''(x) &\approx \frac{f'(x+\frac{h}{2})-f'(x-\frac{h}{2})}{h}\\
&\approx \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}\\
&= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}
\end{aligned}
$$

Vermutung: Dies ist eine Approximation 2. Ordnung. Um dies zu zeigen, verwenden wir

wieder Taylorentwicklungen für $f(x+h)$ und $f(x-h)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}\left(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right)\\
\overset{\xi^+,\xi^-\in I}{=}\ &\frac{1}{h^2}\Bigg(f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi^+)}{24}h^4-2f(x)\\
&+f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f'''(x)}{6}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi^-)}{24}h^4\Bigg)\\
&=0+0+f''(x)+0+\frac{h^2}{24}\left(f^{(4)}(\xi^+)+f^{(4)}(\xi^-)\right),
\end{aligned}$$

Damit folgt für Funktionen f die vier mal stetig differenzierbar sind, dass

$$\left|f''(x)-\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\right|\leq Ch^2.$$

□

Statt mit der Darstellung des Restgliedes über die Ableitung kann man hierbei auch einfach mit der Form $O(h^p)$ rechnen, wenn man sich nur für die Ordnung des Fehlers interessiert. Bei genauerer Betrachtung des Restgliedes (wie hier) kann man jedoch auch eine Aussage über die Größe der Konstanten machen.

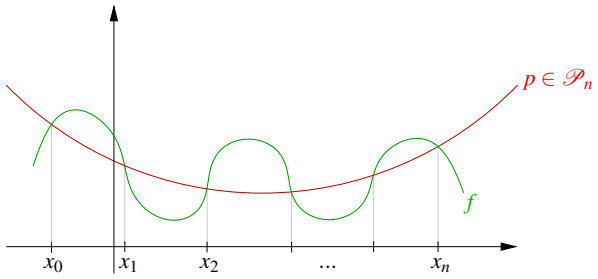
7.3 Interpolation von Funktionen

Betrachten wir nun die Aufgabe, beliebige Funktionen (schwierig auszuwertende) durch einfache Funktionen darzustellen (z.B. durch Polynome):

(P) Zu einer Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist ein Polynom $p\in\mathscr{P}_n$ (Polynome vom Grad $\leq n$) gesucht, so dass an $(n+1)$ paarweise verschiedenen, vorgegebenen Punkten (auch Knoten genannt) $x_0,x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$ gilt

$$f(x_i)=p(x_i)\quad\text{für } i=0,\ldots,n.$$

(Interpolationsaufgabe)



Satz 7.9 *Das Interpolationsproblem* **(P)** *ist eindeutig lösbar.*

Beweis: Wähle eine Basis des Polynomvektorraums $\mathscr{P}_n$: $\{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, ..., x \mapsto x^n\}$, $\dim \mathscr{P}_n = n+1$. Gesucht ist $p(x) = a_0 1 + a_1 x + ... + a_n x^n$ (Linearkombination der Monome) mit

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 1 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n \\ f(x_1) &= a_0 1 + a_1 x_1 + ... + a_n x_1^n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f(x_n) &= a_0 1 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem von $(n+1)$ Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten $a_0, ..., a_n$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Koeffizientenvektor} \\ \text{zur Monom-Basis}}} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Zu zeigen: A ist invertierbar.

Aus der linearen Algebra wissen wir: Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V nach V (dargestellt durch eine quadratische Matrix) ist dann invertierbar, wenn $\mathrm{Ker} = \{0\}$. Dies folgt aus $\dim V = \dim \mathrm{Ker} + \dim \mathrm{Bild}$.

D.h. wir überprüfen, ob der Kern der zu A gehörigen linearen Abbildung l trivial ist:
Die lineare Abbildung ist gegeben durch:

$$l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}; \qquad l \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Also gilt

$$\mathrm{Ker}\,(l) = \{0\} \Leftrightarrow p(x_0) = p(x_1) = ... = p(x_n) = 0.$$

D.h. $p \in \mathrm{Ker}\,(l)$ ist ein Polynom n-ten Grades mit $(n+1)$ Nullstellen. Aber Polynome n-ten Grades haben höchstens n Nullstellen, es sei denn, sie sind identisch 0. Im Kern liegt also nur das triviale Polynom $p(x) \equiv 0$. Also ist A invertierbar.

□

Bemerkung 7.10 *In der praktischen numerischen Umsetzung beobachtet man beim Lösen des Gleichungssystems für größere n immer stärker den Effekt von Rundungsfehlern.*

Betrachten wir deshalb eine geschickt gewählte Basis, die sogenannten Lagrange-Polynome

Definition 7.11 (Lagrange-Polynome) *Zu $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ (paarweise verschieden) sind die* Lagrange-Polynome *gegeben als die Polynome $L_i \in \mathscr{P}_n$ mit*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lagrange-Polynome sind eindeutig bestimmt, da für festes i die Vorgabe der Funktionswerte $\delta_{ij} (j = 0, \dots, n)$ an den Stellen x_j eine Interpolationsaufgabe vom Typ **(P)** ist.

Notation 7.12 (Produktsymbol)

$$\prod_{i=1}^{n} \beta_i = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n$$

Lemma 7.13 *Die Lagrange-Polynome lassen sich schreiben als*

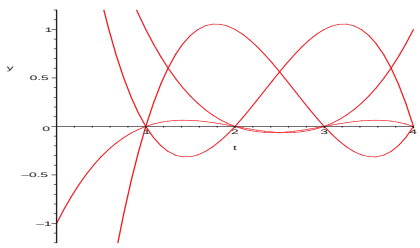
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

und $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ *löst das Interpolationsproblem* **(P)** *zur Funktion* f.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad L_i(x_k) &= \begin{cases} 0 & ; i \neq k \quad \text{(ein Faktor 0)} \\ 1 & ; i = k \quad \text{(alle Faktoren 1)} \end{cases}, \\ \text{und damit} \quad p(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_k)}_{\delta_{ik}} = f(x_k). \end{aligned}$$

□



Beispiel:

Kubische Lagrange-Polynome mit $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$, d.h.

$L_0(x) = \frac{(x-2)}{1-2} \frac{(x-3)}{1-3} \frac{(x-4)}{1-4}$,

$L_1(x) = \frac{(x-1)}{2-1} \frac{(x-3)}{2-3} \frac{(x-4)}{2-4}$,

$L_2(x) = \frac{(x-1)}{3-1} \frac{(x-2)}{3-2} \frac{(x-4)}{3-4}$,

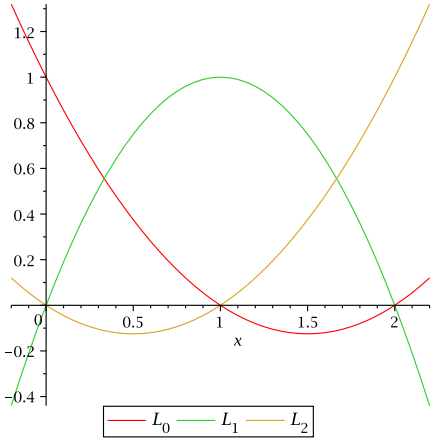
$L_3(x) = \frac{(x-1)}{4-1} \frac{(x-2)}{4-2} \frac{(x-3)}{4-3}$.

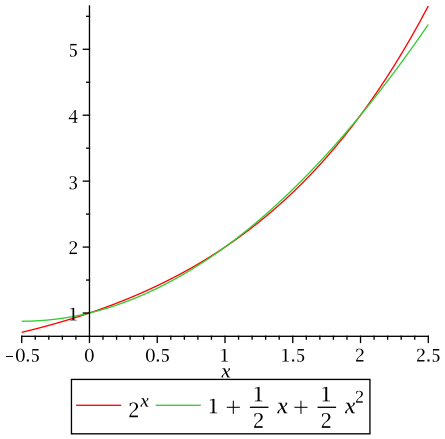
Um die Funktion $f(x) = 2^x$ an den Knoten $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ durch ein quadratisches Polynom zu interpolieren, berechnen wir die zughörige Lagrange-Basis:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x-1}{0-1}\frac{x-2}{0-2} = \frac{1}{2}(x^2-3x+2) \\ L_1(x) &= \frac{x-0}{1-0}\frac{x-2}{1-2} = -(x^2-2x) \\ L_2(x) &= \frac{x-0}{2-0}\frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{2}(x^2-x) \end{aligned}$$

Als Interpolationspolynom erhält man

$$p(x) = L_0(x) + 2L_1(x) + 4L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$





Weitere Beispiele finden Sie in Übung 7.10 und 7.11.

Wie groß ist nun der Fehler, den man bei der Interpolation von f durch p macht?

Satz 7.14 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal stetig differenzierbare Funktion und $p \in \mathscr{P}_n$ die Lösung der Interpolationsaufgabe* **(P)** *zu den Knoten $x_0, x_1, \ldots x_n \in [a,b]$.*
Dann gibt es zu jedem $x \in [a,b]$ ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &\le \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}, \\ f(x) - p(x) &= O((b-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

Beweis: Zunächst definiert man

$$g(x) = f(x) - p(x) - \alpha \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

für eine beliebige Konstante α.

Falls $x = x_i$ für irgendeinen der Knoten x_i, so ist (wegen der Interpolationsbedingungen) $f(x) = p(x)$ und daher nichts zu zeigen. Andernfalls ist $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \neq 0$, also kann man (für festes x) α so wählen, dass $g(x) = 0$.

Nun hat g also auf $[a,b]$ die $n+2$ (paarweise verschiedenen) Nullstellen $x_0, x_1, \ldots x_n$ und x. Zwischen je zwei dieser Nullstellen liegt nach dem Satz von Rolle 2.34 ein Punkt, an dem die Ableitung g' Null wird. Also hat g' im Intervall $[a,b]$ mindestens $n+1$ Nullstellen. Analog hat g'' mindestens n Nullstellen, und so weiter. Schließlich muss $g^{(n+1)}$ noch mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$ haben, diese bezeichnen wir mit ξ.

Nun ist

$$\underbrace{g^{(n+1)}(\xi)}_{=0} = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p^{(n+1)}(\xi)}_{=0,\text{ da } p \in \mathscr{P}_n} - \alpha \underbrace{\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)|_{x=\xi}}_{=(n+1)!},$$

also muss $\alpha = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ sein. Dabei war α so gewählt, dass

$$g(x) = f(x) - p(x) - \alpha \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = 0.$$

Also gilt

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

□

Bemerkung 7.15

- *Dies bedeutet insbesondere, dass der Fehler dann klein wird, wenn die Intervallbreite $b - a$ klein ist.*
- *Falls x weit von den Knoten entfernt liegt – oder gar außerhalb des Intervalls $[a,b]$ – wird der Fehler sehr schnell groß.*
- *Die Interpolation durch Polynome hohen Grades ist nur dann sinnvoll, wenn die Funktion f entsprechend oft differenzierbar ist.*

- *Der Fehler* $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ *entspräche dem Restglied der Taylorentwicklung aus Folgerung 7.3, wenn alle Knoten* x_i *gleich wären, und man an dieser Stelle außer dem Funktionswert auch entsprechend viele Ableitungen vorgäbe.*

  Diesen Fall haben wir bei der Lagrange-Interpolation ausgeschlossen, in der Tat gibt es aber die Möglichkeit, bei der Interpolation außer Funktionswerten auch Ableitungen vorzugeben (siehe Kapitel 7.4).

Die Interpolation von *Kurven*, also Abbildungen von einem Intervall in den $\mathbb{R}^d$, kann man direkt auf die Interpolation eindimensionaler Funktionen zurückführen. Wie das funktioniert, zeigen die Übungen 7.13 und 7.14.

Wie erreicht man nun, dass die Intervallbreite klein wird, und damit auch der Interpolationsfehler?

Man zerlegt das Intervall $[a,b]$ in N Teilintervalle $[t_i,t_{i+1}]$ mit $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=b$, z.B. in gleich große Teilintervalle mittels

$$t_i = a+ih \text{ für } i=0,1,\ldots N \text{ mit } h=\frac{b-a}{N}.$$

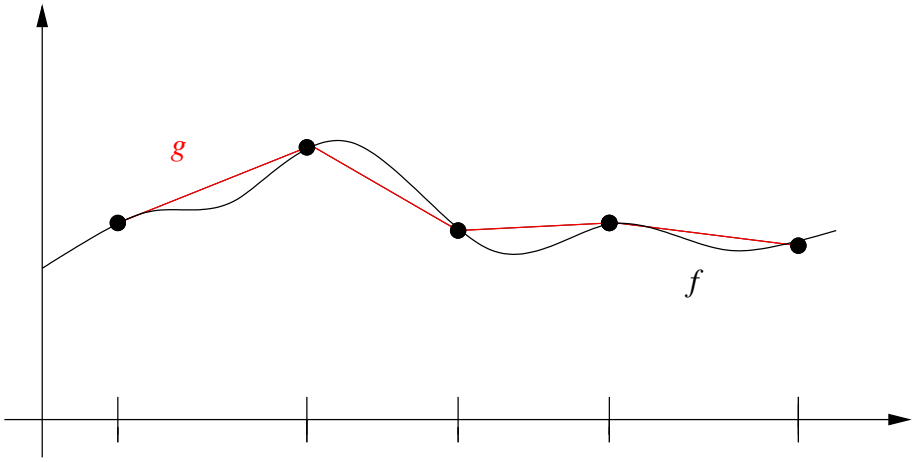
Nun interpoliert man f auf jedem Teilintervall $[t_i,t_{i+1}]$ separat durch ein Polynom $p_i \in \mathscr{P}_n$. Dann ist der Interpolationsfehler (auf jedem Teilintervall, und da der maximale Fehler auf irgendeinem Teilintervall realisiert wird auch der Fehler auf ganz $[a,b]$) von der Ordnung $O(h^{n+1})$. Wenn man die Unterteilung immer mehr verfeinert, kann man nun $h\to 0$ erreichen, und damit konvergiert die Interpolierende gegen die Ursprungsfunktion auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ mit der Ordnung $O(h^{n+1})$.

Die Gesamt-Interpolierende ist dann definiert als $g(x)=p_i(x)$ falls $x\in[t_i,t_{i+1})$, ist also nur auf den einzelnen Intervallen ein Polynom. Auf $[a,b]$ ist g zunächst noch nicht einmal stetig.

Stetigkeit kann man erzwingen, indem man auf jedem Teilintervall $[t_i,t_{i+1}]$ sowohl t_i also auch t_{i+1}, d.h. linke und rechte Intervallgrenze, als Interpolationsknoten wählt. Dann ist $p_{i-1}(t_i)=f(t_i)=p_i(t_i)$, also hat die zusammengesetzte Funktion g an den Intervallgrenzen keinen Sprung.

Beispiel 7.16 (Stetige, stückweise affine Interpolation)

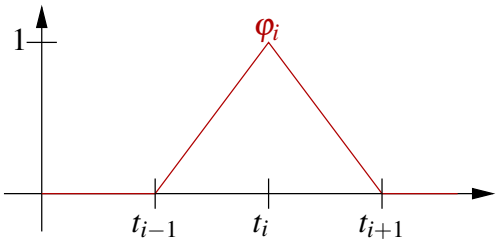
Wählt man auf allen Teilintervallen $[t_i,t_{i+1}]$ *genau zwei Interpolationsknoten, nämlich* t_i *und* t_{i+1}*, so liegt die Interpolierende auf jedem Teilintervall in* $\mathscr{P}_1$*, d.h. sie ist dort eine affine Funktion. Insgesamt erhält man eine auf ganz* $[a,b]$ *stetige, auf jedem Teilintervall* $[t_i,t_{i+1}]$ *affine Interpolation (d.h. einen Polygonzug), der an den Knoten* t_i *mit* f *übereinstimmt.*



An den Interpolationsknoten auf den Teilintervallgrenzen t_i gibt es stets zwei Basisfunktionen, die dort den Wert 1 annehmen, eine auf dem linken Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ - die im Punkt t_{i-1} Null ist - und eine auf dem rechten Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ - die im Punkt t_{i+1} Null ist. Da jede Funktion nur auf ihrem Intervall betrachtet wird, kann man die beiden Funktionen zu einer stückweise affinen Basisfunktion zusammensetzen:

Beispiel 7.17 (Hütchenbasis)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & x \in [t_{i-1}, t_i], \\ \frac{x-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}}, & x \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

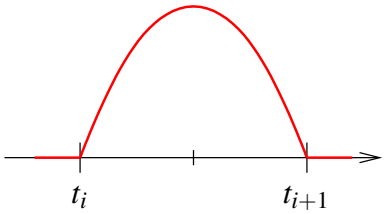


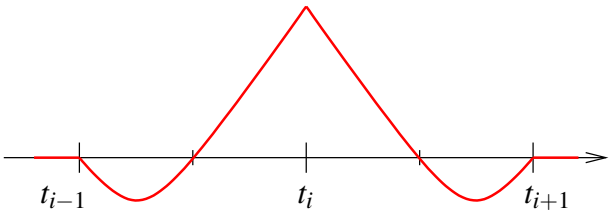
Dann gilt $\varphi(t_j) = \delta_{ij}$, also lässt sich die stückweise affine Interpolation

$$g(x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i)\varphi_i(x)$$

wie bei der gewöhnlichen Lagrange-Interpolation direkt als Linearkombination der Basisfunktionen schreiben.

Ein Beispiel für dieses Vorgehen finden Sie in Übung 7.2.
Analog kann man auch Basisfunktionen höheren Grades verwenden. Wenn man stückweise mit quadratischen Basisfunktionen interpoliert (siehe oben), so gibt es zwei Typen von zusammengesetzten Basisfunktionen:

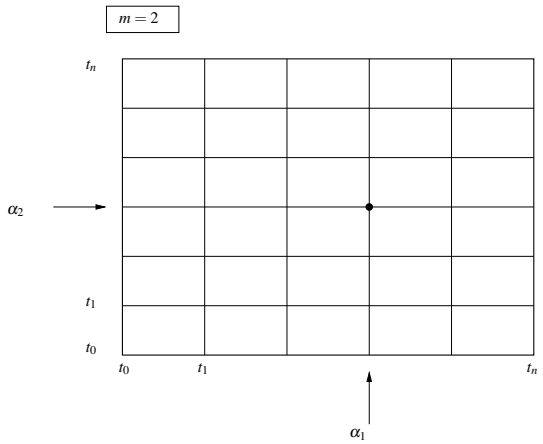




Wie interpoliert man Funktionen, die auf dem $\mathbb{R}^2$ (oder Teilmengen des $\mathbb{R}^2$) definiert sind?
Im einfachsten Fall betrachtet man Funktionen $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$. Dann kann man die Interpolation direkt auf den eindimensionalen Fall zurückführen.
Wir interpolieren eine solche Funktion durch ein Polynom n-ten Grades in zwei Variablen von der Form

$$p(x,y) = \sum_{p,q=0}^{n} a_{p,q} x^p y^q.$$

Die Lagrangeknoten erhält man nun, indem man Knoten $t_i \in [a,b]$ wählt und dann alle Kombinationen $(t_i,t_j) \in [a,b]^2$ betrachtet. Es ergibt sich ein kartesisches Gitter von Interpolationsknoten:

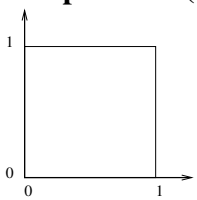


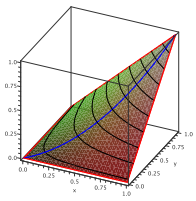
Nun seien L_i die eindimensionalen Lagrange-Basisfunktionen bzgl. der Knoten $t_i \in [a,b]$. Die zweidimensionalen Lagrangebasis-Funktionen ergeben sich dann als Produkt zweier eindimensionaler Basisfunktionen:

$$L_{i,j}(x,y) = L_i(x)L_j(y)$$

Dann hat $L_{i,j}$ am Knoten (t_i,t_j) den Wert Eins, an allen anderen Knoten (t_k,t_l) den Wert Null.

Beispiel 7.18 (Bilineare Interpolation)





Es sei $t_0 = 0, t_1 = 1, [a,b] = [0,1]$, d.h. wir betrachten die bilineare Interpolation auf dem Einheitsquadrat.

Dann ergeben sich folgende Basis-Polynome:

$$\begin{aligned}
L_{(0,0)}(x_1,x_2) &= (1-x_1)(1-x_2),\\
L_{(1,0)}(x_1,x_2) &= x_1(1-x_2),\\
L_{(0,1)}(x_1,x_2) &= (1-x_1)x_2,\\
L_{(1,1)}(x_1,x_2) &= x_1x_2.
\end{aligned}$$

Beispiel 7.19 (Biquadratische Interpolation)
Um die Funktion $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)$ *auf* $[0;2]^2$ *durch biquadratische Polynome mit den Knoten* $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ *zu interpolieren, stellt man zunächst*

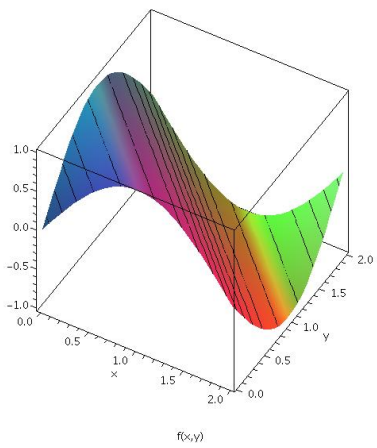
$$\begin{aligned} &f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = f(2,2) = f(1,1) = 0, \\ &f(1,0) = f(0,1) = 1, \quad f(1,2) = f(2,1) = -1 \end{aligned}$$

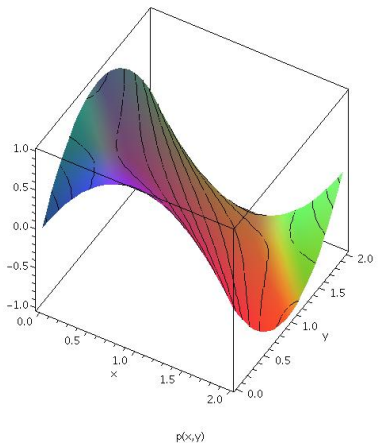
fest, man benötigt also nur die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} L_{(1,0)}(x,y) &= -\frac{1}{2}x(x-2)(y-1)(y-2) & L_{(0,1)}(x,y) &= -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)y(y-2) \\ L_{(1,2)}(x,y) &= -\frac{1}{2}x(x-2)y(y-1) & L_{(2,1)}(x,y) &= -\frac{1}{2}x(x-1)y(y-2). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich das Interpolationspolynom

$$p(x,y) = L_{(1,0)}(x,y) + L_{(0,1)}(x,y) - L_{(1,2)}(x,y) - L_{(2,1)}(x,y).$$





Analog zu 1D kann man das Interpolationsgebiet auch hier in Teilquadrate unterteilen, auf diesen interpolieren und dann eine Interpolierende zusammensetzen, die nur stückweise ein Polynom ist.

Man kann sich auch hier überlegen, das die zusammengesetzte Interpolation stetig ist, wenn das Interpolationsgitter bis zu den Rändern des Quadrates $[a,b]^2$ reicht.

Weitere Details sowie die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen finden Sie im Kapitel 7.4.

Wie interpoliert man Funktionen auf komplizierteren Teilmengen des $\mathbb{R}^2$?

Komplizierte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kann man zur Interpolation nur schlecht in Quadrate oder Rechtecke zerlegen. Ein Ausweg ist hier die Zerlegung in Dreiecke.

Definition 7.20 *Die Menge*

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, \lambda_i \geq 0\,,\, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \right\},$$

d.h. die Menge aller Konvexkombinationen von drei Punkten in der Ebene ist das Dreieck mit den Eckpunkten a_0, a_1, a_2.
$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ heißen baryzentrischen Koordinaten.

Beispiele 7.21

$\lambda = e_i (\in \mathbb{R}^3)$ *(i-te Komponente 1, sonst 0)* $\rightsquigarrow x = a_i$,

$\lambda = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightsquigarrow x = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}$ *(Schwerpunkt),*

$\lambda_i = 0 \quad \rightsquigarrow$ *x liegt auf der Seite gegenüber von a_i*

Lemma 7.22 (Berechnung baryzentrischer Koordinaten)
(λ_1, λ_2) *löst das Gleichungssystem*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ (a_1 - a_0) & (a_2 - a_0) \\ | & | \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{2,2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = (x - a_0)$$

und es gilt $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

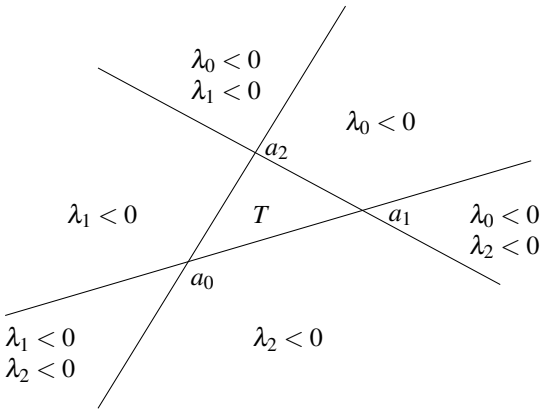
Beweis:

$$\begin{aligned} x &= a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \\ &= a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_0 \underbrace{(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}_{=\lambda_0} - a_0\lambda_0 \\ &= 0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + (a_2 - a_0)\lambda_2 + a_0 \\ \Rightarrow & \quad \text{Behauptung} \end{aligned}$$

□

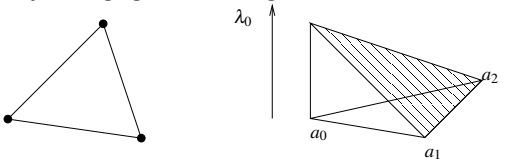
Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, falls es vollen Rang hat, die Spaltenvektoren also linear unabhängig sind. Wenn die Spaltenvektoren linear abhängig sind, liegen diese beiden Seiten des Dreiecks (und damit auch die dritte) auf einer Geraden, es ist also kein „echtes“ Dreieck.

Bemerkung 7.23 *Teste, ob* $x \in T \quad \Leftrightarrow \quad$ *Teste, ob* $\lambda_i(x) \geq 0$ *für alle* $i = 0, \ldots, m$.



In Übung 7.16 betrachten Sie solche Berechnungen.
Die Lagrange-Basisfunktionen auf Dreiecken kann man nun sehr einfach mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten angeben:

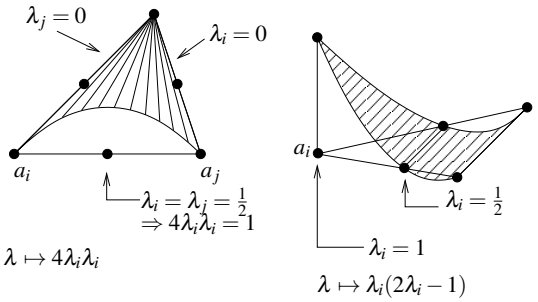
Beispiel 7.24
Lineare Basisfunktionen: *Die Lagrange-Knoten seien die Eckpunkte des Dreiecks. Die baryzentrische Koordinate* λ_i *hat nun genau die Eigenschaft, im Eckpunkt* a_i *Eins zu sein, auf der gegenüberliegenden Kante (die die beiden anderen Knoten enthält) Null.*



$$L_{(1,0,0)} = \lambda_0, L_{(0,1,0)} = \lambda_1, L_{(0,0,1)} = \lambda_2$$

Quadratische Basisfunktionen: *Knoten sind hier die Ecken und die Seitenmitten des Dreiecks. Es ergeben sich entsprechend zwei Typen von Basisfunktionen:*

$$\lambda \mapsto 4\lambda_i\lambda_j \text{ mit } i \neq j \qquad \text{und} \lambda \mapsto \lambda_i(2\lambda_i - 1)$$



Wenn man das Interpolationsgebiet in Dreiecke zerlegt, erhält man in beiden Fällen eine auf dem ganzen Gebiet stetige zusammengesetzte Interpolierende.

7.4 Exkurs: Interpolation von Ableitungen und mehrdimensionale Interpolation

Hermite-Interpolation: Wie interpoliert man neben Funktionswerten auch Ableitungen an Knoten?

Notation 7.25 $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq b$

Wir interpretieren k gleiche Knoten hintereinander so, dass $f(x_i), f'(x_i), \ldots, f^{(k-1)}(x_i)$ *interpoliert werden sollen* $\left(p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), j = 0, \ldots k-1\right)$. *Definiere hierzu*

$d_i := \max\left\{j \mid x_i = x_{i-j}\right\} \qquad (0 \leq d_i \leq k-1)$

Für $f \in \mathscr{C}^{d_i}$ *sei* $\mu_i(f) := f^{(d_i)}(x_i)$

(P) (Hermite-Interpolationsaufgabe)

Gesucht ist $p \in \mathscr{P}_n$, so dass $\mu_i(p) = \mu_i(f)$ für $i = 0, \ldots, n$. p heißt *Hermite-Interpolation*.

Bemerkung 7.26 Lagrange-Interpolation*:* $\mu_i(p) = f(x_i)$. *D.h.* $d_i = 0$ *für alle* $i = 0, \ldots, n$.

Satz 7.27 *Sei* $f \in \mathscr{C}^d([a,b])$, *wobei* $d = \max_{i=0,\ldots,n} d_i$, *dann existiert genau eine Hermite-Interpolation zu* f.

Beweis: $\mu : \mathscr{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \mapsto \begin{pmatrix} \mu_0(p) \\ \ldots \\ \mu_n(p) \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung, wobei $\dim \mathscr{P}_n = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. Es gilt $\operatorname{Ker}(\mu) = \{0\}$, denn $\mu(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p$ hat (einschließlich mehrfacher Nullstellen) $(n+1)$ Nullstellen:
Wenn an der Stelle x_i der Funktionswert und alle Ableitungen bis zum Grad d_i Null sind, so liegt dort eine $d_i + 1$-fache Nullstelle vor,

$$p(x) = (x - x_i)^{d_i+1} q(x) \quad \text{mit Polynom } q \in \mathscr{P}_{n-d_i}$$

Dies gilt für alle Knoten x_i und für die dazu gehörigen maximalen Grade d_i. Nun betrachten wir nacheinander alle unterschiedlichen Knoten und erhalten schrittweise schliesslich eine Zerlegung von p in Linearfaktoren. Damit folgt dann

$$p(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Damit hat p aber (einschließlich mehrfacher Nullstellen) $n+1$ Nullstellen. Somit muss gelten $p \equiv 0$ ✓

Weiterhin gilt $\dim \operatorname{Bild}(\mu) + \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(\mu)}_{=0} = \dim \mathscr{P}_n = n+1$,

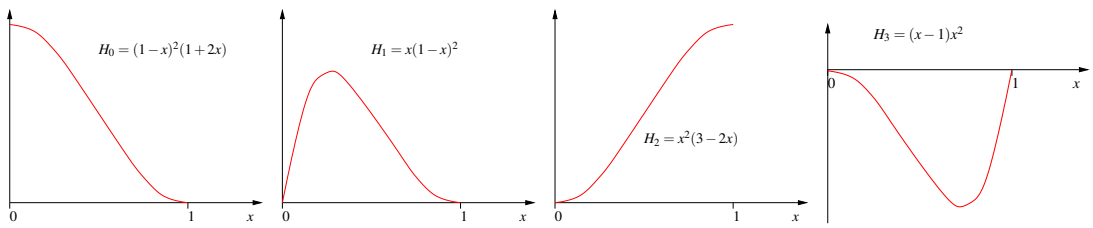
$\Rightarrow \dim \operatorname{Bild}(\mu) = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \mu$ invertierbar.

D.h. aber zu jeder Vorgabe von Werten und Abbildungen geschrieben in einem Vektor des $\mathbb{R}^{n+1}$ gibt es ein p, so dass $\mu(p)$ gleich dieser Vorgabe ist.

□

Definition 7.28 *Eine Basis $\{H_j\}_{j=0,\dots,n}$ des $\mathscr{P}_n$ mit $\mu_i(H_j) = \delta_{ij}$ nennen wir* Hermitebasis.

Beispiel 7.29 $(x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1)$
d.h. wir interpolieren Funktionswerte und 1. Ableitung jeweils in 0 und 1:



Um damit zum Beispiel die Funktion

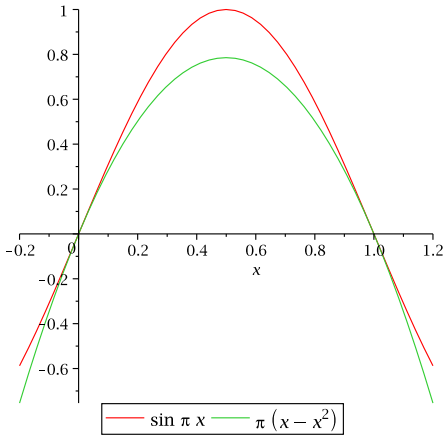
$$f(x) = \sin(\pi x)$$

zu interpolieren, berechnet man

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \pi, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = -\pi;$$

also ergibt sich für die Interpolierende

$$\begin{aligned}(\mathscr{I}_h f)(x) &= \pi H_1(x) - \pi H_3(x) \\ &= \pi(x^3 - 2x^2 + x - (x^3 - x^2)) \\ &= \pi(x - x^2).\end{aligned}$$



Eine spezielle Hermite-Interpolationsaufgabe finden Sie in Übung 7.1, ein weiteres Beispiel in Übung 7.12.

Tensorprodukt-Interpolation

$$\text{Betrachte} \quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m.$$

Tensorproduktansatz

Sei ohne Beschränkung $a_k = a, b_k = b$. Auf $[a,b]$ sei die Knotenmenge $\{t_i\}_{i=0,\dots,n}$ gegeben.

<u>Ziel:</u> $f(t_{i_1},\dots,t_{i_m})$ zu interpolieren für $i_j \in \{0,\dots,n\}$ und $j = 0,\dots,m$.
(Lagrange-Interpolation)

Definition 7.30 (Polynomraum auf dem $\mathbb{R}^m$)

$$\mathscr{P}_n^m = \left\{ p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; p(x) = \sum_{\alpha_i \le n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

(α nennt man Multiindex*)*

$$\begin{aligned} dim\ \mathscr{P}_n^m &= (n+1)^m \\ n &= \textit{Grad des Polynoms} \\ m &= \textit{Dimension des Urbildraums des Polynoms} \end{aligned}$$

Beispiel 7.31

$\boxed{m = 2, n = 1}$ *(bilineare Polynome)*

$$p(x_1,x_2) = \underbrace{a_{(0,0)} + a_{(1,0)}x_1 + a_{(0,1)}x_2}_{\textit{affine Funktion}} + a_{(1,1)}x_1x_2$$

Bilineare Polynome (eigentlich müssten sie bi-affin heißen) sind affin bezüglich einer Variablen, wenn man die andere als konstant auffasst:

$$\begin{aligned} p_1(x_1) := p(x_1,c) &= \underbrace{a_{(0,0)} + a_{(0,1)}c}_{=:b} + \underbrace{(a_{(1,0)} + a_{(1,1)}c)}_{=:m} x_1 \\ &= mx_1 + b \end{aligned}$$

Wie man jedoch oben sieht, sind sie keine *affinen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, da sie den zusätzlichen Term $a_{(1,1)}x_1x_2$ enthalten.*

$\boxed{m = 3, n = 1}$ *(trilineare Polynome)*

Man erhält eine Basis durch Multiplikation aller Kombinationen der 1D-Basispolynome bezüglich aller Komponenten x_i. Hier erhält man:

$$\{x \mapsto 1, x \mapsto x_1, x \mapsto x_2, x \mapsto x_3, x \mapsto x_1x_2, x \mapsto x_1x_3, x \mapsto x_2x_3, x \mapsto x_1x_2x_3\}$$

$\boxed{m = 2, n = 2}$ *(biquadratische Polynome)*

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &= a_{(0,0)} + a_{(1,0)}x_1 + a_{(0,1)}x_2 + a_{(1,1)}x_1x_2 + a_{(2,0)}x_1^2 + \\ &\quad a_{(0,2)}x_2^2 + a_{(2,1)}x_1^2x_2 + a_{(1,2)}x_1x_2^2 + a_{(2,2)}x_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

Wir schreiben auch: $\mathscr{P}_n^m = \underbrace{\mathscr{P}_n \otimes \mathscr{P}_n \otimes \ldots \otimes \mathscr{P}_n}_{m \text{ Faktoren}}$ (Tensorprodukt)

Eine alternative Interpretation ist die folgende:

$$p = \sum_{j=0}^{n} a_j(x_2, \ldots, x_n) x_1^j \qquad \text{mit } a_j \text{ Tensorproduktpolynom in } x_2, \ldots, x_n.$$

Definition 7.32 (Lagrange-Basis) *Seien α, β Multiindizes mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $t^\beta = (t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \ldots, t_{\beta_m})$ ein beliebiger Knoten, an dem f zu interpolieren ist. Die Lagrange-Basis $\{L_\alpha\}_{\alpha_i \le n}$ besteht aus aus $(n+1)^m$ Polynomen aus $\mathscr{P}_n^m$, die durch*

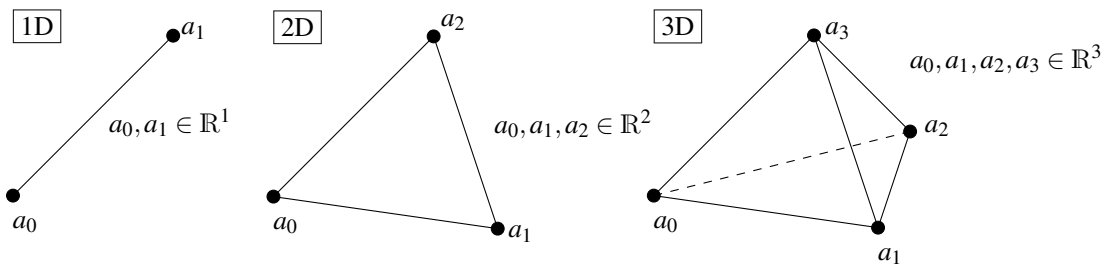
$$L_\alpha(t^\beta) = \delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_i = \beta_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, m, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert sind. Man kann die Lagrange-Polynome als Produkte aus 1D-Lagrange-Polynomen berechnen:

$$L_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{\substack{j \neq \alpha_i \\ j=0}}^{j=n} \frac{x_i - t_j}{t_{\alpha_i} - t_j} \qquad \in \mathscr{P}_n^m$$

In 2D erhält man für Polynomgrad 1 und 2 die Basisfunktionen aus Beispiel 7.18 und 7.19.

Simpliziale Interpolation



Auch wenn wir zunächst Simplizes mit $m+1$ Eckpunkten im $\mathbb{R}^m$ definieren, so läßt sich diese Definition direkt auf Simplizes im $\mathbb{R}^n$ mit $n > m$ übertragen, d.h. wir betrachten auch 1-Simplizes (Streckenstücke) im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ und 2-Simplizes (Dreiecke) im $\mathbb{R}^3$:

Definition 7.33 *Sei $m \leq n$. Die Menge*

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m \,,\, \lambda_i \geq 0 \,,\, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\},$$

d.h. die Menge aller Konvexkombinationen von $(m+1)$ Punkten im $\mathbb{R}^n$, heißt m-Simplex mit den Eckpunkten $a_0, \ldots a_m \in \mathbb{R}^n$.
$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ heißen baryzentrischen Koordinaten.

Im Umgang mit Simplizes sind die folgenden Kenngrößen oft sehr hilfreich:

Definition 7.34 $h(T) = \max_{i,j} ||a_i - a_j||$ *(Durchmesser),*

$\rho(T) = 2 \sup\{r \geq 0 \,|\, \text{es gibt } x \in T \,,\, B_r(x) \subset T\}$ *(Inkugeldurchmesser).*

Hierbei ist $h(T)$ die typische Größe für Fehlerabschätzungen und $\rho(T)$ beschreibt die Regularität, oder den Degeneriertheitsgrad eines Simplex. Insbesondere ist $\frac{h(T)}{\rho(T)}$ ein Maß für die Degeneriertheit unabhängig von der Größe des Simplex.

Lemma 7.35 (Berechnung baryzentrischer Koordinaten) *Für $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}, x \mapsto \lambda(x)$ gilt:*

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ löst das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ (a_1 - a_0) & \ldots & (a_m - a_0) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{m,m}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = (x - a_0)$$

und es gilt $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$.

Beweis: Wie in Lemma 7.22 für Dreiecke.

□

Bemerkung 7.36 *Der Rand eines Simplex im $\mathbb{R}^m$ besteht wieder aus Simplizes der Dimension (m-1).*

Definition 7.37 (Simplizialer Polynomraum)

$$\tilde{\mathscr{P}}_n^m = \left\{ p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, p(x) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} \right\}$$

Man kann diese Polynome auch in baryzentrischen Koordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} p(x) &= q(\lambda(x)) \quad \text{mit } q : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{Polynom,} \\ q(\lambda) &= \sum_{\beta_0+\ldots+\beta_m \leq n} b_\beta \lambda_0^{\beta_1} \lambda_2^{\beta_2} \ldots \lambda_m^{\beta_m}. \end{aligned}$$

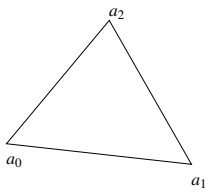
Der Polynomgrad bleibt dabei gleich.
(ohne Beweis)

Beispiel 7.38

$\boxed{m = 1}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{P}}_1^1 &= \{p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, p(x) = c_0 + c_1 x\} \\ &= \{q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, q(\lambda_0, \underbrace{\lambda_1}_{=(1-\lambda_0)}) = (c_0 + c_1 a_0)\lambda_0 + (c_0 + c_1 a_1)\lambda_1\} \end{aligned}$$

$\boxed{m = 2}$



$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{P}}_1^2 &= \textit{affine Funktionen auf } \mathbb{R}^2 (\textit{ damit auch auf } T) \\ &= \left\{p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, p(x) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2\right\} \\ &\neq \mathscr{P}_1^2 \\ q(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) &= p(a_0)\lambda_0 + p(a_1)\lambda_1 + p(a_2)\lambda_2 \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Analog für } m = 3}$

$$\tilde{\mathscr{P}}_1^3 = \left\{p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, p(x) = q(\lambda_0(x), \ldots, \lambda_3(x)) = p(a_0)\lambda_0 + \ldots + p(a_3)\lambda_3\right\}$$

Die obigen Rechnungen funktionieren in dieser Art natürlich nur für $n = 1$.

Notation 7.39 (Lagrange-Knotenmenge)

$$\mathscr{N}_n(T) = \left\{ x = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_j \,\middle|\, \lambda_j \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1 \right\}$$

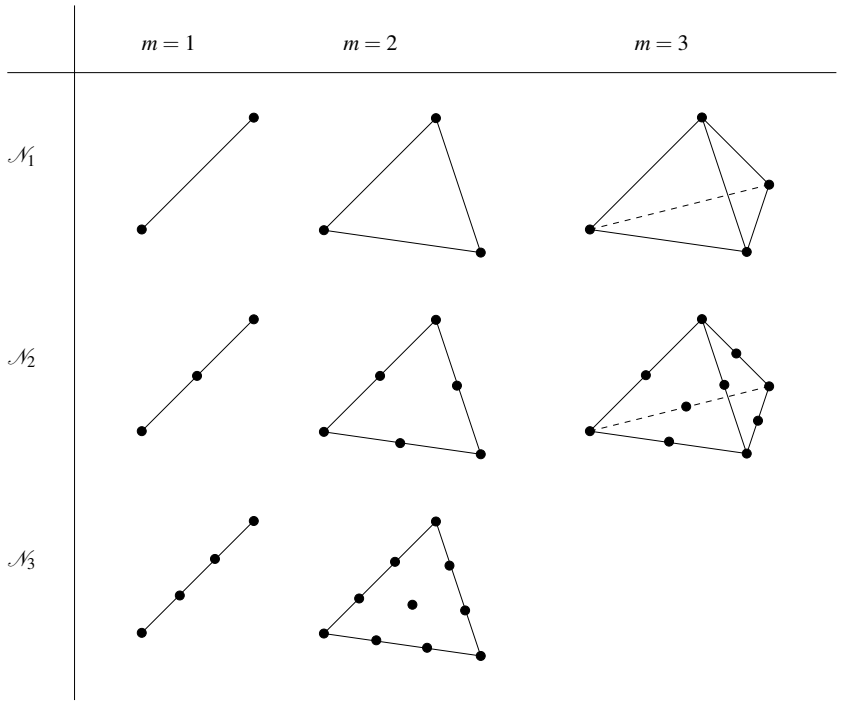
Es gilt: $\dim \tilde{\mathscr{P}}_n^m = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$

Begründung: Auswahl von bis zu n Faktoren aus $x_1, \ldots x_m$ entspricht der Auwahl von genau n Faktoren aus den $m+1$ Möglichkeiten $x_1, \ldots x_m$ oder unbenutzt

$$\underbrace{\text{card}}_{\text{Anzahl}} \mathscr{N}_n(T) = \binom{m+n}{n}$$

Begründung: Verteilung von n Stück „$\frac{1}{n}$“ auf $m+1$ baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$

Im folgenden skizzieren wir die Knotenmengen in Abhängigkeit von der Dimension des Simplex m und dem Polynomgrad n:



Satz 7.40 (Lagrange-Basis) *In baryzentrischen Koordinaten definieren wir die folgende Basis von $\tilde{\mathscr{P}}_n^m$:*

$$L_\alpha(\lambda_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

wobei $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = n$, $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$, $\sum_{i=0}^m \beta_i = n$,

$$\lambda_\beta = \left(\frac{\beta_0}{n}, \frac{\beta_1}{n}, \ldots, \frac{\beta_m}{n}\right) \quad \text{, d.h.} \quad x_\beta = \sum_{j=0}^m \frac{\beta_j}{n} a_j\,,$$

$$L_\alpha(\lambda) = \prod_{i=0}^m \prod_{j=0}^{\alpha_i - 1} \frac{\lambda_i - \frac{j}{n}}{\frac{\alpha_i}{n} - \frac{j}{n}}.$$

Dann gilt $\quad L_\alpha(\lambda_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

Beweis: Wir müssen die Basiseigenschaft nachweisen. Da $\dim \tilde{\mathscr{P}}_n^m = \binom{m+n}{n} = \operatorname{card} \mathscr{N}_n(T)$ genügt es zu zeigen, dass $L_\alpha(\lambda_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Hierzu betrachten wir:

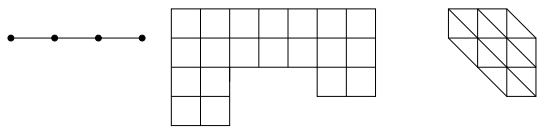
$\alpha = \beta$: $\lambda_i = \frac{\beta_i}{n} = \frac{\alpha_i}{n} \Rightarrow$ Behauptung.

$\alpha \neq \beta$: Es gibt ein $i \in \{0, \cdots, m\}$ mit $\beta_i < \alpha_i$ (da $\sum_{i=0}^m \beta_i = \sum_{i=0}^m \alpha_i$)
$\Rightarrow$ Es gibt ein $j \in \{0, \ldots, \alpha_i - 1\}$ mit $j = \beta_i$
$\Rightarrow \lambda_i = \frac{\beta_i}{n} = \frac{j}{n} \Rightarrow$ ein Linearfaktor $= 0$
$\Rightarrow L_\alpha(\lambda_\beta) = 0$.

□

In 2D erhält man für Polynomgrad 1 und 2 die Basisfunktionen aus Beispiel 7.24.

Bemerkung 7.41 *(i) Die Interpolationsschemata wendet man auf eine Zerlegung des Gebietes Ω in Teilintervalle ($m = 1$) oder Quader, bzw. Simplizes an ($m > 1$).*



(ii) Auf jeder dieser Zellen (Intervalle, Quader, Simplizes) geht man dann wie oben beschrieben vor.

(iii) Die Gesamtinterpolation ist global stetig, falls t_0, t_n die Intervallgrenzen sind (bei Intervall- oder Quaderzerlegungen); bei Simplizes erhält man durch die oben eingeführen Lagrangeknoten automatisch Stetigkeit.
Hierzu: Die Ränder der Quader oder Simplizes sind niederdimensionale Quader oder Simplizes, dort müssen deshalb die Interpolationspolynome von beiden Seiten gleich sein.

(iv) Im Allgemeinen sind die Interpolationen nicht global differenzierbar (Knicke!), auch wenn die zu interpolierende Funktion glatt ist.

(v) Auch in mehreren Dimensionen erhält man für $n+1$-mal stetig differenzierbare Funktionen und deren Interpolation durch Polynome n-ten Grades einen Fehler der Ordnung $O(h^{n+1})$.

7.5 Numerische Integration

Betrachten wir nun die approximative Berechung von Integralen. Hierbei werden wir auf die Interpolationsergebnisse zurückgreifen.

Problemstellung: Oft kann man $\int_a^b f\,dx$ nicht exakt berechnen.

Ziel: Eine numerische Approximation des Integrals:

$$\int_a^b f\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

(ω_i Gewichte, $f(x_i)$ Knotenauswertungen)

Idee: Statt das Integral exakt auszurechnen, bestimmt man eine Interpolierende p und integriert diese. Das heisst man definiert eine Näherung des Integrals durch

$$\int_a^b f\,dx \approx \int_a^b p\,dx,$$

wobei p die eigentlich zu integrierende Funktion f interpoliert.
Es bietet sich an hier die Polynominterpolation zu wählen, da sich Polynome leicht integrieren lassen.

Beispiel 7.42 $n=0, x_0=\frac{a+b}{2}$ *(Schwerpunktintegration, Rechteckregel, Mittelpunktsregel)*

$$\int_a^b f\,dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$n=1, x_0=a, x_1=b$ *(Trapezregel)*

$$\int_a^b f\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Allgemein gilt nun:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) \quad \textit{(Lagrangebasis)} \\ \Rightarrow \int_a^b p\,dx &= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)\,dx \\ &= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \underbrace{\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b L_j(x)\,dx \right)}_{\omega_j} (b-a) \end{aligned}$$

Satz 7.43 *Für eine vorgegebene Knotenmenge $\{x_0, \ldots, x_n\}$ auf dem Intervall $[a,b]$ erhalten wir mit der Wahl $\omega_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x)\,dx$ eine numerische Integrationsformel, die exakt ist für alle Polynome vom Grad $\leq n$.*

Beweis: Falls $p \in \mathscr{P}_n$, und wir interpolieren durch Polynome in $\mathscr{P}_n$, so ist p seine eigene Interpolierende.

□

Satz 7.44 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=0}^{n} (b-a)\omega_j f(x_j) \right| \leq Ch^{n+2}.$$

Beweis: Sei p die Interpolierende zu f.

$$\begin{aligned} L.S. &= \left| \int_a^b f(x) - p(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)|\,dx \leq \int_a^b dx \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \\ &\leq hCh^{n+1} = Ch^{n+2} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.45

- *Der Integrationsfehler ist von der Ordnung $n+2$,*
  der Interpolationsfehler von der Ordnung $n+1$.
- *Zerlegen wir ein Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle $[y_i, y_{i+1})$ mit $y_i = a + \frac{b-a}{n} i$ mit $i = 0, \ldots, n-1$, dann ist $h = \frac{b-a}{n}$ $\left(\rightsquigarrow n = \frac{b-a}{h}\right)$.*

Der Fehler, der sich bei numerischer Integration ergibt, ist dann abgeschätzt durch die Summe der Integrationsfehler auf den Teilintervallen:

$$\underbrace{n}_{\frac{b-a}{h}} Ch^{n+2} = (b-a)Ch^{n+1}$$

Ein Beispiel für eine solche Zerlegung des Integrationsintervalls betrachten Sie in Aufgabe 7.3 sowie (einschließlich einer Implementierung in MATLAB) in Aufgabe 7.17.

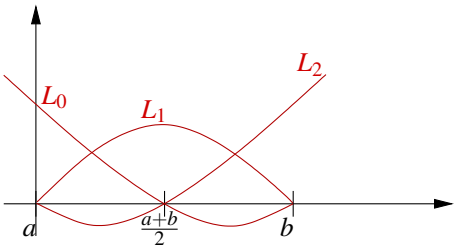
Beispiel 7.46

$\boxed{n=0}$ $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq Ch^3$$

Achtung: *Nach obigem Satz erwartet man nur Ch^2, dies ist hier sogar besser, denn die Integrationsformel ist exakt auf $\mathscr{P}_1$*

$\boxed{n=1}$ $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \leq Ch^3$$

$\boxed{n=2}$



Ohne Beschränkung: $a = 0, b = 1$

$L_0(x) = (1-x)(1-2x) = 1 - 3x + 2x^2$
$L_1(x) = 4(1-x)x = 4x - 4x^2$
$L_2(x) = x(2x-1) = 2x^2 - x$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L_0(x)\,dx &= \left[x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \\
\int_0^1 L_1(x)\,dx &= \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\
\int_0^1 L_2(x)\,dx &= \frac{1}{6} \quad \textit{(wegen Symmetrie)}
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich für den Fehler der numerischen Integration:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\left(\frac{f(a)}{6} + \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{6}\right) \right| \leq Ch^5$$

Diese numerische Integrationsformel nennt man auch Keplersche Fassregel.

(Die erzielte Ordnung ist hier wieder besser als nach obigen Satz zu erwarten, da die Integrationsformel exakt für Polynome vom Grad 3 ist.)

Bisher haben wir eine feste (meiste gleichverteilte) Knotenmenge betrachtet. Durch geschickte Wahl der Knoten kann man die Güte der numerischen Integration wesentlich verbessern. Dies führt auf die sogenannte Gauß-Quadratur:

$$\left.\begin{array}{ll} n+1 & \text{Knoten} \\ n+1 & \text{Gewichte} \end{array}\right\} 2n+2 \text{ Freiheitsgrade}$$

Frage: Kann man durch Wahl von Gewichten und Knoten Polynome vom Grad $2n+1$ ($2n+2$ Zwangsbedingungen) exakt integrieren?

Satz 7.47 (Gauß-Quadratur) *Zu einem Intervall $[a,b]$ gibt es Knoten $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ und Gewichte $\omega_0,\dots,\omega_n$, so dass die Quadraturformel*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

exakt ist auf Polynomen vom Grad $2n+1$ und der Integrationsfehler von der Ordnung $2n+3$ ($\leq Ch^{2n+3}$) ist.

(Ohne Beweis hier).

Bemerkung 7.48 *Üblicherweise betrachtet man die Gauß-Quadratur auf dem Intervall $[-1,1]$. Die Knoten x_i für $i = 0,1,\dots n$ sind dann die Nullstellen des $n+1$-ten Legendre-Polynoms P_{n+1}. Die Legendre-Polynome sind eine Folge von Polynomen $P_k \in \mathscr{P}_k$, die*

$$\int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)\,dt = 0 \quad \textit{für} \quad i \neq j$$

erfüllen und deren führender Koeffizient 1 ist. Man kann mittels partieller Integration zeigen, dass

$$P_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k.$$

Die ersten Legendre-Polynome sind

$$P_0(t) = 1, \qquad P_2(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$
$$P_1(t) = t, \qquad P_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

Die Gewichte ergeben sich wie bisher über die Integrale der Lagrange-Basisfunktionen zur jeweiligen Knotenmenge.
Die Knoten x_i und die Gewichte ω_i kann man für verschiedene n auch in Tabellen nach-

schlagen:

$$
\begin{array}{lll}
\boxed{n=0} & x_0 = 0 & \omega_0 = 1 \\[2ex]
\boxed{n=1} & x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} & \omega_0 = \frac{1}{2} \\
 & x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} & \omega_1 = \frac{1}{2} \\[2ex]
\boxed{n=2} & x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} & \omega_0 = \frac{5}{18} \\
 & x_1 = 0 & \omega_1 = \frac{8}{18} \\
 & x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} & \omega_2 = \frac{5}{18}
\end{array}
$$

Benötigt man die Werte für ein anderes Intervall $[a,b]$, so kann man sie einfach mittels

$$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i, \qquad \tilde{\omega}_i = \omega_i$$

umrechnen.
Um beispielsweise zu beweisen, dass die Formel für $n = 1$ auf $\mathscr{P}_3$ exakt integriert, genügt es, dies für eine beliebige Basis von $\mathscr{P}_3$ nachzurechnen. Da sowohl das Integral als auch die numerische Integrationsformel linear sind, folgt daraus die Exaktheit für alle in dieser Basis darstellbaren Polynome.

$\boxed{f(x) = 1}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underline{2}$$

$$2\sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i) = 2\left(\frac{1}{2} f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2} f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{2}$$

$\boxed{f(x) = x}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = \underline{0}$$

$$2\sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \underline{0}$$

$\boxed{f(x) = x^2}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$2\sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{f(x) = x^3} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = \underline{0}$$

$$2\sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \underline{0}$$

7.6 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 7.1 Betrachten Sie die Hermite-Interpolationsaufgabe, bei der $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ und $f^{(4)}(0)$ vorgegeben werden.

a) Geben Sie die dazu gehörende Hermite-Basis an.

b) Wie sieht die Basis aus, wenn $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$ und $f^{(4)}(x_0)$ für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben werden?

c) Schreiben Sie das Polynom p, das die Funktion f interpoliert, als Linearkombination der Basis-Polynome.

Anwesenheitsaufgabe 7.2 Betrachten Sie die folgende Interpolationsaufgabe:
Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zur Interpolation wird das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ zerlegt. Auf jedem dieser Teilintervalle soll f durch eine affine Funktion p_i (d.h. ein Polynom ersten Grades) interpoliert werden, die beiden für die Lagrange-Interpolation nötigen Knoten sollen stets auf den Intervallgrenzen liegen. D.h. $p_i(x_i) = f(x_i)$ und $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$.
Geht man davon aus, dass jede dieser interpolierenden Funktionen p_j, nur auf dem jeweiligen Teilintervall definiert ist, so kann man sie zu einer Funktion p zusammensetzen, die auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ definiert ist.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Gilt $p(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0,1,2,3,4$?

c) Ist p stetig, ist p differenzierbar?

d) Wie sieht die Interpolierende φ_2 aus, wenn $f(x_2) = 1$ und $f(x_0) = f(x_1) = f(x_3) = f(x_4) = 0$ vorgegeben wird?

e) Definieren Sie analoge Funktionen φ_i für die anderen Knoten x_i und interpretieren Sie diese als Basis für *stückweise affine Interpolation*.

Anwesenheitsaufgabe 7.3 Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

a) Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)

b) Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

Aufgabe 7.4 Berechnen Sie einen Näherungwert für $\frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$ durch numerische Approximation des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Teilen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in vier Teilintervalle und verwenden für jedes Teilintervall dieselbe Quadraturformel, nämlich

a) die Trapezregel bzw.

b) die Keplersche Fassregel.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 7.5

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

Aufgabe 7.6 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Potenzreihenentwicklungen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$.

Tipp: Schreiben Sie die Restglieder jeweils mit Hilfe des universellen Symbols $O(\ldots)$.

Aufgabe 7.7 Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

Aufgabe 7.8 Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\varepsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \beta(w) &= \arctan(w), \\ w(\varepsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_0, \\ w_0 &= \tan B = w(0). \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w-w_0|^2)$.
- Entwickeln Sie $w(\varepsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\varepsilon^4)$.
- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\varepsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

Aufgabe 7.9 Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

wobei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3+3x^2-x+1$ ist.

Aufgabe 7.10 Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

Aufgabe 7.11 Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

Aufgabe 7.12

a) Bestimmen Sie nach Hermite das Polynom $p(x)$ fünften Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1
p_i	0	1
p_i'	0	0
p_i''	0	1

Setzen Sie dazu

$$p(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

an, stellen das zugehörige Gleichungssystem auf und lösen es.

b) Wie lauten zu dieser Interpolationsaufgabe die beiden tatsächlich benötigten Hermite-Basisfunktionen? Berechnen Sie damit erneut die Lösung zu Aufgabenteil a).

Aufgabe 7.13 Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Interpolieren Sie die beiden Funktionen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ durch Polynome p_1 und p_2 mit den Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4.
Nun definieren wir die Kurve

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven γ und p?
Ist p eine geschlossene Kurve?

Aufgabe 7.14 Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

und

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \\ \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{pmatrix}$$

mit MATLAB.

Aufgabe 7.15 Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

auf $[0,1]^2$ mittels bikubischer Polynome ($m = 2$, $n = 3$). Wählen Sie dazu geeignete Knoten und berechnen Sie nur die Lagrangepolynome, die Sie tatsächlich benötigen.

Aufgabe 7.16 Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieses Dreiecks. Liegen p_1 bzw. p_2 im Innern dieses Dreiecks?

Aufgabe 7.17 Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `TrapezIntegration(a,b,h)`, welche das Integral über eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

berechnet. Die Argumente `a,b` sind die Intervallgrenzen, `h` ist die Feinheit der Intervallzerlegung. Verwenden Sie bitte folgendes Programmgerüst:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion
% mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  ...
end

% Hauptprogramm:
...

end
```

Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [0,1]$. Erstellen Sie eine Konvergenztabelle für die Gitterfeinheiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$, d. h. berechnen Sie zu diesen Feinheiten den Fehler zwischen dem berechneten und dem exakten Wert des Integrals.

Aufgabe 7.18 Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

Aufgabe 7.19 Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 7.20 Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

8 Komplexe Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung. Führen wir zunächst formal eine neue Zahl ein, die diese Gleichung löst, und nennen wir diese Zahl i (imaginäre Einheit):

$$i^2 = -1$$

Als neue Zahlenmenge betrachten wir nun die Zahlen

$$a + ib \qquad \text{mit} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Mit obiger Annahme und einem Umgang mit i wie mit reellen Zahlen folgt für die Summe oder das Produkt der Zahlen:

$$\begin{aligned}
(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\
(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= (a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).
\end{aligned}$$

Konkret rechnen wir dann zum Beispiel

$$(3+i)(2-i) = 6 + 2i - 3i - i^2 = 6 - i + 1 = 7 - i$$

oder durch Erweiterung von Zähler und Nenner

$$\frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6+i+2}{2+1} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}i.$$

Zur rigorosen Rechtfertigung betrachten wir im folgenden Abschnitt die Definition des Körpers der komplexen Zahlen.

8.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 8.1 (Komplexe Zahlen) *Unter der Menge der* komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *versteht man den* $\mathbb{R}^2$ *mit den Rechenregeln* $+$ *und* $*$*:*

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad (\textit{wie im Vektorraum } \mathbb{R}^2), \\
(a_1, b_1) * (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).
\end{aligned}$$

Satz 8.2 $(\mathbb{C}, +, *)$ *ist ein Körper.*

Beweis: Zu den Axiomen im Einzelnen:
<u>Addition:</u>

(A1) Assoziativität
(A2) Kommutativität
(A3) Nullelement $(0,0)$.
(A4) Negatives Element zu (a,b) ist $-(a,b)$.
Da die Addition der in $\mathbb{R}^2$ entspricht, folgen diese Axiome aus den entsprechenden Eigenschaften der Vektorraum-Addition.

Multiplikation:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(M1) Assoziativität}\\ \text{(M2) Kommutativität}\end{array}\right\}\ \text{nachrechnen}$$

(M3) Einselement $(a,b)*(1,0)=(a,b)$.
(M4) Inverses Element: Es soll gelten

$$\begin{aligned}(a,b)*(x,y)=(1,0) \quad &\Leftrightarrow \quad ax-by=1,\\ &\quad bx+ay=0.\\ &\quad \text{(Gleichungssystem)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Annahme } b\neq 0: \quad x=-\frac{a}{b}y \quad &\Rightarrow \quad \left(-\frac{a^2}{b}-b\right)y=1\\ &\Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a^2+b^2}, \quad x=\frac{a}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Der Fall $a\neq 0$ verläuft analog.

$$\Rightarrow (a,b)^{-1} \quad = \quad \left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right) \qquad \text{falls } (a,b)\neq(0,0).$$

(D) Distributivgesetz: nachrechnen

□

Definieren wir nun $i=(0,1)$, dann sehen wir, dass $i*i=(-1,0)$. Die reellen Zahlen können wir nun mittels der Zuordnung $\mathbb{R}\ni a\mapsto(a,0)\in\mathbb{C}$ in die komplexen Zahlen einbetten. Dann können wir für $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ auch schreiben

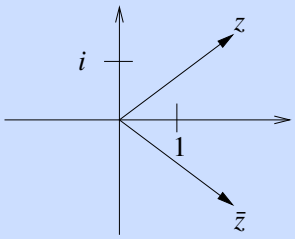
$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & + & ib,\\ & & \updownarrow & & \updownarrow\\ & & (a,0) & & (0,b)\end{array}$$

um eine komplexe Zahl z in der Basis $\{1,i\}=\{(1,0),(0,1)\}$ darzustellen. Nun können wir wieder so rechnen, wie in der Motivation für die komplexen Zahlen. Wir lassen nun das Multiplikationssymbol wieder weg und schreiben

$$z_1*z_2=z_1z_2 \qquad \text{für } z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Wir schreiben auch $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$.

Definition 8.3 *Zu* $z = x + iy$ *definiert* $\bar{z} := x - iy$ *die* konjugiert komplexe Zahl.



Weiterhin definiert

$$|z| := \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

den Betrag *von* z.

$$\begin{array}{rrcccll} \textit{Ferner heißen} & \mathrm{Re}\,(z) & = & x & = & \frac{1}{2}(z+\bar{z}) & \textit{der}\ \text{Realteil}\ \textit{von}\ z, \\ \textit{und} & \mathrm{Im}\,(z) & = & y & = & \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) & \textit{der}\ \text{Imaginärteil}\ \textit{von}\ z. \end{array}$$

Eigenschaften: Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z, \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1 z_2}, \\ |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2|, \\ |\mathrm{Re}\,(z)| &\leq |z|, \\ |\mathrm{Im}\,(z)| &\leq |z|, \end{aligned}$$

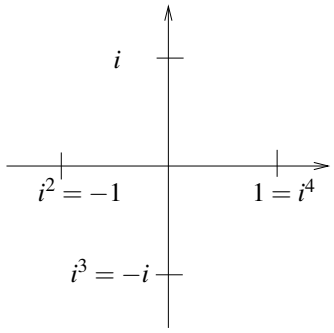
$$\left.\begin{array}{l} |z| \in \mathbb{R}, |z| \geq 0, \quad (|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0) \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{array}\right] \quad \Leftarrow \quad |z| = \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(z) \\ \mathrm{Im}\,(z) \end{pmatrix} \right\| \text{ ist Norm auf } \mathbb{R}^2,$$

Zur Konvergenz komplexer Zahlen: Es gilt

$z_n \longrightarrow z$, falls $|z_n - z| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|z_n - z\|_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Re}\, z$ und $\mathrm{Im}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Im}\, z$.

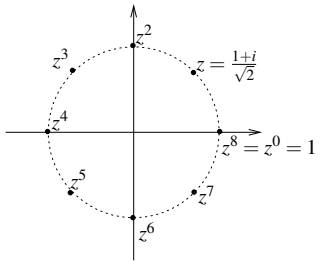
Beispiele 8.4

(i)



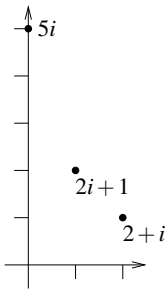
(ii) Sei $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1} = 1, \\ z^2 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(1+i^2+2i\right) = i, \\ z^3 &= zz^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} i = \frac{i-1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



(iii) Betrachte das Produkt

$$\begin{aligned} (2+i)(2i+1) &= 4i+2+i\cdot 2i+i \\ &= 5i+2-2 = 5i, \\ \textit{dann ist } |5i| &= 5 = \sqrt{5}\sqrt{5} \\ &= |2+i||2i+1|. \end{aligned}$$



Weitere Beispiele für das Rechnen im Komplexen finden Sie in Aufgabe 8.1. Übung 8.3 zeigt, wie man die Assoziativität der Multiplikation nachrechnet. Eine wichtige Eigenschaft des komplexen Konjugierens finden Sie in Aufgabe 8.7.

8.2 Die komplexe Exponentialfunktion

Die Definition der Potenzreihen $\exp(\cdot), \sin(\cdot), \cos(\cdot)$ kann man auf die komplexen Zahlen erweitern. Konvergenz ist durch das Majorantenkriterium (wie im reellen Fall) gesichert.

<u>Wir erhalten:</u>

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \\ \cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots. \end{aligned}$$

Es gilt: $\boxed{\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\exp(i\varphi) &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) \\
&= \cos\varphi + i\sin\varphi.
\end{aligned}$$

□

Ferner gilt: $\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)}$

Beweis: [Skizze] Z.z. genügt $\exp(x+iy) \overset{!}{=} \exp(x)\exp(iy)$. Denn daraus folgt:

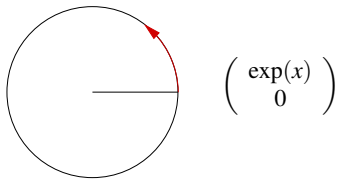
$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= \exp(x_1 + iy_1)\exp(x_2 + iy_2) \\
&= \exp(x_1)\exp(x_2)(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= \exp(x_1 + x_2)\big((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) \\
&\qquad + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)\big) \\
&\overset{\text{Add.Theorem}}{=} \exp(x_1 + x_2)(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) \\
&= \exp((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \exp(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

Zu obiger Aussage ($\exp(x+iy) \overset{!}{=} \exp(x)(\cos y + i\sin y)$, ähnlicher Beweis wie im reellen Fall $e^{x+y} = e^x e^y$):

Definiere $v(t) := \exp(x+it)$, $v(0) = \exp(x)$. Da $v(t)$ komplex ist, existiert eine Darstellung $v(t) = v_1(t) + iv_2(t)$ und es gilt

$$\dot{v}(t) = iv(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{v}_1 + i\dot{v}_2 = iv_1 - v_2.$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteil, so ergibt sich $\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.



Dies ist ein gewöhnliches DGL-System mit Anfangswerten $v_1(0) = \exp(x)$ und $v_2(0) = 0$, welches folgende Lösung besitzt:

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \exp(x)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Die Eindeutigkeit dieser Lösung wird im Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen bewiesen.

$$\Rightarrow \quad \exp(x+it) = \exp(x)(\cos t + i\sin t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Beh.}$$

□

Weitere Folgerungen: $\boxed{\exp(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}}$

Hierzu: $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z) \Rightarrow \exp(z) \neq 0$.

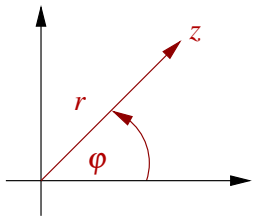
Weiterhin gilt: $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

Hierzu: $\exp(\bar{z}) = \exp(x)\big(\cos(-y) + i\sin(-y)\big) = \exp(x)\big(\cos y - i\sin y\big) = \overline{\exp(z)}$.

Geometrische Interpretation:

(i) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Rightarrow \boxed{z = re^{i\varphi},}$

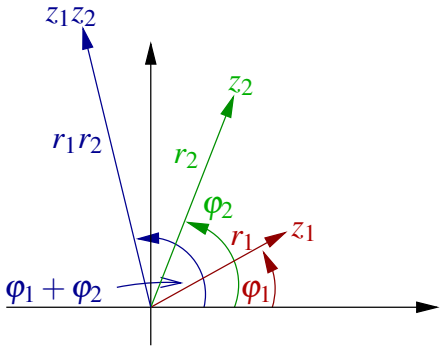
wobei $r = |z|, \quad \cos\varphi = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$.



Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$,

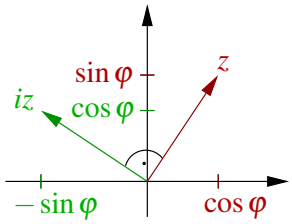
dann ist $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$.

D.h. die „Multiplikation komplexer Zahlen entspricht der Multiplikation der Beträge und der Addition der Winkel“ (vgl. Beispiel rechts).



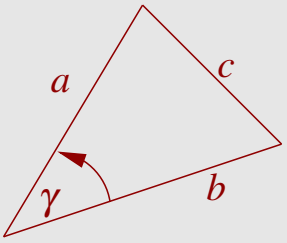
(ii) Multiplikation mit i = Drehung um 90° ($\frac{\pi}{2}$) nach links in $\mathbb{C}$:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad iz = ire^{i\varphi} = re^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} = r(i\cos\varphi - \sin\varphi).$$



Betrachten wir nun als eine Anwendung den folgenden Satz:

Satz 8.5 (Kosinussatz)



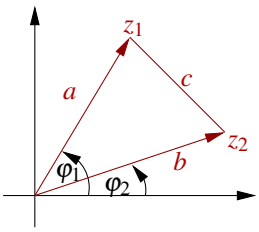
In einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

wobei γ der Winkel zwischen den Seiten der Längen a und b bezeichnet.

Beweis: [mittels komplexer Zahlen] Wähle $z_1 = ae^{i\varphi_1}$, $z_2 = be^{i\varphi_2}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
c^2 &= |z_1 - z_2|^2 = |ae^{i\varphi_1} - be^{i\varphi_2}|^2 \\
&= \overbrace{|e^{i\varphi_2}|^2}^{1} |ae^{i\overbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}^{\gamma}} - b|^2 = |ae^{i\gamma} - b|^2 \\
&= (ae^{i\gamma} - b)(ae^{-i\gamma} - b) = a^2 e^{i(\gamma-\gamma)} - ab(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) + b^2 \\
&= a^2 + b^2 - ab(\cos\gamma + i\sin\gamma + \cos\gamma - i\sin\gamma) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}$$



□

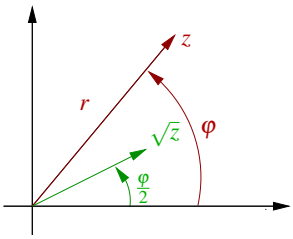
8.3 Der Fundamentalsatz der Algebra

Betrachten wir zunächst das Lösen quadratischer Gleichungen:

Es gilt $\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}\sqrt{e^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$,

und $z^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = i$ oder $z = -i$:

Da $-1 = e^{i\pi} = e^{3i\pi}$, ist $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ oder $z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.



Allgemeiner:

$$z^2 + pz + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(z^2 + pz + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}_{(z+\frac{p}{2})^2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 8.6

Gleichung: $z^2 + 2z + 10 = 0$

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i \\
&\Rightarrow z_1 = -1 - 3i, \qquad z_2 = -1 + 3i.
\end{aligned}$$

Gleichung: $z^2 - (3i+2)z - 1 + 3i = 0$

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{3i+2}{2} \pm \sqrt{\frac{(3i+2)^2}{4} + 1 - 3i} = \frac{3}{2}i + 1 \pm \sqrt{-\frac{5}{4} + 3i + 1 - 3i} \\
&= \frac{3}{2}i + 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{4}} = 1 + \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\right) i, \\
&\Rightarrow z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 + 2i.
\end{aligned}$$

Satz 8.7 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0, \ldots, n$, das nicht konstant ist hat mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{C}$.*

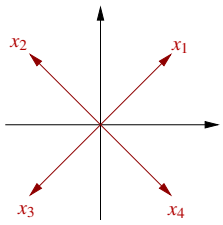
(Hier ohne Beweis.)

Folgerung 8.8 *Jedes Polynom $p(z)$ der obigen Form mit $a_n \neq 0$ hat genau n Nullstellen auf $\mathbb{C}$.*

Beweisidee: Linearfaktoren abdividieren. Man erhält $p(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ mit (ggf. mehrfach vorkommenden) Nullstellen $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Beispiele 8.9 *(i) Sei $p(z) = z^4 + 1$, dann hat p folgende Nullstellen:*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}, \\ z_3 &= \frac{-i-1}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = \frac{-i+1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

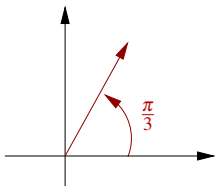


Diese Nullstellen treten als komplex konjugierte Paare auf und man erhält

$$\begin{aligned} p(z) &= \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)\,. \end{aligned}$$

(ii) Sei $p(z) = z^3 + 1$, dann ergeben sich die Nullstellen von p als:

$$z_1 = -1, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$



Das Rechnen mit der komplexen Exponentialfunktion, insbesondere das Wurzelziehen im Komplexen, üben Sie in den Aufgaben 8.4, 8.6, 8.8 und 8.9.

8.4 Vektorräume über $\mathbb{C}$

Wir haben Vektorräume bereits über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$ kennengelernt (vgl. hierzu Definition 3.3). Bisher praktisch aber immer über reellen Vektorräumen gearbeitet mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nun wollen wir uns mit dem Fall von Vektorräumen über $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) beschäftigen. Hier tritt eine wichtige Besonderheit erst bei der Einführung von Skalarprodukten auf (vgl. die Definition des Skalarprodukts $g(\cdot,\cdot)$ über $\mathbb{R}$-Vektorräumen in Definition 8.10). Würde man für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ genauso verfahren, so ergäbe sich auf dem $\mathbb{C}^n$ für einen Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)$:

$$g(v,v) = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \ldots + v_n v_n\,,$$

aber $(v_i)^2 \neq |v_i|^2$ für $v_i \in \mathbb{C}$. Damit würde man nicht auf eine sinnvolle Norm $\sqrt{g(v,v)}$ stoßen. (Siehe auch Aufgabe 8.2.) Aber es gilt $v_i \bar{v}_i = |v_i|^2$. Deshalb definieren wir

Definition 8.10 *Auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*
$g : V \times V \to \mathbb{C}; \quad x,y \mapsto g(x,y)$ *ein* Skalarprodukt *, gdw. für $x,y,z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\begin{array}{ll} (G1) & g(x,x) \in \mathbb{R},\ g(x,x) \geq 0, \quad g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ (G2) & g(x,y) = \overline{g(y,x)} \\ (G3) & g(x+y,z) = g(x,z) + g(y,z) \\ (G4) & g(\alpha x,y) = \alpha g(x,y) \end{array}$$

Als kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ erhalten wir somit

$$g(v,w) = v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} + \ldots + v_n\overline{w_n}$$

für Vektoren $v = (v_1,\ldots,v_n)$ und $w = (w_1,\ldots,w_n)$. Hierfür schreiben wir auch wieder $v \cdot w = g(v,w)$. Damit ergibt sich für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{Re(v_1)^2 + Im(v_1)^2 + \ldots + Re(v_n)^2 + Im(v_n)^2}\,,$$

da $|v_i|^2 = v_i\overline{v_i} = Re(v_i)^2 + Im(v_i)^2$. Dies entspricht der euklidischen Norm, wenn wir den $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}^{2n}$ betrachten.
Auch für dieses Skalarprodukt können wir wie im Reellen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|v \cdot w| \leq \|v\|\,\|w\|$$

beweisen. Das kanonische Skalarprodukt können wir analog zu dem im $\mathbb{R}^n$ auch schreiben als

$$v \cdot w = \overline{w}^T v\,.$$

Nun haben wir auf reellen Vektorräumen die transponierte Matrix kennengelernt. Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A = (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ gilt $A^T = (A_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$ ist die Matrix bei der wir die Rolle von Zeilen und Spalten in A getauscht haben. Damit ergibt sich im Zusammenhang mit dem kanonischen Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$

$$Av \cdot w = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}v_j)w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j(\sum_{i=1}^{n} A_{ij}w_i) = v \cdot A^T w\,.$$

Wollen wir nun die gleiche Transformation über komplexen Matrixen aus $\mathbb{C}^{n,n}$ durchführen, so ergibt sich auf Grund der obigen Definition des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} Av \cdot w &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}v_j)\overline{w_i} = \sum_{j=1}^{n} v_j(\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\overline{w_i}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j(\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{A_{ij}}w_i}) = v \cdot \overline{A}^T w\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Hier haben wir verwendet, dass $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und dass $\overline{\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$. Ferner notieren wir mit

$$\overline{A}^T := \left(\overline{A_{ji}}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

die Entsprechung der transponierten Matrix im Fall komplexer Vektorräume $\mathbb{C}^n$ mit kanonischem Skalarprodukt. Man bezeichnet diese Matrix auch als die adjungierte Matrix.

8.5 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 8.1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4+3i)+2(6-2i) = ?$

b) $(4+3i)(6-2i) = ?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = ?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

Anwesenheitsaufgabe 8.2 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$ und versuchen darauf mittels

$$g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = z_1 c_1 + z_2 c_2$$

ein Skalarprodukt zu definieren. Welche Eigenschaften (G1)-(G4) eines Skalarproduktes werden nicht erfüllt?

Aufgabe 8.3 Weisen Sie das Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen nach:

$$(a \cdot b) \cdot c \quad = \quad a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{C},$$

Aufgabe 8.4 Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

Aufgabe 8.5 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie beide Lösungen in der Form $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $x^2 + (1-3i)x - 2 - 2i = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}i = 0$

Tipp: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 8.6 Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$.	ja □	nein □
b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.	ja □	nein □
c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{i}$.	ja □	nein □
d) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{i}$.	ja □	nein □
e) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$.	ja □	nein □

Aufgabe 8.7 Beweisen Sie: Bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen immer als konjugierte Paare auf, d.h. falls $p(z) = 0$ dann auch $p(\overline{z}) = 0$.
Tipp: Beweisen Sie $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ und folgern Sie daraus die Behauptung. Was ist $\overline{r}$ für $r \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 8.8 Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -16.$$

Aufgabe 8.9 Skizzieren Sie die Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1 \quad \text{für} \quad k = 2, 4, 8$$

in $\mathbb{C}$. Wie sehen alle Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

in $\mathbb{C}$ aus?

9 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen

In diesem Kapitel werden wir uns mit Eigenschaften von Matrizen beschäftigen. Wir werden sehen, dass es besonders ausgezeichnete Richtungen gibt, in denen das Verhalten von Matrizen besonders einfach – eine Streckung oder Stauchung – ist. Dies wird ein besseres Verständnis der mit den Matrizen verbundenen linearen Abbildungen ermöglichen.

9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine $n \times n$ Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Definition 9.1 *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt* Eigenwert *der $n \times n$ Matrix A, wenn es einen Vektor $x \neq 0$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Der Vektor x heißt* Eigenvektor *zum Eigenwert λ.*

Beispiele 9.2

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *hat die Eigenwerte $2, -1, 3$ zu den Eigenvektoren e_1, e_2, e_3.*

(ii) Die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{1} - 2ww^T \quad \text{für } w \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|w\| = 1, \\ &= \begin{pmatrix} 1-2w_1w_1 & -2w_1w_2 & \cdots & -2w_1w_n \\ -2w_1w_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2w_{n-1}w_n \\ -2w_1w_n & \cdots & -2w_{n-1}w_n & 1-2w_nw_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass Q eine Spiegelung an einer Ebene mit Normale w darstellt. Q hat den Eigenwert 1 mit Eigenvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $v \perp w$ und den Eigenwert -1 mit Eigenvektor w, denn

$$\begin{aligned} Qv &= v - 2w \underbrace{w^T v}_{w \cdot v = 0} = v, \\ Qw &= w - 2w \underbrace{w^T w}_{=1} = -w. \end{aligned}$$

(iii) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, und es soll gelten $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1})x = 0$ für ein $x \neq 0$, das Gleichungssystem hat also mehr als eine Lösung. Dann hat $(A - \lambda \mathbb{1})$ Rang< 2,

d.h. $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$.

$$\Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} (-2-\lambda) & 6 \\ 6 & (7-\lambda) \end{pmatrix} = -(7-\lambda)(2+\lambda)-36 = \lambda^2-5\lambda-50,$$

mit Lösungen $\lambda_{1,2} = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+50} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{15}{2}$

$\Rightarrow$ *Eigenwerte* $\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = -5$.

Wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren:

zu λ_1: $\quad (A-\lambda_1\mathbb{1})x = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$

$\Rightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ *sind alle Eigenvektoren.*

zu λ_2: $\quad (A-\lambda_2\mathbb{1})x = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$\Rightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *sind alle Eigenvektoren.*

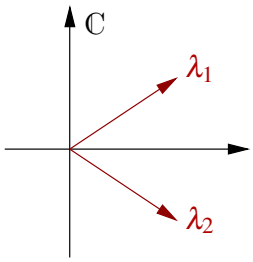
Beobachtung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iv) Es sei $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *(Drehung um Winkel* φ*).*

Wir machen den gleichen Ansatz wie oben:

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + \underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1} = 0$$



$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi-1} \\ &= \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}. \end{aligned}$$

Falls $\sin(\varphi)=0$*, so ist* $A=\mathbb{1}$ *und damit sind alle Vektoren Eigenvektoren zum Eigenwert* 1*. Also nehmen wir jetzt an* $\sin(\varphi)\neq 0$*. Nun berechnen wir die Eigenvektoren:*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\sin\varphi z_2 &= \pm i\sin\varphi z_1 \\ \sin\varphi z_1 &= \pm i\sin\varphi z_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -z_2 &= \pm i z_1 \\ z_1 &= \pm i z_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

Damit ergeben sich (falls $\sin\varphi \neq 0$*) Eigenvektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ *zu den Eigenwerten* $\cos\varphi + i\sin\varphi$*, bzw.* $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

Falls wir als Körper nur die reellen Zahlen betrachten, hat A für $\sin(\varphi) \neq 0$ *keine Eigenwerte.*

Bemerkung 9.3 *Die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert* λ *(einschließlich des Nullvektors) ist der Kern von* $A - \lambda\mathbb{1}$*, also ein Untervektorraum. Wir nennen diesen* Eigenraum.

Definition 9.4 $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$ *heißt das* charakteristische Polynom *von A. Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind Eigenwerte von A und es gilt* $P \in \mathscr{P}_n$.

Hierzu betrachten wir nicht triviale Vektoren im Kern von $(A - \lambda\mathbb{1})$, d.h. $x \in \mathbb{K}^n$ mit $(A - \lambda\mathbb{1})x = Ax - \lambda x = 0$ mit $x \neq 0$. Wenn es diese gibt, so heißt dies, dass $A - \lambda\mathbb{1}$ nicht vollen Rang hat. Demnach ist $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung.

Wir können bestimmte Koeffizienten von $P(\lambda)$ einfach ausrechnen:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + \ldots + \det A. \end{aligned}$$

Dies sieht man wie folgt: Nach dem Entwicklungssatz für Determinante betrachten wir die Entwicklung aller auftretenden Determinanten jeweils nach der 1. Spalte. Die maximale Potenz von λ - nämlich n - tritt nur dann auf, wenn wir jeweils den ersten Term all dieser Entwicklungen betrachten. Dadurch ergibt sich als ein Summand $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$. In diesem Term ist nach Ausmultiplikation der führende Koeffizient $(-1)^n$ vor λ^n. Dies begründet den Term höchster Ordnung. Der Term niedrigster Ordnung ergibt sich als $P(0) = \det A$. Wenn man nun bei der Entwicklung jeweils nach ersten Spalten einmal nicht das oberste Element abgreift, so muss man ab dann diese Zeile streichen und streicht damit gleich ein weiteres mal das Auftreten eines Terms mit λ. Dann ensteht aber nur eine maximale Potenz $n-2$. Damit ergibt sich auch der Term der Ordnung $n-1$ in λ direkt aus dem Produkt $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$. Dieser ist dann aber offensichtlich $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn})$.

Wir definieren: $\operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ als die *Spur* von A [tr = trace (Spur)].

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das charakteristische Polynom $P(\cdot)$ n Nullstellen inklusive mehrfacher Nullstellen.
Achtung: Die Vielfachheit der Nullstelle sagt im Allgemeinen nichts über die Dimension

des Eigenraums aus. (Die Dimension des Eigenraums kann kleiner oder gleich der Vielfachheit der Nullstelle sein.) Ein Beispiel hier zu ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = (1-\lambda)^2$ hat die doppelte Nullstelle 1 aber der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist $\operatorname{span}\{e_1\}$.

Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ so gilt: λ Eigenwert $\Rightarrow \overline{\lambda}$ Eigenwert (vgl. Bsp. oben), wie Sie in Übungsaufgabe 8.7 beweisen.
Weitere Beispiele finden Sie in den Übungen 9.5, 9.9 und 9.10.

9.2 Symmetrische Matrizen

Betrachten wir nun speziell symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Wir werden sehen, dass die Struktur dieser Matrizen sehr gut über die Eigenwerte und Eigenvektoren erfasst werden kann.

Lemma 9.5 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Eigenwerte, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren und damit die Eigenräume zueinander orthogonal.*

Beweis: Sei u ein Eigenvektor zu λ_1 und v ein Eigenvektor zu λ_2, dann gilt

$$\begin{aligned} & Au = \lambda_1 u, \quad Av = \lambda_2 v \\ \Rightarrow\ & \lambda_1 u \cdot v = Au \cdot v = u \cdot A^T v = u \cdot Av = u \cdot \lambda_2 v = \lambda_2 u \cdot v \\ \Rightarrow\ & (\lambda_1 - \lambda_2) u \cdot v = 0 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} u \perp v. \end{aligned}$$

□

Lemma 9.6 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix und $\lambda = \min\{Ax \cdot x \mid \|x\| = 1\}$, dann ist der Vektor u auf dem das Minimum angenommen wird Eigenvektor zum Eigenwert λ.*

Beweis: Definiere $f(x) = Ax \cdot x$, dann ist f stetig und $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt. Damit nimmt die Funktion f auf der Menge S ihr Minimum an. Sei $u \in S$ die Minimalstelle, d.h.

$$f(u) = \lambda = Au \cdot u \leq Ax \cdot x \quad \text{für alle } x \in S.$$

Sei $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$ ein beliebiger Vektor, dann gilt

$$z = \frac{y}{\|y\|} \in S \Rightarrow Az \cdot z \geq \lambda \Rightarrow \frac{Ay \cdot y}{\|y\|^2} \geq \lambda \Rightarrow Ay \cdot y \geq \lambda y \cdot y.$$

Weiterhin definiere $B := A - \lambda \mathbb{1} \Rightarrow By \cdot y = Ay \cdot y - \lambda y \cdot y \geq 0$ und $Bu \cdot u = 0$.
Betrachte nun $y = u + \varepsilon x$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq By \cdot y = B(u+\varepsilon x) \cdot (u + \varepsilon x) \\ &= Bu \cdot u + \varepsilon Bu \cdot x + \varepsilon Bx \cdot u + \varepsilon^2 Bx \cdot x \\ &= 0 + 2\varepsilon Bu \cdot x + \varepsilon^2 Bx \cdot x \end{aligned}$$

Nun dividieren wir durch ε und erhalten $0 \leq 2Bu \cdot x + \varepsilon Bx \cdot x$. Nun betrachten wir $\varepsilon \to 0$ und erhalten schließlich

$$0 \leq 2Bu \cdot x\,.$$

Nun wählen wir $x = -Bu$ und folgern $0 \leq -Bu \cdot Bu = -\|Bu\|^2$. Damit schließen wir $Bu = 0$ und somit $Au = \lambda u$.

□

Lemma 9.7 *Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix und V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $Ax \in V$ für $x \in V$*

$$\lambda = \min\{Ax \cdot x \mid \|x\| = 1, x \in V\}$$

und das Minimum werde für den Vektor $u \in V$ angenommen. Dann ist u Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Beweis: Der Beweis verläuft wie in Lemma 9.6, nur spielt sich alles im Unterraum V ab. Wir erhalten genauso wie dort $Bu \cdot x \geq 0$ für alle $x \in V$. Da $Bu = Au - \lambda u$ folgt $Bu \in V$, somit können wir $x = -Bu$ wählen und erhalten wie oben $-\|Bu\| \geq 0$ und somit $Bu = 0$. Damit folgt schließlich wiederum $Au = \lambda u$.

□

Ein Beispiel dazu finden Sie in Übung 9.1.

Satz 9.8 *Eine symmetrische $n \times n$ Matrix hat n Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ mit zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$.*

Beweis:

(i) Wir suchen das Minimum von

$$f(x) = Ax \cdot x$$

unter der Nebenbedingung $g(x) = \|x\|^2 = 1$. Lemma 9.6 zeigt, dass das Minimum den Wert λ_1 hat und für den Eigenvektor u_1 angenommen wird.

(ii) Wir bestimmen nun $u_2 = x$ als Lösung des Minimumproblems unter der Nebenbedingung $\|x\|^2 = 1$ im Unterraum

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \cdot u_1 = 0\}\,.$$

Aus $x \cdot u_1 = 0$ folgt $Ax \cdot u_1 = x \cdot Au_1 = \lambda_1 x \cdot u_1 = 0$, d. h. die Matrix A bildet V_1 in sich ab. Lemma 9.7 zeigt, dass λ_2 Eigenwert mit Eigenvektor $x = u_2$ ist. Wir setzen das Verfahren fort und bestimmen im k-ten Schritt das Minimum von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $x \cdot x = 1$ im Unterraum

$$V_{k-1} = \{x \,|\, x \cdot u_1 = \ldots = x \cdot u_{k-1} = 0\}\,.$$

und wir erhalten λ_k als Eigenwert mit Eigenvektor u_k, der nach Konstruktion orthogonal zu $u_1 \ldots, u_{k-1}$ ist. Das Verfahren kann fortgesetzt werden bis $k = n$ gilt. Es ergibt sich eine der Größe nach geordnete Folge von Eigenwerten.

□

Die orthonormierten Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ ($u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$, $\|u_i\| = 1$ für $i, j \in \{1, \cdots, n\}$) sind linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Jeder Vektor x lässt sich als Linearkombination

$$x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

mit

$$\alpha_i = x \cdot u_i,\ i = 1, \ldots, n$$

schreiben (diese Darstellung der α_i erhält man, indem man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit u_i bildet, vgl. orthogonale Projektion im nächsten Kapitel).
Es folgt

$$Ax = \lambda_1 \alpha_1 u_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n u_n$$

und

$$\frac{Ax \cdot x}{x \cdot x} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}\,.$$

Dies ist ein gewichteter Mittelwert der Eigenwerte, muss also zwischen dem kleinesten und dem größten liegen.

Folgerung 9.9 *Der* RAYLEIGH-*Quotient*

$$r(x) = \frac{Ax \cdot x}{x \cdot x}$$

genügt der Ungleichung

$$\lambda_1 \leq r(x) \leq \lambda_n$$

und nimmt sein Minimum für $x = u_1$ und sein Maximum für $x = u_n$ an.

Beispiel 9.10 *Betrachten wir die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

dann ergibt sich für den Rayleigh-Quotienten

$$r(x,y) = \frac{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{x^2+y^2} = \frac{\left(3x^2+2xy+3y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)}.$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum oder Maximum ist $\nabla r(x,y) = 0$. *Wir berechnen nun*

$$\begin{aligned} \nabla r(x,y) &= \frac{(6x+2y, 2x+6y)\left(x^2+y^2\right) - \left(3x^2+2xy+3y^2\right)(2x,2y)}{2\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 3x^3+3xy^2+yx^2+y^3-3x^3-2x^2y-3y^2x \\ x^3+xy^2+3yx^2+3y^3-3x^2y-2xy^2-3y^3 \end{pmatrix}^T}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(y(y^2-x^2), x(x^2-y^2)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Da $r(0,0)$ *nicht definiert ist, erhalten wir für* $\nabla r(x,y) = 0$ *die notwendige Bedingung* $y^2 = x^2$. *Hierfür gibt es genau zwei Lösungen,* $y = -x$ *oder* $y = x$. *Diese beiden Lösungen bestimmen zwei eindimensionale Unterräume, jeweils zum minimalen und maximalen Eigenwert. Wählen wir als Länge dieser Vektoren* 1 *so erhalten wir bis auf das Vorzeichnen den Vektor* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ *und den Vektor* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. *Diese beiden Vektoren sind also die Kandidaten für Eigenvektoren zum größten und zum kleinsten Eigenwert. Wir berechnen weiter*

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \\ A\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den minimalen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ *mit Eigenvektor* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ *und den maximalen Eigenwerte* $\lambda_1 = 2$ *mit Eigenvektor* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. *Schließlich prüfen wir noch die Eigenwerte duch Nullstellenbestimmung des charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. *Wir erhalten* $\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$ *und somit* $\lambda_1 = 1$ *und* $\lambda_2 = 2$.

Diagonalisierung symmetrischer Matrizen. Wir fassen jeden Eigenvektor der Matrix A als Spaltenvektor auf und bilden die Matrix U aus den Eigenvektoren als Spalten. Es folgt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 u_{11} & \dots & \lambda_n u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 u_{n1} & \dots & \lambda_n u_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$AU = UD \tag{16}$$

mit einer Diagonalmatrix D, die die Eigenwerte von A als Diagonalelemente enthält. Aufgrund der Orthonormiertheit der Eigenvektoren folgt

$$U^T U = \mathbb{1}\,.$$

Solche Matrizen nennt man orthogonale Matrizen. Wir fassen dies in einer Definition zusammen:

Definition 9.11 (Orthogonale Matrizen) *Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt orthogonal, falls $U^T = U^{-1}$, d.h. $U^T U = UU^T = \mathbb{1}$.*

Allgemein nennen wir eine Matrix *diagonalisierbar*, falls eine nichtsinguläre Matrix B existiert, so dass

$$D = B^{-1}AB$$

eine Diagonalmatrix ist (vgl. hierzu Definition 9.19). Wir werden diesen allgemeinen Fall bald vertiefen. Nach unseren obigen Überlegungen ergibt sich für symmetrische Matrizen somit:

Satz 9.12 *Jede symmetrische $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar. Es gilt*

$$A = UDU^T$$

mit einer orthogonalen Matrix U und einer Diagonalmatrix D.

Beweis: Aus $U^T U = \mathbb{1}$ folgt $U^{-1} = U^T$. Aus $AU = UD$ ergibt sich dann durch Multiplikation von rechts mit $U^T = U^{-1}$ direkt $A = UDU^T$.

□

Für die Matrix aus Beispiel 9.10 erhalten wir (je nach Wahl und Anordnung der Eigenvektoren) die folgenden Diagonalisierungen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele zur Diagonalisierung finden Sie in den Aufgaben 9.7 und 9.12, zu orthogonalen Matrizen in Übung 9.4.

9.3 Positiv definite, symmetrische Matrizen und das Skalarprodukt

Quadratische Formen. Ein Ausdruck der Form

$$x^T Ax = Ax \cdot x$$

mit einer symmetrischen Matrix A heißt quadratische Form. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $A = \mathbb{1}$ (Einheitsmatrix) gilt. Durch

$$x \cdot x = 1$$

wird für $x \in \mathbb{R}^n$ eine Kugel mit Radius 1 dargestellt (für $x \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich der Einheitskreis). Setzen wir $y = rx$ für eine Zahl $r > 0$, so erhalten wir eine Kugel (einen Kreis) mit Radius r mit der Gleichung

$$\frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{r}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot y = r^2 .$$

Setzen wir

$$y_i = a_i x_i$$

mit positiven $a_i > 0$, so erhalten wir die Gleichung eines Ellipsoids (einer Ellipse) mit den Halbachsen a_i für $i = 1 \ldots, n$ (für $n = 2$ eine Ellipse). Wir können uns eine Ellipse durch Streckung des Einheitskreises mit dem Faktor a_i in x_i- Richtung entstanden denken. D.h.

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 y_1^2 + \left(\frac{1}{a_2}\right)^2 y_2^2 = 1$$

ist die implizite Darstellung einer Ellipse mit Halbachsen a_1 und a_2. Das können wir auch schreiben als $Dx \cdot x = 1$ mit

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass für jede symmetrische Matrix A mit positiven Eigenwerten über die Gleichung $Ax \cdot x$ ein Ellipsoid definiert wird.

Satz 9.13 (Hauptachsentransformation) *Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit der Diagonalisierung $A = UDU^T$ und U orthogonal, dann gilt mit $y = U^T x$ bzw. $x = Uy$:*

$$Ax \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2, \quad \textit{falls} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Falls alle Eigenwerte λ_k positiv sind, beschreibt also

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \cdot x = 1\}$$

ein Ellipsoid, dessen Halbachsen die Längen $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ haben und in die Richtung des zugehörigen Eigenvektors zeigen.

Beweis: Wir setzen $y = U^T x$, d. h. die Vektoren x und y gehen durch eine orthogonale Transformation hervor. Es folgt

$$x = Uy$$

und

$$Ax \cdot x = x^T Ax = y^T U^T AUy = y^T Dy = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2.$$

Dabei haben wir verwendet, dass sich Gleichung (16) in der Form $U^T AU = D$ oder $A = UDU^T$ schreiben läßt. Führen wir über die Beziehung $y = U^T x$ neue Koordinaten y ein (Basiswechsel), so können wir die ursprünglichen Koordinaten mit $x = Uy$ erhalten (umgekehrter Basiswechsel). Es folgt

$$Ax = UDU^T x,$$

d. h. wir können das Bild von A erhalten, indem wir zuerst transformieren, dann eine Diagonalmatrix anwenden und schließlich die Rücktransformation ausführen.

□

Für eine quadratische Form

$$x^T Ax = 1$$

mit einer symmetrischen Matrix A und $A = UDU^T$ und U orthogonal folgt mit

$$y = U^T x$$

die Beziehung

$$y^T Dy = y^T U^T AUy = (Uy)^T AUy = x^T Ax = 1\,.$$

Wir sehen, dass im Fall $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ durch eine orthogonale Abbildung, z.B. eine Drehung oder Spiegelung eine Ellipse (Ellipsoid) mit den Achsen

$$\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}$$

erhalten wird.

Beispiel 9.14 *Gesucht sind die Hauptachsen der Ellipse*

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1\,.$$

Wir schreiben die Gleichung in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\,.$$

Die zugehörige Matrix hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 9)(\lambda - 1) = 0$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 9$. Die Matrix der orthonormierten Eigenvektoren lautet

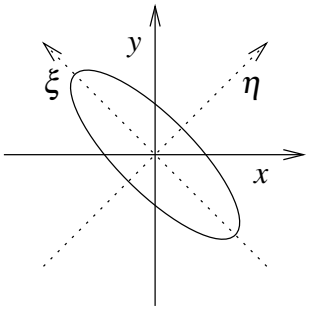
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Da $A = UDU^T$, ergibt sich mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\xi^2 + 9\eta^2 = 1\,.$$



Wir erhalten eine Ellipse mit Hauptachse 1 in Richtung $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und Hauptachse* $\frac{1}{3}$ *in Richtung* $U\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weitere Beispiele finden Sie in den Aufgaben 9.2, 9.3 und 9.11.

Definition 9.15 *Eine symmetrische Matrix heißt positiv definit, falls $Ax \cdot x > 0$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$.*

Lemma 9.16 *Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (symmetrisch und) positiv definit, so definiert $g(v,w) := Av \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt.*

Beweis: Wir überprüfen die Eigenschaften eines Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} g(v,w) &= Av \cdot w = v \cdot A^T w = v \cdot Aw = Aw \cdot v \\ &= g(w,v) \Rightarrow g \text{ symmetrisch.} \\ g(\cdot,\cdot) & \quad \textit{bilinear} \quad \checkmark \\ g(v,v) &= Av \cdot v > 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, \text{„=“ gdw. } v = 0 \Leftrightarrow A \text{ ist positiv definit.} \end{aligned}$$

□

Lemma 9.17 *Zu jedem Skalarprodukt $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es eine positiv definite symmetrische Matrix A mit $g(v,w) = Av \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Definiere $A_{ij} := g(e_j, e_i)$, dann gilt für $A = (a_{ij})_{ij}$ die Beziehung

$$g(e_j, e_i) = a_{ij} = Ae_j \cdot e_i \,.$$

Die Matrix A ist symmetrisch, da $a_{ij} = g(e_j, e_i) = g(e_i, e_j) = a_{ji}$. Aus den Darstellungen $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ und der Bilinearität von $g(\cdot,\cdot)$ folgt

$$g(v,w) \quad = \quad \sum_{i,j} g(e_i, e_j) v_i w_j = \sum_{i,j} a_{ji} v_i w_j = Av \cdot w.$$

Zu zeigen bleibt, dass A positiv definit ist. Aber da $Av \cdot w = g(v,w)$ ist, folgt aus der positiven Definitheit von $g(\cdot,\cdot)$ auch die positive Definitheit von A.

□

Eine analoge Darstellung ist natürlich auch bezüglich anderer Basen möglich.

Satz 9.18 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit und symmetrisch, dann gelten:*

(i) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(ii) Alle Hauptunterdeterminanten $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ *sind positiv.*

Beweis:

(i) Sei λ ein Eigenwert von A und $u \neq 0$ ein Eigenvektor dazu, dann gilt

$$Au \cdot u = \lambda u \cdot u.$$

Da A positiv definit ist, gilt $Au \cdot u > 0$. Da andererseits $u \cdot u = \|u\|^2 > 0$, folgt $\lambda > 0$.

(ii) Die Matrix A lässt sich diagonalisieren, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} A = UDU^T \qquad \Rightarrow \qquad \det A &= \det U \det D \det U^T \\ &= \underbrace{(\det U)^2}_{\substack{= 1,\ \text{da } (\det U)^2 = \det(UU^T) = \det \mathbb{1} = 1.}} \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \overset{(i)}{>} 0 \end{aligned}$$

Nun zu den Unterdeterminanten: Sei

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$A^{(k)} x^{(k)} \cdot x^{(k)} = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j = A \tilde{x}^{(k)} \cdot \tilde{x}^{(k)},$$

also ist $A^{(k)}$ positiv definit, da A positiv definit ist:

$$A^{(k)} x^{(k)} \cdot x^{(k)} > 0 \text{ falls } x^{(k)} \neq 0.$$

Wie für die Matrix A folgt daraus $\det A^{(k)} > 0$.

□

Darstellung des Skalarproduktes bezüglich verschiedener Basen. Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ das Skalarprodukt

$$g(v,w) = Av \cdot w \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die bezüglich g orthonormal ist.
Der erste Vektor muss lediglich (bezüglich g) Länge 1 haben, wir beginnen z.B. mit e_1 und normieren ihn. Da $\|e_1\|_g = \sqrt{g(e_1,e_1)} = \sqrt{5}$, ergibt sich $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der zweite Vektor muss senkrecht auf dem ersten stehen. Wir beginnen mit e_2 und entfernen den Anteil in Richtung u_1, also $e_2 - g(e_2,u_1)u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Normieren wir nun, so erhalten wir $u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Schreiben wir diese beiden Vektoren nun als Spalten in eine Matrix U, so ergibt sich

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor x enthalte die Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis u_1, u_2, also gilt $v = Ux$. Wenn wir analog für den zweiten Vektor $w = Uy$ annehmen, so ist

$$g(v,w) = Av \cdot w = AUx \cdot Uy = U^T AUx \cdot y.$$

Da die Basis bezüglich g orthonormal ist, muss die darstellende Matrix zu g bezüglich dieser Basis die Einheitsmatrix sein, vgl. Lemma 9.17. Es muss also $U^T AU = \mathbb{1}$ sein, was man auch leicht nachrechnet. Mit

$$B = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ergibt sich also $A = B^T B$.
Auf diese Art lässt sich zu jeder symmetrischen, positiv definiten Matrix A eine Zerlegung $A = B^T B$ mit einer invertierbaren Matrix B berechnen.

Darstellung des Skalarproduktes bezüglich verschiedener Basen am Beispiel von Polynom-Vektorräumen. Betrachte den Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathscr{C}^0(I)$ auf dem Intervall $I = [a,b]$. Wir definieren nun eine Bilinearform $g : \mathscr{C}^0 \times \mathscr{C}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$g(v,w) := \int_I v(x)w(x)\,dx.$$

Dann ist $g(.,.)$ ein Skalarprodukt, denn

(i) $g(v,w) = g(w,v)$,

(ii) $g(\alpha v + \beta z, w) = \int_I (\alpha v(x) + \beta z(x))\, w(x)\,dx$
$= \alpha \int_I v(x)w(x)\,dx + \beta \int_I z(x)w(x)\,dx = \alpha g(v,w) + \beta g(z,w)$,

(iii) $g(v,v) = \int_I v^2(x)\,dx \geq 0, \quad g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0.$

Nun betrachten wir den Unterraum der linearen Polynome $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{C}^0(I)$. Als Basis von $\mathscr{P}_1$ wählen wir $\{x \mapsto 1, x \mapsto x\}$, dann erhalten wir die darstellende Matrix A zu $g(.,.)$ auf $\mathscr{P}_1$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_a^b 1\cdot 1\,dx = (b-a),\\
a_{12} &= \int_a^b 1\cdot x\,dx = (b-a)\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} = a_{21},\\
a_{22} &= \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3},\\
\Rightarrow A &= \begin{pmatrix} b-a & \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^2-a^2}{2} & \frac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für $b=1, a=0$ erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und für $b=1, a=-1$ ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Wie berechnet man nun das hier gegebene Skalarprodukt unter Verwendung der darstellenden Matrix A **?**

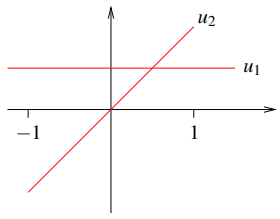
Betrachte die Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{P}_1; \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x \mapsto v_1 + v_2 x)$, dann ist

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} &= g(x \mapsto v_1 + v_2 x, x \mapsto w_1 + w_2 x)\\
&= \int_a^b (v_1 + v_2 x)(w_1 + w_2 x)\,dx\\
&= (b-a)v_1 w_1 + \frac{b^2-a^2}{2}(v_1 w_2 + v_2 w_1) + \frac{b^3-a^3}{3} v_2 w_2.
\end{aligned}$$

Fragen wir nun nach einer Orthonormalbasis $\{u_1, u_2\}$ von Funktionen $u_1, u_2 \in \mathscr{P}_1$ bezüglich des Skalarproduktes $g(.,.)$:

$$\int_a^b u_i(x) u_j(x)\,dx = \begin{cases} 1 & ; \quad i=j \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Für den Fall des Intervalls $[-1,1]$ $(b=1, a=-1)$ ergibt sich:



Damit ist

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad u_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

denn:

$$\int_{-1}^{1} u_1(x)u_2(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} u_1^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1,$$

$$\int_{-1}^{1} u_2^2(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx \;=\; \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = 1.$$

Die Matrix A des oben definierten Skalarprodukts lässt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} Av\cdot w &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Bv\cdot Bw, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Darstellung des Skalarprodukts} \\ \text{in der neuen Basis}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}}_{B}. \end{aligned}$$

Hierbei ist B die Transformation von der Monombasis $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ in die orthogonale Basis.

Für den Fall des Intervalls $[0,1]$ $(b = 1, a = 0)$ ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Um hierzu eine Orthonormalbasis zu bestimmen, wählen wir zunächst ein beliebiges Polynom (nicht Null) und normieren dieses, z.B. $x \mapsto 1$.
Das zweite Basispolynom muss nun

$$\int_0^1 1\cdot(mx+b) = 0$$

erfüllen, als Lösungsmenge ergeben sich alle Vielfachen von $x \mapsto 2x-1$. Aus

$$\int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \frac{1}{6}(2x-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

folgt, dass $x \mapsto \sqrt{3}(2x-1)$ normal ist (Länge in der Norm zum Skalarprodukt ist 1). Damit ist dann $\left\{x \mapsto 1\,,\; x \mapsto \sqrt{3}(2x-1)\right\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{P}_1$. Aus

$$ax+b = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}(2x-1)\right) + (\frac{a}{2}+b)\,1$$

folgt die explizite Transformation der Monombasis in die orthonormale Basis:

$$\begin{aligned} (x\mapsto 1) &= (x\mapsto 1) \\ (x\mapsto x) &= \frac{1}{2}(x\mapsto 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x\mapsto \sqrt{3}(2x-1)) \end{aligned}$$

Schliesslich ergibt sich somit für die Basistransformation $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ von der Monombasis in die orthogonale Basis die folgende Darstellung der Matrix A:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Achtung: Die bei dieser Darstellung $A = B^T \mathbb{1} B = B^T B$ vorkommende Matrix B ist in der Regel *nicht* orthogonal, da die Vektoren ja nur bezüglich des Skalarproduktes g (und nicht bezüglich des Standard-Skalarprduktes) orthonormal gewählt wurden.
Man sieht jedoch, dass sich jede symmetrische, positiv definite Matrix a auf diese Weise als $A = B^T B$ mit einer invertierbaren Matrix B schreiben lässt.
Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 9.15.

9.4 Diagonalisierbare Matrizen

Wir haben gesehen, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonalisierbar ist (hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$):

$$A = UDU^T \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ und } U^T = U^{-1}.$$

Nun betrachten wir allgemeine Matrizen und deren Diagonalisierbarkeit. Hier definieren noch einmal allgemein, wann Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ diagonalisierbar sind.

Definition 9.19 *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist* allgemein diagonalisierbar *falls es eine Diagonalmatrix*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gibt, sowie eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit

$$A = BDB^{-1} \qquad (AB = BD).$$

Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind dann die Eigenwerte von A und die Spalten von B die Eigenvektoren:

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \ldots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} : \qquad AB = BD \quad \Leftrightarrow \quad Ab_i = \lambda_i b_i.$$

Satz 9.20 *Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.*

Beweis: B ist genau dann invertierbar (hat vollen Rang), wenn die Spalten b_i (die gewählten Eigenvektoren) linear unabhängig sind.

□

Beispiel 9.21 *Nicht jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $n > 1$ ist diagonalisierbar (vgl. die Diskussion des gleichen Beispiels weiter oben):*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierzu: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow 1$ *ist einziger Eigenwert (doppelte Nullstelle). Die Eigenvektoren lösen also die Gleichung:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0, x_1 \text{ beliebig.}$$

Damit spannt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *einen eindimensionalen Eigenraum auf* $\overset{\text{Satz 9.20}}{\Rightarrow}$ *A ist nicht diagonalisierbar.*

Lemma 9.22 *Sind $b_1, \ldots, b_k$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, dann sind die $b_1, \ldots, b_k$ linear unabhängig.*

Beweis: Wir betrachten die Gleichung

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k = 0$$

und zeigen zunächst $\alpha_1 = 0$. Dazu multiplizieren wir diese Gleichung mit $A - \lambda_k \mathbb{1}$ von links und erhalten

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)b_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)b_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)b_{k-1} + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_k)b_k \\ &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)b_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)b_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)b_{k-1} = 0\,. \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir mit $A - \lambda_{k-1}\mathbb{1}$ ebenfalls von links und es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k-1})(\lambda_1 - \lambda_k)b_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k-1})(\lambda_2 - \lambda_k)b_2 + \ldots \\ &\quad + \alpha_{k-2}(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})(\lambda_{k-1} - \lambda_k)b_{k-2} + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Weiteres Multiplizieren mit den Faktoren $A - \lambda_{k-2}\mathbb{1}, \ldots, A - \lambda_2 \mathbb{1}$ ergibt letztlich

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\ldots(\lambda_1 - \lambda_{k-1})(\lambda_1 - \lambda_k)b_1 = 0\,.$$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind und $b_1 \neq 0$ folgt $\alpha_1 = 0$. Analog erhält man $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

□

Satz 9.23 *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.*

Beweis: Folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz und dem Lemma.

□

Die Diagonalisierung ist ein wichtiges Werkzeug, wenn man Potenzen von Matrizen ausrechnen möchte. Betrachten wir hierzu eine diagonalisierbare Matrix $A = BDB^{-1}$ wobei B invertierbar ist und D eine Diagonalmatrix mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= BDB^{-1}BDB^{-1} = BD\mathbb{1}DB^{-1} = BDDB^{-1} = BD^2B^{-1} \overset{\text{Iteration}}{\Rightarrow} \\ A^k &= AA^{k-1} = BDB^{-1}BD^{k-1}B^{-1} = BDD^{k-1}B^{-1} = BD^kB^{-1}. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also den folgenden Satz.

Satz 9.24 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit $A = BDB^{-1}$, wobei $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar und D eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sei. Dann gilt*

$$A^k = B \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} B^{-1}$$

Dieses Ergebnis kann man unter anderem im folgenden Beispiel einsetzen.

Beispiel 9.25 (Explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen) *In folgende werden wir ein Beispiel diskutieren, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:*

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \textit{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt zu berechnen berechnen, diagonalisieren wir A:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Als nächstes berechnen wir die Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & \lambda_i \end{pmatrix} b_i = 0 \\
\Rightarrow \quad & \left.\begin{aligned} (1-\lambda_i) b_{i1} + b_{i2} &= 0 \\ b_{i1} - \lambda_i b_{i2} &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{2.Gl.}{\Rightarrow} b_{i1} = \lambda_i b_{i2} \\
\Rightarrow \quad & \textit{1. Gleichung: } (1-\lambda_i)\lambda_i b_{i2} + b_{i2} = -b_{i2} \underbrace{(\lambda_i^2 - \lambda_i - 1)}_{=0 \quad (\textit{ s. o. })} = 0 \quad \textit{für alle } b_{i2}, \\
\Rightarrow \quad & \textit{wähle } b_{i2} \textit{ beliebig, z.B. } b_{i2} = 1, \\
\Rightarrow \quad & b_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} \\
& \textit{wobei} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \\
& A^2 = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} B^{-1}, \\
\Rightarrow \quad & A^n = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1^n & -\lambda_1^n \lambda_2 \\ -\lambda_2^n & \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y_{n+1} = A^n y_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad x_n &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2^n} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}} \\
\textit{Probe:} \qquad x_1 &= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1, \quad x_2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{2^2\sqrt{5}} = 1.
\end{aligned}$$

Übungen zu diagonalisierbaren Matrizen finden Sie in Aufgabe 9.6 sowie 9.8.

9.5 Singulärwertzerlegung

Wir wollen nun eine verallgemeinerte „Diagonalisierung“ für beliebige Matrizen kennenlernen. Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 9.26 *Ein Orthogonalsystem $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ mit $k < n$ läßt sich zu einer orthogonalen Basis ergänzen durch Hinzufügen von Vektoren $u_{k+1}, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Wir gehen iterativ vor und suchen einen Vektor $\tilde{u}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{u}_{k+1} \perp u_1, \ldots, u_k$, d.h.

$$\underbrace{\tilde{u}_{k+1} \cdot u_1 = 0, \qquad \ldots \qquad , \tilde{u}_{k+1} \cdot u_k = 0}_{\substack{k \text{ Gleichungen mit } n \text{ Unbekannten} \\ (\text{ den Koordinaten von } \tilde{u}_{k+1}) \text{ und } k < n}}$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine nichttriviale Lösung $\tilde{u}_{k+1}$. Setze also

$$u_{k+1} := \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}.$$

Dieses Verfahren iterieren wir, bis wir eine Basis gefunden haben (und es keine nichttrivialen Lösungen obigen Gleichungssystems mehr gibt).

$\square$

Satz 9.27 (Singulärwertzerlegung)
Zu $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ gibt es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ und eine Matrix $D = (d_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit verschwindenden Einträgen außerhalb der Diagonalen ($d_{ij} = 0$ für $i \neq j$), so dass

$$A = UDV^T.$$

<u>Schematisch:</u> $k \leq m, n, \sigma_j > 0$ für $j \leq k$.

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}} = \underset{m \times m}{\begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{m \times n}{\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_k & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array}\right)} \underset{n \times n}{\begin{pmatrix} & & \\ & V^T & \\ & & \end{pmatrix}}$$

Die $\sigma_1, \ldots \sigma_k$ heißen Singulärwerte von A.

Beweis: $A^T A$ ist eine symmetrische Matrix aus dem $\mathbb{R}^{n,n}$. D.h. es gibt eine Matrix $V \in R^{n,n}$ mit $V^T = V^{-1}$ und

$$A^T AV = V\tilde{D},$$

wobei $\tilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Wegen $A^T Ax \cdot x = \|Ax\|^2 \geq 0$ gilt, dass alle Eigenwerte nicht negativ sind. Man sagt dann auch $A^T A$ ist positiv semi-definit. Ohne Beschränkung nehmen wir also an, dass

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

die Eigenwerte von $A^T A$ sind. Wir definieren

$$W := AV \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad W = \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \ldots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix},$$
$$\text{dann gilt} \quad W^T W = (AV)^T AV = V^T A^T AV = \tilde{D}.$$

D.h. die Spalten $w_1, \ldots, w_k$ sind orthogonal zueinander und $w_{k+1}, \cdots w_n$ sind Nullspalten, denn

$$w_{k+1} \cdot w_{k+1} = 0, \ldots, w_n \cdot w_n = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{k+1} = \ldots = w_n = 0.$$

Wir setzen $\sigma_j = \sqrt{\lambda_k}$ und $u_j = \frac{w_j}{\sigma_j}$ für $j = 1, \ldots, k$, dann bilden $\Rightarrow u_1, \ldots, u_k$ ein Orthonormalsystem. Nun ergänzen wir diese Vektoren zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^m$,

$$u_1, \ldots, u_m,$$

und definieren

$$U = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \dots & u_k & u_{k+1} & \dots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m}.$$

Es gilt damit mit

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array}\right), dass$$

$$W = UD \quad \Rightarrow \quad AV = UD \quad \Rightarrow \quad A = UDV^T.$$

□

Beispiel 9.28 *Sei*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 4 & -8 & -8 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aus $\det(A^T A - \lambda \mathbb{1}) = -\lambda^3 + 9\lambda^2$ *erhält man die Eigenwerte 9 und zweimal 0. Die Matrix besitzt also einen Singulärwert (*$k = 1$*), nämlich* $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$*. Es ergibt sich*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wählt man einen Eigenvektor zum Eigenwert 9 nun zwei orthogonale Eigenvektoren zum Eigenwert 0, so erhält man nach Normieren z.B. die orthogonale Matrix

$$V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und daraus

$$W = AV = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich als erste Spalte von U der Vektor $1/3(-9/5, -12/5)^T = (-3/5, -4/5)^T$*. man ergänzt diesen zu einer Orthonormalbasis des* $\mathbb{R}^2$ *und erhält*

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 9.29

- *Die Schritte des Beweises zeigen auch, wie man die Singulärwertzerlegung berechnen kann. (Für große Matrizen gibt es effizientere Methoden.)*
- *Die Singulärwerte sind die Wurzeln der nicht-Null-Eigenwerte von A^TA bzw. AA^T. Sie sind also positiv und bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*
- *Wenn $A = UDV^T$, dann $A^T = VD^TU^T$.*

Singulärwerte und die Singulärwertzerlegung werden auch in den Übungen 9.14 und 9.16 diskutiert.

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$ und gesuchtem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ($m > n$ im Allgemeinen überbestimmt). Mit der Singulärwertzerlegung von A erhalten wir

$$UDV^Tx = b \quad \Rightarrow \quad D(V^Tx) = (U^Tb).$$

Wähle nun $\tilde{x} = (V^Tx)$ und $\tilde{b} = (U^Tb)$. Dann folgt

$$D\tilde{x} = \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_j\tilde{x}_j &= \tilde{b}_j, \quad j = 1,\dots k \\ 0 &= \tilde{b}_j, \quad j > k \end{cases} .$$

D.h. eine Lösung $\tilde{x}$ existiert genau dann, wenn $\tilde{b}_{k+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$. Hierbei sind die σ_j die Diagonaleinträge von D für $j = 1,\dots n$. Andernfalls ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Im Fall der Lösbarkeit gilt

$$x = V\tilde{x}, \qquad \text{wobei} \qquad \tilde{x}_j = \frac{\tilde{b}_j}{\sigma_j} = \frac{(U^Tb)_j}{\sigma_j} \qquad \text{für } j = 1,\dots k$$

und $\tilde{x}_{k+1},\dots\tilde{x}_n$ beliebig. D.h. mit Hilfe der Singulärwertzerlegung können wir Matrizen sehr gut analysieren und verschiedene **zur Matrix assoziierte Unteräume** identifizieren:

- **Spaltenraum:** $\mathrm{Bild}\,(A)$:
  Dieser wird aufgespannt von den Spalten von A :

$$Ax = U\underbrace{D\underbrace{V^Tx}_{(*)}}_{(**)}$$

  $(*)$: durchläuft alle Vektoren des $\mathbb{R}^n$,
  $(**)$: durchläuft alle Vektoren $\in \mathrm{span}\{e_1,\dots,e_k\}$ mit $e_i \in \mathbb{R}^m$,
  $\Rightarrow \mathrm{Bild}\,(A) = \mathrm{span}\{u_1,\dots,u_k\}$.

- **Kern von A:** $\operatorname{Ker}(A)$

$$\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = 0\}.$$

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A) &= \{x = V\tilde{x} \,|\, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k = 0, \tilde{x}_{k+1}, \ldots \tilde{x}_n \text{ beliebig } \} \\ \Rightarrow \operatorname{Ker}(A) &= \operatorname{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\} \quad \text{falls } V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Zeilenraum:** $\operatorname{Bild}\left(A^T\right)$

$A^T = VD^TU^T$ Singulärwertzerlegung $\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow}$ $\operatorname{Bild}\left(A^T\right) = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

- **Linksnullraum:** $\operatorname{Ker}\left(A^T\right)$

$$\operatorname{Ker}\left(A^T\right) = \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, y^T A = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, A^T y = 0\}$$

Damit ergibt sich $\operatorname{Ker}\left(A^T\right) = \operatorname{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}$.

9.6 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 9.1 Wir suchen

$$\min\{Ax \cdot x \,|\, \|x\| = 1\} \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\| = 1\}$ läßt sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Finden Sie eine Funktion $\gamma : [0, T) \to \mathbb{R}^2$, die diese Kurve beschreibt.

b) Berechnen Sie $A\gamma(t) \cdot \gamma(t)$.

c) Zeichnen Sie die Funktion $a(t) := A\gamma(t) \cdot \gamma(t)$ auf $[0, T)$.

d) Bestimmen Sie die Minimalstellen der Funktion $a(t)$ auf $[0, T)$ und die zugehörigen Funktionswerte.

e) Bestimmen Sie damit $\min\{Ax \cdot x \,|\, \|x\| = 1\}$ und einen Vektor, an dem dieses Minimum angenommen wird.

Anwesenheitsaufgabe 9.2

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Welche geometrische Figur stellt die Menge

$$M := \{x \,|\, Ax \cdot x = 1\}$$

dar?

b) Es sei

$$\tilde{A} = GAH = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix A aus Teil a). Welche geometrische Bedeutung haben die beiden Matrizen G und H? Welche geometrische Figur stellt die Menge

$$\tilde{M} := \{x \,|\, \tilde{A}x \cdot x = 1\}$$

dar?

c) Sei weiterhin $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit einem negativen Eigenwert. Welche geometrische Figur stellt die Menge $N := \{x \,|\, Bx \cdot x = 1\}$ dar?

Anwesenheitsaufgabe 9.3 Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

Anwesenheitsaufgabe 9.4 Zeigen Sie, dass die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und die Spiegelungsmatrix

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}^3, \|n\| = 1$$

orthogonal sind.
Sind sie auch symmetrisch?

Aufgabe 9.5 Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 9.6 Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja □ nein □

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja □ nein □

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja □ nein □

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja □ nein □

e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja □ nein □

Aufgabe 9.7 Geben Sie die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gehörende Diagonalmatrix D, d.h. $A = UDU^T$ mit $U^T = U^{-1}$ an. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D sowie die Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 9.8 Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Wenn die Spalten von $\mathbf{P}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind, so gilt wie bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus den entsprechenden Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist. Man muss also geeignet viele linear unabhängige Eigenvektoren finden, so dass $\mathbf{P}$ invertierbar ist.
Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

Aufgabe 9.9 Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B = A - 4\mathbb{1}$.

Aufgabe 9.10 Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

durch 2×2 Determinanten aus.
Tipp:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um das Charakteristische Polynom von A als Produkt zweier quadratischer Polynome zu schreiben.

c) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Tipp: Sie kennen die 2×2 Blöcke bereits aus anderen Übungen bzw. Beispielen.

Aufgabe 9.11 Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

Aufgabe 9.12 Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tipps: Die Eigenwerte von A sind ganzzahlig.
Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.

Aufgabe 9.13 In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \;=\; & x_n + x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$, die sogenannten Fibonacci-Folge.

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt berechnen zu können, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.
Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass es für 2×2 Matrizen eine Formel zum Berechnen der inversen Matrix gibt.
Zur Kontrolle:

$$A = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

Aufgabe 9.14 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja □ nein □

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja □ nein □

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von $A^T A$. ja □ nein □

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1. ja □ nein □

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja □ nein □

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. ja □ nein □

Aufgabe 9.15 Gegeben ist das Skalarprodukt

$$g(v,w) = \int_0^{2\pi} v(x)w(x)\,dx$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

a) Man zeige, dass die Funktionen 1, $\cos(x)$ und $\cos(2x)$ richtig skaliert ein ON-System bilden. Was ist die Skalierung?
Tipp: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)$. Stellen Sie die Funktion in Termen der obigen Basis dar und berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalität $\|f\|_g^2 = g(f,f)$.

Aufgabe 9.16 Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.17 Thema: Singulärwertzerlegung und assoziierte Unterräume
Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r und $A = UDV^T$ ihre Singulärwertzerlegung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Der Spaltenraum von A wird von den ersten r Spalten von U aufgespannt. ja □ nein □

b) Jeder Vektor y im Kern von A^T steht senkrecht auf jeder Spalte von A. ja □ nein □

c) Der Kern von A^T wird von den letzten $n-r$ Spalten von U aufgespannt. ja □ nein □

d) Der Spaltenraum von A^T wird von den ersten r Spalten von V aufgespannt. ja □ nein □

e) Der Kern von A wird von den letzten $m-r$ Spalten von V aufgespannt. ja □ nein □

Aufgabe 9.18 Thema: Zu einer Matrix assoziierte Unterräume
Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Es gilt $\dim \operatorname{Bild}(A) = r$ und $\dim \operatorname{Ker}(A) = m-r$.
ja □ nein □

b) Es gilt $\dim \operatorname{Bild}(A)^T = r$ und $\dim \operatorname{Ker}(A)^T = n-r$.
ja □ nein □

c) Es gilt $\dim \operatorname{Bild}(A)^T = r$ und $\dim \operatorname{Ker}(A)^T = m-r$.
ja □ nein □

d) Es gilt $\operatorname{Bild}(A) = (\operatorname{Ker}(A)^T)^\perp$ und $\operatorname{Bild}(A)^T = (\operatorname{Ker}(A))^\perp$.
ja □ nein □

e) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn aus $A^T y = 0$ stets $b^T y = 0$ folgt. ja □ nein □

Aufgabe 9.19 Thema: Determinate, Eigenwerte, definite Matrizen
Welche Aussagen sind richtig?

a) Eine $n \times n$ Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn A nur negative Eigenwerte hat. ja □ nein □

b) Die 3×3 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ sei positiv definit, dann gilt:

$$a_{11} > 0, \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ \det(A) > 0.$$

ja □ nein □

c) Für $n \times n$ Matrizen A, B gilt: $\det(A+B) = \det A + \det B$. ja □ nein □

Aufgabe 9.20 Thema: Positiv definite Matrizen
Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $\det A > 0$, dann ist A positiv definit. ja □ nein □

b) Ist A positiv definit, dann gilt $\det A > 0$. ja □ nein □

c) Hat das homogene System $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann ist A nicht positiv definit. ja □ nein □

d) Ist A positiv definit, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. ja □ nein □

Aufgabe 9.21 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen positiv (bzw. negativ) definit:

a)

$$A := (-\alpha)$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 4 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

c)

$$C := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$D := \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipp: Falls $x^2 + px + q = 0$, so gilt für die beiden Lösungen x_1 und x_2, dass

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 x_2 = q$$

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bisher haben wir folgende Probleme betrachtet:

- Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Differenzieren), oder
- Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ (Integrieren).

Nun suchen wir Lösungen einer ähnlichen Gleichung, bei der aber die Lösung selber Argument der Funktion auf der rechten Seite ist.
Solche Probleme treten in vielen Anwendungen auf. Ein sehr einfaches Beispiel sind Populationsmodelle. Sei $y(t)$ die Dichte eines bestimmten Bakteriums in einem Reagenzglas. Dann ist $y'(t)$ die zeitliche Veränderung dieser Dichte und $\frac{y'(t)}{y(t)}$ die relative Änderung der Dichte. Nun ist unter optimaler Nährstoffzufuhr die Wachstumsrate der Bakterienpopulation gemessen als diese relative Änderung konstant. Damit erhalten wir das Gesetz $\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha$ für eine Konstante $\alpha > 0$, oder anders geschrieben

$$y'(t) = \alpha y(t)\,.$$

Offensichtlich erfüllt die Funktion $y(t) = e^{\alpha t} y_0$ diese Gleichung, wie man durch Nachrechnen sieht. Ferner ist $y(0) = e^{\alpha 0} y_0 = y_0$ der Anfangswert der Dichte zur Zeit $t = 0$.

10.1 Typen von Differentialgleichungsproblemen

Betrachten wir folgendes Problem; zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suche Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$y'(t) = f(t, y(t)) \left(\dot{y} = \frac{d}{dt} y = f(t, y) \right).$$

Man bezeichnet dies als eine (skalare) Differentialgleichung erster Ordnung, da in der Gleichung nur erste Ableitungen der Funktion y auftreten.

Beispiele 10.1 *(Einfache Differentialgleichungen)*

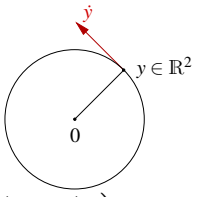
- $\dot{y}(t) = f(t) \Rightarrow y(t) = \int_0^t f(s)\,ds + C$ *(bis auf Konstante bestimmt)*
- $\dot{y}(t) = y(t) \Rightarrow y(t) = \exp(t + C)$
- $\dot{y}(t) = \sqrt{1 - (y(t))^2} \Rightarrow y(t) = \sin(t + c)$

Verallgemeinerungen:

Systeme von Differentialgleichungen Gesucht ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so dass für gegebenes $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\dot{y} = f(t,y) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,y_1,...,y_n) \\ \vdots \\ f_n(t,y_1,...,y_n) \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.2



$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(t,y)$$

$y(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t+C) \\ r\sin(t+C) \end{pmatrix}$ *Kreisbahn mit Radius r.*

$$\begin{aligned} \underline{\textit{Beachte:}} \quad \|y(t)\| = \tilde{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \|y(t)\|^2 = \tilde{C}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\|y(t)\|^2}_{y(t)\cdot y(t)} = 0 \quad &\overset{\textit{Produktregel}}{\Leftrightarrow} \quad 2\dot{y}(t)\cdot y(t) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage weist man nach durch Einsetzen der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung sagt aus, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{y}$ senkrecht auf dem Positionsvektor steht und schließlich tangential an der Kreisbahn anliegt.

Beispiel 10.3 *Betrachten wir nun die Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} x$$

für eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $x(0) = (1,0)^T$. Man rechnet in diesem Fall nach, dass

$$x(t) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

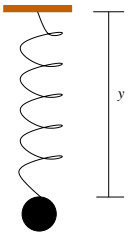
diese Gleichung erfüllt und konsistent zu den Anfangsdaten ist. Diese Kurve beschreibt eine Spirallinien, die für $\alpha > 0$ nach außen dreht für $t \to \infty$ und für $\alpha < 0$ nach innen. Die Geschwindigkeitskomponente $(-x_2, x_1)^T$ steht dabei für die Drehung wie in obigem Beispiel und die Komponente αx für die Bewegung nach außen oder innen. Diese beiden Geschwindigkeiten überlagern sich hier und führen dann zu der Spiralkurve.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und gesucht eine Funktion y mit

$$y^{(n)} = f(t,y,y',y'',...,y^{(n-1)}).$$

Beispiel 10.4



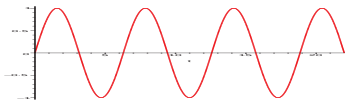
Situation: Feder mit Auslenkung y.

Beschleunigung $\ddot{y}(=y'')$ ist proportional zur Auslenkung:

$F = -Dy$ *(Hookesches Gesetz)*

$F = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{D}{m}y = -Cy$

Es ergibt sich: $\quad y(t) = \alpha\sin(\sqrt{C}t) + \beta\cos(\sqrt{C}t)$



Schwingung (ungedämpft)

Ein ähnliches Beispiel finden Sie auch in Aufgabe 10.9.

Bemerkung 10.5 *Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen:*

$$\textit{Gegeben:} \quad y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', .., y^{(n-1)}\right)$$

Führe neue Unbekannte ein $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

$$\textit{mit der Maßgabe} \quad \left.\begin{array}{rcl} z_0 & = & y \\ z_1 & = & y' \\ z_2 & = & y'' \\ & \vdots & \\ z_{n-1} & = & y^{(n-1)} \end{array}\right\} \overset{\textit{Ableiten}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{rcl} z_0' & = & z_1 \\ z_1' & = & z_2 \\ & \vdots & \\ z_{n-2}' & = & z_{n-1} \\ z_{n-1}'(=y^{(n)}) & = & f(t, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \end{array}$$

Definiere nun $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *mit*

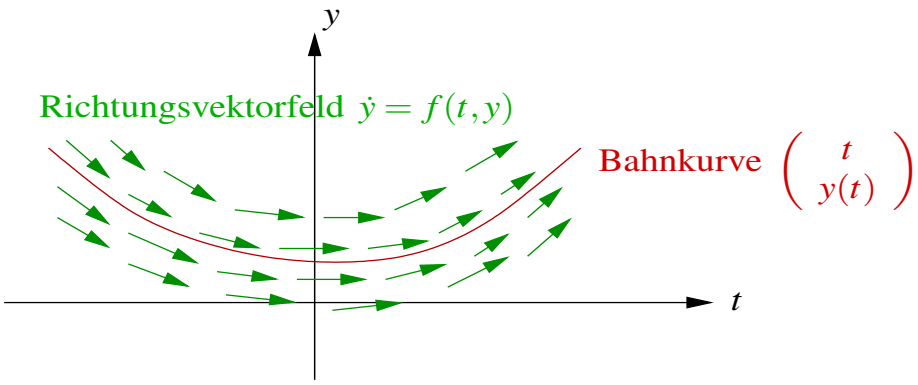
$$\left.\begin{array}{rcl} g_1(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) & = & z_1 \\ g_2(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) & = & z_2 \\ & \vdots & \\ g_{n-1}(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) & = & z_{n-1} \\ g_n(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) & = & f(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \textit{Differentialgleichungssystem:} \quad \dot{z} = g(t, z)$$

Beispiel 10.6

$$\ddot{y} = -y \overset{z_0 = y,\ z_1 = \dot{y}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \dot{z}_0 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -z_0 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung: $y(t) = \sin(t), \quad z(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \left[\textit{vgl. Bsp. 10.2:} \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}\right]$

Geometrische Interpretation. *Wir suchen Familien von Bahnkurven die durch die Differentialgleichung beschrieben werden. Aus diesen wählen wir durch Anfangswerte eine bestimmte Kurve aus:*



10.2 Anfangswertprobleme

Um die Lösung eindeutig zu bestimmen fehlen uns noch Anfangswerte zu einer vorgegebenen Zeit:

(P) Anfangswertproblem

Gegeben $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$, gesucht $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\dot{y} = f(t,y)$$

und $y(t_0) = y_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen 10.7 (Zusammenhang mit der Integration)

- *Falls f stetig ist, so löst eine stetige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem* **(P)** *genau dann, wenn*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds. \qquad \textit{(komponentenweise)}$$

Hierzu: *Für die die Integralgleichung erhält man durch Differenzieren*

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds\right) \overset{Hauptsatz}{=} 0 + f(t,y(t))\,.$$

Dabei folgt die Differenzierbarkeit von y folgt ebenfalls aus dem Hauptsatz (da f und y stetig), die Anfangswerte sind offensichtlich erfüllt. Umgekehrt erhält man die Integralgleichung aus dem Anfangswertproblem durch Aufintegration.

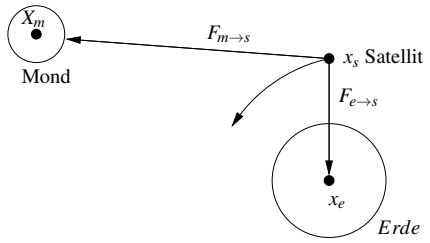
- **Anfangswerte bei Differentialgleichungen höherer Ordnung:**

  Entsprechend dem oben eingeführten äquivalenten Differentialgleichungssystems

  $$z_0, \ldots, z_{n-1} \leftrightarrow y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$$

  sind Anfangwerte für die ersten $n-1$ Ableitungen vorzugeben.

Beispiel 10.8 (System höherer Ordnung) *(vgl. Motivationskapitel 0.5)*
Satellitenbewegung:



Hierbei sind: M_e *Erdmasse*
M_m *Mondmasse*
M_s *Satellitenmasse*

Ferner: $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\, s^3}\right]$
Gravitationskonstante

Graviationskräfte:

$$\begin{aligned} F_{e\to s} &= G\frac{M_e M_s}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) \\ F_{m\to s} &= G\frac{M_m M_s}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s) \end{aligned}$$

Basierend auf dem Gesetz der trägen Masse (Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung) und der Superposition der Kräfte ergibt sich:

$$F_{e\to s} + F_{m\to s} = M_s \ddot{x}_s$$

Hieraus folgt dann direkt die Differentialgleichung für die Position des Satelliten:

$$\ddot{x}_s = G\left(\frac{M_e}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) + \frac{M_m}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s)\right)$$

Notieren wir $y := x_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $f(t,y) = f(y)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(y) := G(\frac{M_e}{\|x_e - y\|^3}(x_e - y) + \frac{M_m}{\|x_m - y\|^3}(x_m - y))$ so erhalten wir wieder den allgemeinen Typ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(t,y)$ mit

Anfangswerten: $y(0)$ *Anfangsposition*
$\dot{y}(0)$ *Anfangsgeschwindigkeit*

Weitere Betrachtungen für ein vereinfachtes System (ohne Mond) finden Sie in Übung 10.10. Ein anderes Beispiel finden Sie auch in Aufgabe 10.1.
Für die Formulierung eines Existenzsatzes brauchen wir nun einen schärferen Begriff von Stetigkeit, den wir an dieser Stelle anführen wollen:

Definition 10.9 (Lipschitz-Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt* Lipschitz-stetig, *falls es eine Konstante L (die Lipschitzkonstante) gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{D}$*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Bemerkungen 10.10 (Eigenschaften von Lipschitz stetigen Funktionen)

- *Lipschitz stetige Funktionen sind stetig.*
- *f heißt* lokal Lipschitz-stetig, *falls es zu jedem $x \in D$ eine Umgebung gibt, in der f Lipschitz-stetig ist.*
- *f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f lokal Lipschitz-stetig.*

$$\underline{\textit{hierzu:}} \quad \|f(y)-f(x)\| = \|f(x+t(y-x))|_{t=0}^{t=1}\| \overset{Hauptsatz}{=} \|\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+t(y-x))\,dt\|$$

$$= \quad \|\int_0^1 \underbrace{Df(x+t(y-x))}_{\substack{\in \mathbb{R}^{m,n},\ \textit{stetig und damit} \\ \textit{komponentenweise beschränkt}}} dt\,(y-x)\| \le L\|y-x\|$$

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: \qquad \|f(y)-f(x)\| \le \underbrace{\max_{\substack{y \in \textit{abgeschl.} \\ \textit{Umgebung}}} \|\operatorname{grad} f(y)\|}_{=:L} \|y-x\|$$

- *Affine Funktionen sind Lipschitz-stetig.*
- *$f(x) = \sqrt{x}$ ist in keiner Umgebung um $x = 0$ lokal Lipschitz-stetig:*

$$|f(y)-f(0)| = |\sqrt{y}-0| = |\sqrt{y}| = \frac{1}{|\sqrt{y}|}|y| = \frac{1}{|\sqrt{y}|}|y-0|$$

Die Lipschitz-Konstante müsste also das Maximum von $\frac{1}{|\sqrt{y}|}$ auf einem Intervall $[0,\varepsilon]$ sein. Aber für kleine y wird $\frac{1}{|\sqrt{y}|}$ beliebig groß.

In Aufgabe 10.8 zeigen Sie, dass eine Funktion lokal Lipschitz-stetig ist.

Satz 10.11 (Picard-Lindelöf, Existenz und Eindeutigkeit) *Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,y) \mapsto f(t,y)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in y in einer Umgebung um y_0, dann existieren zu Anfangsdaten y_0 zur Zeit t_0 ein Zeitintervall $I = (t_0-\delta, t_0+\delta)$ und eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems:*

$$\dot{y} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

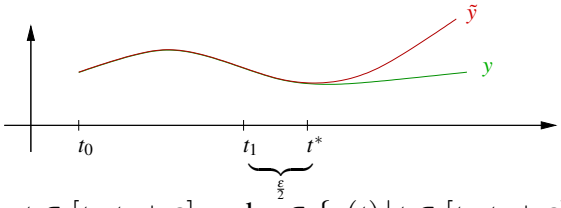
Lösungen des Anfangswertproblems sind eindeutig.

Beweis: [Eindeutigkeit]

Seien $y, \tilde{y}$ zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems und sei

$$t^* := \sup\{t \,|\, y(t) = \tilde{y}(t)\} \ge t_0\,.$$

Betrachte nun für ε klein genug (später zu quantifizieren) $t_1 = t^* - \frac{\varepsilon}{2}$ und das Intervall $I = [t_1, t_1 + \varepsilon]$.



L sei die Lipschitzkonstante von $f(t,\cdot)$ für $t \in [t_1, t_1+\varepsilon]$ und $y \in \{y(t) \,|\, t \in [t_1, t_1+\varepsilon]\} \cup \{\tilde{y}(t) \,|\, t \in [t_1, t_1+\varepsilon]\}$. Dabei sei ε so klein gewählt, dass f dort Lipschitz-stetig ist; wird ε noch weiter verkleinert so bleibt dieselbe Lipschitz-Konstante L gültig.

$$\begin{aligned}
\text{Nun gilt:} \quad y(t) &= y(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))\, ds \\
\tilde{y}(t) &= \tilde{y}(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \tilde{y}(s))\, ds \\
\text{Subtrahiere:} \quad y(t) - \tilde{y}(t) &= 0 + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\, ds \\
\Rightarrow \|y(t) - \tilde{y}(t)\| &\leq \int_{t_1}^{t} \underbrace{\|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\|}_{\overset{Vor.}{\leq} L\|y(s)-\tilde{y}(s)\| \quad \text{für } t\in[t_1,t_1+\varepsilon]} \, ds \\
\text{Definiere } M_\varepsilon &:= \max_{s \in [t_1, t_1+\varepsilon]} \|y(s) - \tilde{y}(s)\| \\
\Rightarrow \|y(t) - \tilde{y}(t)\| &\leq \int_{t_1}^{t} L M_\varepsilon \, ds \overset{t\in[t_1,t_1+\varepsilon]}{\leq} \varepsilon L M_\varepsilon
\end{aligned}$$

Da für ein $T \in [t_1, t_1+\varepsilon]$ gilt, dass $\|y(T) - \tilde{y}(T)\| = M_\varepsilon$, erhalten wir

$$M_\varepsilon \leq \varepsilon L M_\varepsilon.$$

Nun wähle $\varepsilon \leq \frac{1}{2L} \Rightarrow M_\varepsilon \leq \frac{1}{2} M_\varepsilon \Rightarrow M_\varepsilon = 0$. Daraus folgt aber $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in I = [t_1, t_1+\varepsilon]$ im Widerspruch zur Definition von t^*.

Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems nachgewiesen.

[Existenz]

Betrachten wir folgenden Ansatz: y ist dann Lösung des Anfangswertproblems, wenn

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \qquad \text{für alle } t \text{ im Lösungsintervall } I.$$

Hieraus macht man nun ein iteratives Verfahren:

> Gegeben eine „approximative Lösung“ $y^k : I \to \mathbb{R}^n$, dann definieren wir eine „verbesserte“ Lösung
>
> $$y^{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^k(s))\, ds, \qquad y^0(t) = y_0.$$

Betrachten wir als Einschub im Beweis hierzu ein Beispiel:

Beispiel 10.12

Anfangswertproblem: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gesucht mit* $y(0) = 1$ *und* $\dot{y} = y$ *auf* $\mathbb{R}$ *(d.h.* $f(t,y) = y$*).*

$$\begin{aligned}
y^0(t) &= 1 \\
y^1(t) &= 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t \\
y^2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + \left[s + \frac{s^2}{2}\right]_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
y^3(t) &= 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{s^2}{2}\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \\
&\vdots \\
y^k(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^k}{k!} \\
y^{k+1}(t) &= 1 + \int_0^t y^k(s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Dies führt aber auf die Exponentialreihe exp und wir sehen $y^k \longrightarrow \exp$ *in dem Sinne, dass*

$$\|y^k - \exp\|_{\infty,I} := \sup_{t \in I} \|y^k(t) - \exp(t)\| \longrightarrow 0$$

für jedes Zeitintervall $I = [-T,T]$ *und jedes* $T \in \mathbb{R}$*. Offensichtlich löst* $y(t) = \exp(t)$ *das Anfangswertproblem.*

Weitere Beispiele finden Sie in den Übungen 10.4 und 10.13.
Nun fahren wir fort im Beweis:
Wir wollen obiges Iterationsverfahren zur Konstruktion von Lösungen verwenden:
Wähle $R > 0$ fest und definiere:

$$\begin{aligned}
D_R &:= \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \le R,\ \|y - y_0\| \le R\} \\
&\quad \text{(Wähle } R \text{ so klein, dass } f \text{ auf } D_R \text{ Lipschitz-stetig ist.} \\
&\quad \text{Wenn } f \text{ nicht global definiert ist, liegt für } R \text{ klein genug } D_R \text{ immer im} \\
&\quad \text{Definitionsbereich von } f.\text{)} \\
M &:= \max_{(t,y) \in D_R} \|f(t,y)\| \\
L &\quad \text{Lipschitz-Konstante von } f \text{ auf } D_R \\
\varepsilon &:= \min\left\{R, \frac{R}{M}\right\}, \qquad I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass für $y^0(t) \equiv y_0$ die Folge von Funktionen

$$(*) \quad y^{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^k(s))\, ds$$

wohldefiniert ist und y^k gegen eine Funktion y konvergiert, für die gilt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Damit ist dann diese Funktion Lösung des Anfangswertproblems und der Existenzbeweis ist geführt. Die Konvergenz ist hier als gleichmäßige Konvergenz zu verstehen, d.h.

$$y^k \xrightarrow{glm.} y \quad \text{auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad \sup_{t \in I} \|y^k(t) - y(t)\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Zunächst zeigen wir, dass die Funktionen, die in $(*)$ definiert werden, wohldefiniert sind:

$$\begin{aligned}
\text{Falls } \|y^k - y_0\|_{\infty,I} &\leq R, \text{ folgt} \\
\|y^{k+1}(t) - y_0\| &\leq \|y_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^k(s))\, ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s, y^k(s))\|}_{\leq M}\, ds \leq \varepsilon M \overset{\text{Def. von } \varepsilon}{\leq} R.
\end{aligned}$$

D.h. $(t, y^k(t)) \in D_R \Rightarrow (t, y^{k+1}(t)) \in D_R$. Wir bleiben also in D_R, insbesondere ist f dort Lipschitz-stetig.

Nun zeigen wir per Induktion:

$$\|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \text{für alle } t \in I,$$

wobei L die Lipschitzkonstante zu f auf dem Definitionsbereich D_R ist.

$$\begin{aligned}
\text{Hierzu: } \boxed{k = 0} \quad \|y^1(t) - y^0(t)\| &= \|y_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_0)\|\, ds \leq M(t - t_0) \\
\boxed{k - 1 \rightsquigarrow k} \quad \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(s, y^k(s)) - f(s, y^{k-1}(s))\, ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s, y^k(s)) - f(s, y^{k-1}(s))\|}_{\leq L\|y^k(s) - y^{k-1}(s)\|}\, ds \\
&\overset{\substack{\text{Induktions-}\\ \text{annahme}}}{\leq} \int_{t_0}^{t} LML^{k-1} \frac{|s - t_0|^k}{k!}\, ds \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Dies gilt zunächst für $t > t_0$. Diese Ordnung haben wir aber eigentlich gar nicht verwendet. Also gilt dies auch für $t < t_0$. Weiterhin betrachten wir nun

$$\begin{aligned} y^k &= (y^k - y^{k-1}) + (y^{k-1} - y^{k-2}) + \ldots + (y^1 - y^0) + y^0 \\ &= y^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (y^{j+1} - y^j) \end{aligned}$$

Diese Reihe hat nach obiger Argumentation eine Majorante:

$$\begin{aligned} Y^k(t) &:= \|y^0\| + \sum_{j=0}^{k-1} ML^j \frac{|t-t_0|^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= \|y^0\| + \frac{M}{L} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(L|t-t_0|)^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= \|y^0\| + \frac{M}{L} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{(L|t-t_0|)^j}{j!}}_{S_k} - \frac{M}{L} \end{aligned}$$

Hierbei sind S_k die Partialsummen zu $\exp(L|t-t_0|)$. Diese konvergieren für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $\exp(L|t-t_0|)$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die Reihe $y^k(t)$ für alle $t \in I$ gegen ein $y(t) \in \mathbb{R}$. Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist stetig, denn

$$\|y(t) - y(\tilde{t})\| \leq \| \underbrace{y(t) - y^k(t)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k \geq N_\varepsilon} \| + \| \underbrace{y^k(t) - y^k(\tilde{t})}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ unabh. von } k \\ \text{wenn } |t-\tilde{t}| < \delta}} \| + \| \underbrace{y^k(\tilde{t}) - y(\tilde{t})}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k \geq N_\varepsilon} \|.$$

Dass der zweite Summand tatsächlich unabhängig von k klein wird, sieht man wie folgt:

$$\|y^k(t) - y^k(\tilde{t})\| = \| \int_{\tilde{t}}^{t} f(s, y^{k-1}(s))\, ds \| \leq M|t-\tilde{t}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } |t-\tilde{t}| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

Damit folgt:

$$y(t) \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} y^{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, \overbrace{y^k(s)}^{\to y(s)})}_{\longrightarrow f(s,y(s))}\, ds$$

D.h. es ist $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$, und damit löst y das Anfangswertproblem.

□

Beispiele hierzu finden Sie auch in Aufgabe 10.6.

Beispiel 10.13 (Lineares Differentialgleichungssystem)

Anfangswertproblem: $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *gesucht mit*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay\,, \textit{wobei } A \in \mathbb{R}^{n,n}, \\ y(t_0) &= y_0\,, \textit{wobei } y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Das Iterationsverfahren liefert uns:

$$\begin{aligned} y^0(t) &\equiv y_0 \\ y^1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} Ay_0\,ds = y_0 + A(t-t_0)y_0 \\ y^2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} A(y_0 + A(s-t_0)y_0)\,ds \qquad (\textit{vgl. Bsp. 10.12 im Beweis}) \\ &= y_0 + \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} A + A^2(s-t_0)\,ds\right)}_{\in\mathbb{R}^{n,n}} y_0 \\ &= \left(\mathbb{1} + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2}\right) y_0 \\ &\vdots \\ y^k(t) &= \underbrace{\left(\mathbb{1} + A(t-t_0) + \frac{(A(t-t_0))^2}{2!} + \ldots + \frac{(A(t-t_0))^k}{k!}\right)}_{\in\mathbb{R}^{n,n}} y_0 \end{aligned}$$

Diese Reihe von Matrizen ist eine Cauchy-Folge, d.h. für $m < k$ konvergiert

$$\begin{aligned} \|y^k - y^m\| &= \left\| \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{A^j (t-t_0)^j}{j!} \right) y_0 \right\| \\ &\leq \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{\|A^j\| |t-t_0|^j}{j!} \right) \|y_0\| \\ &\leq \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{C^j \|A\|^j |t-t_0|^j}{j!} \right) \|y_0\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k,m \to \infty$ und eine Konstante C, die in der Abschätzung $\|AB\| \leq C\|A\|\,\|B\|$ für $n \times n$ Matrizen A, B mit $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1,\ldots,n} A_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ auftritt. In dieser Kette von Abschätzungen haben wir die Dreiecksungleichung und das Majorantenkriterium verwendet. Letzteres durch Ausnutzung der Tatsache, dass wir bereits wissen, dass die Exponentialreihe für die reelle Zahl $C\|A\||t-t_0|$ konvergiert. Dies ist die gleiche Argumentation, wie auch schon in obigem Existenzbeweis. Mit der Definition

$$(e^B =)\exp(B) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

für Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ erhalten wir für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \exp(A(t-t_0))y_0$$

$\boxed{n=1}$ $y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$ *ist offensichtlich Lösung des Anfangswertproblems.*

Frage: Wie berechnet man $e^{(t-t_0)A}$?

spezieller Fall: (A ist Diagonalmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{A(t-t_0)} = \exp A(t-t_0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Im allgemeineren Fall mit diagonalisierbarer Matrix A:

Falls $A = BDB^{-1}$ für eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B, so folgt mit $A^k = BD^kB^{-1}$:

$$\exp(A(t-t_0)) = B\exp((t-t_0)D)B^{-1},$$

$$\text{mit} \quad \exp((t-t_0)D) = \begin{pmatrix} \exp((t-t_0)\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp((t-t_0)\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.14 *Wir betrachten wieder die Differentialgleichung*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \qquad \textit{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. Beispiel 10.2). Nach der Überlegung in Beispiel 10.13 ist also $y(t) = \exp(At)y(0)$. Um $\exp(At)$ zu berechnen, diagonalisieren wir A:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i \qquad \Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} v^{(1)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad v^{(1)} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\},$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} v^{(2)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v^{(2)} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ergibt sich

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(it) & \exp(-it) \\ -i\exp(it) & i\exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(it) + \exp(-it) & i(\exp(it) - \exp(-it)) \\ i(\exp(-it) - \exp(it)) & -i^2(\exp(it) + \exp(-it)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) + \cos(t) - i\sin(t) & i\cos(t) - \sin(t) - i\cos(t) - \sin(t) \\ i\cos(t) + \sin(t) - i\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) + i\sin(t) + \cos(t) - i\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit dem Startwert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich also z.B. die Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Notation 10.15 *Die Aufgabe eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zu finden, die Lösung der Gleichung*

$$y = F[y]$$

ist, mit

$$F[y] = t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

nennt man eine Fixpunktaufgabe *und die Lösung einen* Fixpunkt.

Explizite Lösungsmethoden für Differentialgleichungen:

Separation der Variablen: $\dot{y} = f(t)g(y)$

Formale Herleitung:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \rightsquigarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(t)dt \rightsquigarrow \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})}\,d\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

Mit $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})}\,d\tilde{y}, F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$ (Stammfunktionen) folgt:

$$G(y(t)) = F(t) \quad \overset{\text{falls } G^{-1} \text{ existiert}}{\longrightarrow} \quad y(t) = G^{-1}(F(t))$$

Satz 10.16 *Seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf Intervallen I bzw. J, $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J, t_0 \in I, y_0 \in J$. Ferner sei F die Stammfunktion von f mit $F(t_0) = 0$ und G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ mit $G(y_0) = 0$ und $F(I) \subset G(J)$, dann gibt es genau eine Lösung*

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems $\dot{y} = f(t)g(y), y(t_0) = y_0$ mit $y(I) \subset J$ und die Lösung genügt der Beziehung

$$G(y(t)) = F(t) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis:

(i) Sei $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = f(t)g(y(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{y}(s)}{g(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \\ &\qquad \text{Substitution } \tilde{y} = y(s) : \frac{d\tilde{y}}{ds} = \dot{y} \Rightarrow d\tilde{y} = \dot{y}\,ds \\ &\Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = G(y(t)) = F(t). \end{aligned}$$

Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ ist, ist G streng monoton. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (S. 59) existiert G^{-1} und es ist $y(t) = G^{-1}(F(t))$. Damit folgt bereits, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist.

(ii) Zu zeigen bleibt, dass $y(t) = G^{-1}(F(t))$ das AWP löst:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= G^{-1}(F(t_0)) = G^{-1}(0) \overset{G(y_0)=0}{=} y_0 \\ G(y(t)) &= F(t) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \frac{1}{g(y(t))}\dot{y} = f(t) \Rightarrow \dot{y} = f(t)g(y) \end{aligned}$$

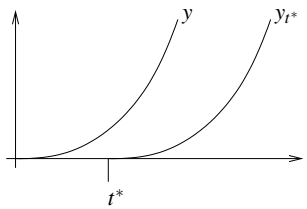
□

Beispiele 10.17 *(i)* $\boxed{\dot{y} = \sqrt{y}, y(0) = 0}$ *(nicht Lipschitz-stetige rechte Seite)*

$\Rightarrow g(y) = \sqrt{y}, f(t) = 1, t_0 = 0, y_0 = 0$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \tilde{y}^{-\frac{1}{2}}\, d\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} ds \Rightarrow \left[2\sqrt{\tilde{y}}\right]_{y_0}^{y(t)} = (t - t_0) \Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{t - t_0}{2} + \sqrt{y(t_0)}$$
$$\Rightarrow y(t) = \left(\tfrac{t-t_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2 \overset{y(0)=0}{=} \tfrac{t^2}{4}$$

<u>Achtung:</u> *y ist nicht eindeutige Lösung ($g(0) = 0 \rightsquigarrow$ Voraussetzungen verletzt)*

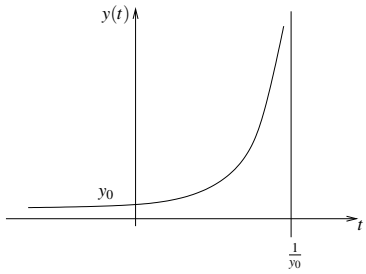


$$y_{t^*}(t) = \begin{cases} 0 & ; t < t^* \\ \frac{(t-t^*)^2}{4} & ; t \geq t^* \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *keine Eindeutigkeit (Schar von Lösungen): y_{t^*} ebenfalls Lösung für alle $t^* \in \mathbb{R}$*

(ii) $\boxed{\dot{y} = y^2, y(0) = y_0 > 0} \Rightarrow g(y) = y^2, f(t) = 1, t_0 = 0$

$$„\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} ds“ \Rightarrow \left[-\frac{1}{\tilde{y}}\right]_{y_0}^{y(t)} = t - 0 \Rightarrow -\frac{1}{y(t)} = t - \frac{1}{y_0} \Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{y_0} - t\right)^{-1}$$



(keine globale Lösung, da nicht global, sondern lokal Lipschitz-stetig).

(iii) $\boxed{\dot{y} = \sqrt{1-y^2}, y(0) = y_0 \in [-1,1]} \Rightarrow g(y) = \sqrt{1-y^2}, f(t) = 1$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{y}^2}}\, d\tilde{y} = t \quad \overset{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ (S.212)}{\Rightarrow} \quad \arcsin(y) = t + \arcsin(y_0)$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \sin\left(t + \arcsin(y_0)\right)$$

Weitere Beispiele finden Sie auch in den Aufgaben 10.2 und 10.5.
Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen:

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a(t)y + b(t) \qquad \text{, wobei } a : I \longrightarrow \mathbb{R}, b : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst die homogene Differentialgleichung ($b \equiv 0$) $\dot{y} = a(t)y$ mit den Anfangswerten $y(t_0) = y_0$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die Lösung eindeutig.

Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) y_0, \\ \text{denn} \qquad \dot{y} &= a(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) y_0, \\ \text{und} \qquad y(0) &= \exp(0)y_0 = y_0. \end{aligned}$$

Beispiel 10.18 $a(t) \equiv a \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0$

Ein weiteres Beispiel finden Sie auch in Aufgabe 10.3.
Nun betrachten wir den allgemeineren Fall:

$$\dot{y} = a(t)y + b(t)$$

Sei $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \qquad \text{mit } x(t_0) = 1$$

Da $x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \Rightarrow x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Die Lösung des inhomogenen Problems lässt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)w(t) \\ \Rightarrow \dot{y}(t) &= \dot{x}(t)w(t) + x(t)\dot{w}(t) \\ &= a(t)\underbrace{x(t)w(t)}_{=y(t)} + x(t)\dot{w}(t). \end{aligned}$$

D.h. $y(t)$ ist Lösung der Differentialgleichung, falls

$$x(t)\dot{w}(t) = b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{w}(t) = \frac{b(t)}{x(t)} \quad \Leftrightarrow \quad w(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x(s)}\,ds + c.$$

Wählen wir $c = y_0$, dann erhalten wir

$$y(t) = x(t)\left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x(s)}\,ds + y_0\right) \qquad \text{mit} \qquad y(t_0) = y_0,$$

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr\right) y_0 + \underbrace{\underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr\right)}_{\text{unabhängig von } s} \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr\right) b(s)\,ds}_{\int_{t_0}^{t} \exp\left(\underbrace{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr - \int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}_{\int_s^t a(r)\,dr}\right) b(s)\,ds}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr\right) y_0}_{=:y^I} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} a(r)\,dr\right) b(s)\,ds}_{=:y^{II}}$$

I: **Lösung von:** $\dot{y} = a(t)y, y(t_0) = y_0$

II: **Lösung von:** $\dot{y} = a(t)y + b(t), y(t_0) = 0$

I: homogene Differentialgleichung ($b \equiv 0$),
inhomogene Anfangswerte ($y(t_0) = y_0$).

II: inhomogene Differentialgleichung ($b(t) \neq 0$ im Allgemeinen),
homogene Anfangswerte ($y(t_0) = 0$).

$y^{II}(t_0) = 0 \quad \checkmark$

$$\dot{y}^{II} = \underbrace{\underbrace{\exp\left(\int_t^t a(r)\,dr\right)}_{\exp 0 = 1} b(t)}_{\text{äußere Ableitung RS}} + \underbrace{\underbrace{\int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r)\,dr\right) a(t)b(s)\,ds}_{a(t)y^{II}}}_{\text{innere Ableitung RS}}$$

Die Regel, nach der man die Ableitung von y^{II} berechnet, finden Sie im kommenden Kapitel in Satz 11.10.

Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(y^I + y^{II}\right) &= a(t)y^I + \left(a(t)y^{II} + b(t)\right) \\
&= a(t)\left(y^I + y^{II}\right) + b(t) \\
\left(y^I + y^{II}\right)(t_0) &= y^I(t_0) + y^{II}(t_0) = 0 + y_0 = y_0 \\
&\quad \text{(Hier geht die Linearität der Gleichung ein.)}
\end{aligned}$$

Insgesamt geht man also folgendermaßen vor: Wir suchen die Lösung von

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t) \qquad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0\,.$$

zunächst betrachten wir die zugehörige homogene Gleichung mit Anfangswert 1,

$$\dot{x}(t) = a(t)y(t) \qquad \text{mit} \quad x(t_0) = 1\,.$$

Diese hat die Lösung

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right).$$

Nun machen wir den Ansatz $y(t) = w(t)x(t)$ und erhalten daraus für w die Differentialgleichung

$$\dot{w}(t) = \frac{b(t)}{x(t)} \qquad \text{mit} \quad w(t_0) = y_0\,.$$

Daraus ergibt sich

$$w(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{x(s)}\,ds + y_0$$

und durch Multiplikation von w und x schließlich die gesuchte Funktion y.

Beispiel 10.19 $\dot{y} = 2ty + t^3, y(0) = y_0$

Homogene Gleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = 2t\,x(t),\, x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) &= e^{t^2} \\
\Rightarrow \quad y(t) &= e^{t^2}\left(y_0 + \underbrace{\int_0^t e^{-s^2} s^3\, ds}_{= \left[-\frac{s^2+1}{2} e^{-s^2}\right]_0^t}\right) \\
&= e^{t^2}\left(y_0 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{t^2+1}{2} e^{-t^2}\right)\right) \\
&= e^{t^2}\left(y_0 + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{t^2+1}{2}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals verwendet man zunächst die Substitution $z = s^2$ und anschließend partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int e^{-s^2} s^3\, ds &= \frac{1}{2}\int e^{-z} z\, dz \qquad\qquad \textit{Substitution } z = s^2, \quad dz = 2s\, ds \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int -e^{-z} 1\, dz + (-e^{-z} z)\right) \\
&= -\frac{1}{2}(z+1)e^{-z} = -\frac{s^2+1}{2} e^{-s^2}
\end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich

$$\begin{aligned}
y^I(t) &= e^{t^2} y_0, \\
y^{II}(t) &= \frac{1}{2} e^{t^2} - \frac{t^2+1}{2}.
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele finden Sie auch in Aufgabe 10.7 und 10.12.

10.3 Flußformulierung und numerische Approximation

Betrachten wir ein Anfangswertproblem:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\
y(t_0) &= y_0
\end{aligned}\right\} \text{Lösung } y(t)$$

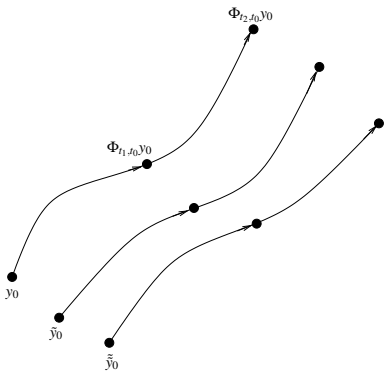
Notation 10.20 *Wir schreiben auch*

$$\Phi_{t,t_0}(y_0) := y(t)\,,$$

und wir bezeichnen dies als den Fluß zur Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ von t_0 nach t mit Anfangswerten y_0 bei t_0.

Nun ergibt sich das folgenden Fortsetzungsprinzip:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_{t_2,t_1} & \circ & \Phi_{t_1,t_0}(y_0) & = & \Phi_{t_2,t_0}(y_0) \\ y(t_2): \begin{smallmatrix} \dot{y}(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_1)=y(t_1) \end{smallmatrix} & & y(t_1): \begin{smallmatrix} \dot{y}(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{smallmatrix} & & y(t_2): \begin{smallmatrix} \dot{y}(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{smallmatrix} \end{array}$$



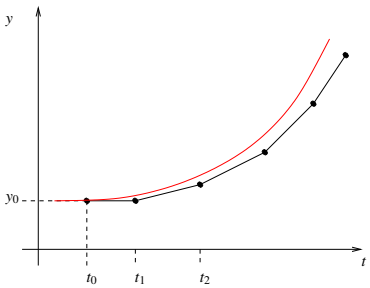
$\Phi_{t,t}(y) = y$ (identische Abbildung)

$\dot{y} = f(y)$ (autonome Differentialgleichung)
$\Rightarrow \Phi_{s+t,s} = \Phi_{t,0}$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \dot{y}(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y \end{array}}_{\Phi_{t,0}(y)} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{c} \dot{y}(t+s) = f(y(t+s)) \\ y(s) = y \end{array}}_{\Phi_{s+t,s}(y)}$$

Wenden wir uns jetzt der numerischen Approximation zu: statt $\Phi_{t+\tau,t}$ suchen wir ein (einfach) zu berechnendes $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}$ mit Zeitschrittweite τ (numerischer Fluss).

Das Eulersche Polygonzugverfahren:



$$\Phi_{t,t_0}y_0 \approx \underbrace{y_0 + (t-t_0)f(t_0,y_0)}_{=:\hat{\Phi}_{t,t_0}y_0}$$

(numerischer Fluss)

<u>Iteration:</u>

$$\begin{array}{ll} t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T & \\ y_{i+1} = \underbrace{y_i + (t_{i+1}-t_i)f(t_i,y_i)}_{\hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i)}, & t_{i+1} - t_i = \tau_i \quad \text{Zeitschritt.} \end{array}$$

<u>in Flussnotation:</u> $y_{i+1} = \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i)$

Welchen Fehler macht man in einem Schritt?

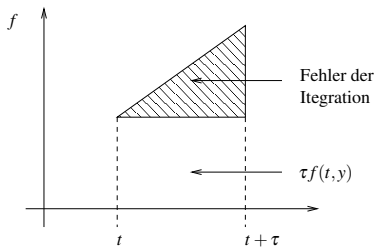
$$||\Phi_{t+\tau,t}(y) - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y)|| = ||y(t+\tau) - (y(t) + \tau f(t, y(t)))||$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \left|\left|\int_t^{t+\tau} \dot{y}(s)\,ds - \tau f(t,y(t))\right|\right| = \underbrace{\left|\left|\int_t^{t+\tau} f(s,y(s))\,ds - \underbrace{\tau f(t,y(t))}_{(*)}\right|\right|}_{\text{Integrationsfehler}}$$

$(*)$: Quadraturformel mit einem Knoten am linken Intervallrand

$$\leq C\tau^2 \max_{s\in[0,\tau]} \left|\left|\frac{d}{ds} f(t+s, y(t+s))\right|\right|$$

$$\leq \quad C\tau^2 \max_{\substack{s\in[0,\tau]\\ y\in\mathbb{R}^n}} \left|\left|\partial_s f(t+s,y) + \underbrace{D_y f(t+s,y)}_{\text{Jacobi-Matrix}} \underbrace{f(t+s,y)}_{\dot{y}(t+s)}\right|\right|$$



Man sagt: Das Eulersche Polygonzugverfahren ist von 1. Ordnung konsistent, da

$$\left|\left|\Phi_{t+\tau,t}y - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}y\right|\right| = O(\tau^{p+1}) \qquad \text{für } p = 1.$$

Erinnerung: Das numerische Ergebnis zur Zeit $t_m = T$ erhält man durch Hintereinanderschalten:

$$\hat{\Phi}_{\underbrace{t_{m-1}+\tau_m}_{=t_m}, t_{m-1}} \circ \hat{\Phi}_{\underbrace{t_{m-2}+\tau_{m-1}}_{=t_{m-1}}, t_{m-2}} \circ \ldots \circ \hat{\Phi}_{\underbrace{t_0+\tau_1}_{=t_1}, t_0} y_0$$

Bemerkung 10.21 *Ähnlich wie bei der Integration auf Intervallzerlegungen (vgl. Bem. 7.45 auf S. 250) geht dann schließlich das Inkrement des Exponenten durch Fehlerfortpflanzung verloren.*

Bemerkung 10.22 *Beim Eulerschen Polygonzugverfahren gilt:*

$$\frac{\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y) - y}{\tau} = f(t,y)$$

Wie gut sind allgemein numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen?

Definition 10.23 *Ein numerischer Fluss heißt* konsistent von der Ordnung *p, falls*

$$\left|\left|\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y) - \Phi_{t+\tau,t}(y)\right|\right| = O(\tau^{p+1})$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ *und alle* $t \in \mathbb{R}$*, sowie kleine Zeitschritte* τ*.*

Der Fluss heißt stabil*, falls*

$$\frac{\hat{\Phi}_{t+\tau,t}y - y}{\tau} \qquad \text{(lokal) Lipschitz-stetig für alle } t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Die Lipschitz-Konstante darf nicht von τ *abhängen.)*
Ein numerischer Fluss heißt konvergent von der Ordnung *p, falls für obige Zerlegung* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *mit* $\tau_i \leq \tau$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *gilt*

$$||y_n - y(t_n)|| = O(\tau^p)$$

(wobei $y(t_n) = \Phi_{t_n,t_0}(y)$ *die kontinuierliche Lösung bezeichnet).*

Satz 10.24 (Stabilität + Konsistenz $\Rightarrow$ Konvergenz) *Sei* $y(.)$ *eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \qquad \text{mit } y(t_0) = y_0,$$

und der numerische Fluss sei konsistent von der Ordnung p *und stabil, dann konvergiert das numerische Lösungsverfahren zum Anfangswertproblem von der Ordnung* p*.*

Beweisskizze: $[y_{i+1} = \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i), y(t) = \Phi_{t,t_0}(y_0)]$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &:= \|y(t_{i+1}) - y_{i+1}\| && \text{(Fehler nach der } (i+1)\text{ten Iteration)} \\
&= \left|\left|\Phi_{t_{i+1},t_i}(y(t_i)) - \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i)\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\Phi_{t_{i+1},t_i}(y(t_i)) - \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y(t_i))\right|\right| && \text{(Konsistenzfehler)} \\
&\quad + \left|\left|\hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y(t_i)) - \hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i)\right|\right| && \text{(Fortpflanzung des alten Fehlers mit dem diskreten Fluss)} \\
&\leq C\tau_i^{p+1} + ||y(t_i) - y_i|| \\
&\quad + \tau_i \underbrace{\left|\left|\frac{\hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y(t_i)) - y(t_i)}{\tau_i} - \frac{\hat{\Phi}_{t_{i+1},t_i}(y_i) - y_i}{\tau_i}\right|\right|}_{L\varepsilon_i \quad \text{Stabilität}} \\
\Rightarrow \varepsilon_{i+1} &\leq C\tau_i^{p+1} + (1 + L\tau_i)\varepsilon_i && \text{(Gesamtfehlerfortpflanzung)}
\end{aligned}$$

<u>Behauptung:</u>

$$\varepsilon_i \overset{!}{\leq} \tau^p \frac{C}{L}\left(e^{L(t_i - t_0)} - 1\right)$$

hierzu: (Induktion)

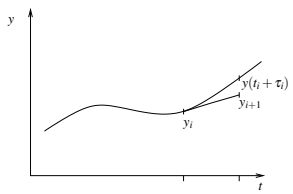
$$\begin{array}{rrcl} i=0: & \varepsilon_0 & = & 0 \quad \checkmark \\ i \rightsquigarrow i+1: & \varepsilon_{i+1} & \leq & C\tau_i^{p+1} + (1+L\tau_i)\varepsilon_i \\ & & \leq & \tau^p \left(C\tau_i + (1+L\tau_i)\frac{C}{L}\left(e^{L(t_i-t_0)}-1\right)\right) \\ & & = & \frac{C}{L}\tau^p \left((1+L\tau_i)e^{L(t_i-t_0)}-1\right) \\ & & \overset{(1+L\tau_i)\leq e^{L\tau_i}}{\leq} & \frac{C}{L}\tau^p \left(e^{L\tau_i}e^{L(t_i-t_0)}-1\right) = \frac{C}{L}\tau^p \left(e^{L(t_{i+1}-t_0)}-1\right) \end{array}$$

□

Nun wenden wir uns der Frage nach Verfahren höherer Ordnung zu.

Das Cauchy-Euler-Verfahren

Nachteil des Eulerschen Polygonzugverfahrens:



$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau_i} = f(t_i, y_i) \approx \dot{y}(t_i)$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau_i} \approx \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{\tau_i} = \dot{y}(t_i) + O(\tau_i) \Rightarrow ||y_i - y(t_i)|| = O(\tau_i)$$

Damit basiert das Verfahren auf einem Vorwärtsdifferenzenquotienten, dieser ist aber nur von 1. Ordnung.

Besser sind zentrale Differenzenquotienten:

$$y_{i+1} = y_i + \tau_i f(t_i + \frac{\tau_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

wobei $y_{i+\frac{1}{2}}$ möglichst gute Approximation von $y(t_i + \frac{\tau_i}{2})$ sein sollte.
$\rightsquigarrow$ wähle $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\tau_i}{2} f(t_i, y_i)$

Damit erhalten wir:

Schema 10.25 (Cauchy-Euler-Verfahren) *Für Anfangswerte y_0 definieren wir folgendes iteratives Verfahren*

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{\tau_i}{2} f(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \tau_i f\left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Lemma 10.26 *Das Cauchy-Euler-Verfahren ist von zweiter Ordnung konvergent, falls f stetig differenzierbar ist, d.h.*

$$||y(t_i) - y_i|| = O(\tau^2) \quad , \tau = \max_{i=0,\dots,n-1} \tau_i$$

Beweis: Durch Taylorentwicklung von y um t erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+\tau,t}(y(t)) &= y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) + O(\tau^3) \\
&= y(t) + \tau f(t,y(t)) + \frac{\tau^2}{2}\frac{d}{dt}f(t,y(t)) + O(\tau^3) \\
&= y(t) + \tau f(t,y(t)) + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,y(t)) + D_y f(t,y(t))\dot{y}(t)\right) + O(\tau^3) \\
&= y(t) + \tau f(t,y(t)) + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,y(t)) + D_y f(t,y(t)) f(t,y(t))\right) + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

Nun entwickeln wir $f(t+s, y+sf(t,y))$ bezüglich s um 0:

$$\begin{aligned}
f(t+s,y+sf(t,y)) &= f(t,y) + s\frac{d}{ds}f(t+s,y+sf(t,y))|_{s=0} + O(s^2) \\
&= f(t,y) + s\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,y) + D_y f(t,y) f(t,y)\right) + O(s^2) \\
\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y) &= y + \tau f\left(t + \frac{\tau}{2}, y + \frac{\tau}{2}f(t,y)\right) \\
&\overset{s=\frac{\tau}{2}}{=} y + \tau\left(f(t,y) + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,y) + D_y f(t,y) f(t,y)\right) + O(\tau^2)\right) \\
\Rightarrow & \quad \left|\left|\Phi_{t+\tau,t}(y) - \hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y)\right|\right| = O(\tau^3) \\
\Rightarrow & \quad \text{Konsistenz der Ordnung 2}
\end{aligned}$$

Das Verfahren ist stabil, da

$$\frac{\hat{\Phi}_{t+\tau,t}(y) - y}{\tau} = f\left(t + \frac{\tau}{2}, y + \frac{\tau}{2}f(t,y)\right)$$

und f Lipschitz-stetig. Damit folgt die Aussage direkt aus Satz 10.24.

□

In Aufgabe 10.11 vergleichen Sie eine Implementierung des Euler- und des Cauchy-Euler-Verfahrens.
Betrachten wir nun eine wichtige Klasse von Verfahren höherer Ordnung:

Definition 10.27 (Runge-Kutta-Verfahren) *Ein iteratives Schema das konsistent ist von p-ter Ordnung, heißt* Runge-Kutta-Verfahren p-ter Ordnung.
Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist durch folgendes Schema definiert:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \tau \sum_{j=1}^{s} b_j k_j, \text{ wobei} \\
k_1 &= f(t_i + c_1\tau, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + c_2\tau, y_i + a_{21}\tau k_1) \\
k_3 &= f(t_i + c_3\tau, y_i + a_{31}\tau k_1 + a_{32}\tau k_2) \\
&\vdots \\
k_s &= f(t_i + c_s\tau, y_i + a_{s1}\tau k_1 + a_{s2}\tau k_2 + \cdots + a_{s,s-1}\tau k_{s-1})
\end{aligned}
$$

Hierbei notieren wir

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & 0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & \ddots & & & \\
\vdots & a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Euler-Verfahren

$$
\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Euler-Cauchy-Verfahren

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

3. Ordnung

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

alternativ

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

vierter Ordnung:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Beispiel 10.28 *Für das oben angegebene Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ergibt sich somit:*

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \tau(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4),\ \textit{wobei} \\
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + \frac{1}{2}\tau, y_i + \frac{1}{2}\tau k_1) \\
k_3 &= f(t_i + \frac{1}{2}\tau, y_i + \frac{1}{2}\tau k_2) \\
k_4 &= f(t_i + \tau, y_i + \tau k_3)
\end{aligned}$$

10.4 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 10.1 Angenommen, wir werfen einen Ball senkrecht nach oben und vernachlässigen im Folgenden die Reibung. Wir lassen den Ball in einer Höhe von 1 m mit einer Geschwindigkeit von $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ los und er erfahre die ganze Zeit über die (Erd-) Beschleunigung von $-10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) Berechnen Sie die Funktion $h(t)$, die die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Lösen Sie dazu die Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) = -10$$

erst ohne und anschließend mit Anfangswerten.

b) Zu welcher Zeit $T > 0$ schlägt der Ball auf dem Boden auf, d. h. für welches $T > 0$ gilt $h(T) = 0$?

c) Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{h}(T)$ trifft der Ball auf der Erde auf?

Anwesenheitsaufgabe 10.2 Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

mit Anfangswert $y(0) = 1$.

Anwesenheitsaufgabe 10.3 Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{t}$$

für $t > 1$ mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.

Aufgabe 10.4 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = y\,,$$

a) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$,

b) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$,

indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

Aufgabe 10.5
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 + y^2, \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

Aufgabe 10.6
Welche der folgenden Aussagen sind richtig für die Differentialgleichung

$$\dot{y} = y^2\,?$$

a) Durch die Vorgabe $y(a) = b$ ist eine Lösung lokal eindeutig bestimmt. ja □ nein □

b) Die Lösung zu der Vorgabe $y(0) = 1$ existiert für alle t. ja □ nein □

c) Die rechte Seite $f(y) = y^2$ genügt einer globalen Lipschitz-Bedingung in $\mathbb{R}^2$. ja □ nein □

d) Die rechte Seite $f(y) = y^2$ genügt einer Lipschitz-Bedingung für $|y| < a$, mit festem $a > 0$. ja □ nein □

Aufgabe 10.7
Lösen Sie das Anfangswertproblem

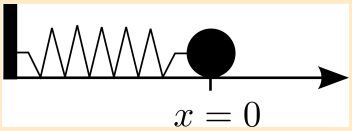
$$\dot{y} = -y\sin(t) + \sin(2t); \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 10.8
Geben Sie eine Lipschitzkonstante für die Funktion

$$f(t,y) = t^2 + y^2 \quad \text{bzgl. } y$$

im Gebiet $-2 < t < 2$, $0 < y < 5$ an.

Aufgabe 10.9 Betrachten Sie den in der Skizze dargestellten Fall.



Bewegen wir die Kugel der Masse m nach links oder rechts und lassen sie los, so versetzen wir das System in Schwingungen. Die Reibungskräfte vernachlässigen wir. Bei Auslenkung der Kugel nach rechts oder links übt die Feder die (Rückstell-) Kraft $F = -Dx$ auf die Kugel aus, die mittels $F = m\ddot{x}$ zu einer Beschleunigung der Kugel führt. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$, indem Sie den Ansatz $x(t) = a\cos(bt + c)$ wählen und die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ berechnen.

b) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems, die sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ der Kugel und der (in der Dehnung der Feder gespeicherten) elastischen Energie $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}Dx^2$ konstant ist.

Aufgabe 10.10

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bewegung eines Satelliten um die Erde ohne Berücksichtigung des Mondes beschreibt. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt.

b) Eine geostationäre Umlaufbahn ist (näherungsweise) eine Kreisbahn in Äquatorebene. Geben Sie eine Parametrisierung für eine beliebige Kreisbahn in Äquatorebene um den Ursprung an, die Radius r hat und in der Zeit T einmal die Erde umkreist hat. Den Startpunkt können Sie z.B. als $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.

c) Zeigen Sie, dass diese Kurve für geeignete r, T die Differentialgleichung löst. Welche Bedingung ergibt sich dabei für r und T?

d) Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde innerhalb eines siderischen Tages (23 h 56 m 4 s). Die Erdmasse beträgt $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie den Radius der geostationären Umlaufbahn.

e) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in geostationärer Umlaufbahn?

Aufgabe 10.11 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

Aufgabe 10.12 Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t)$$

mit Anfangswert $y(0) = 0$ mit Hilfe von Variation der Konstanten.

Aufgabe 10.13 Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 1$ mit Hilfe von Diagonalisierung.

11 Integration in mehreren Dimensionen

In diesem Kapitel werden wir den Begriff des Integrals verallgemeinern und die Integration auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$ und auf Kurven und Flächen kennen lernen.

11.1 Parameterabhängige Integrale

Zunächst betrachten wir parameterabhängige Integrale mit dem Ziel:

- Untersuchung von Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration

$$\left(\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,t)\,dt \stackrel{?}{=} \int_a^b \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt\right)$$

- Darstellung von mehrdimensionalen Integralen als geschachtelte Integration

$$\left(\int_\square f(x)\,dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 g(x_2)\,dx_2 \quad , \text{ mit } g(x_2) = \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\right)$$

(wobei $\square$ das Einheitsquadrat bezeichnet)

Wiederholen wir hierzu die Definition gleichmäßiger Stetigkeit:

Definition 11.1 *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt* gleichmäßig stetig *auf D, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$||x-y|| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad ||f(x)-f(y)|| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x,y \in D.$$

Beispiel 11.2
$f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ *ist nicht gleichmäßig stetig.*
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ *ist nicht gleichmäßig stetig.*
$f : [-a : a] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ *ist gleichmäßig stetig.*
$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ *ist gleichmäßig stetig, vgl. Seite 55.*

Bemerkung 11.3 *Aus Lipschitzstetigkeit folgt gleichmäßige Stetigkeit.*

Definition 11.4 (abgeschlossene, offene, beschränkte Mengen)

- *Eine Menge $A \subset R^n$ heißt* abgeschlossen, *wenn zu jeder konvergenten Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in A$ und $x_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$, gilt, dass auch $x \in A$ ist.*
- *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt* offen, *wenn es zu jedem $x \in A$ ein ε gibt, so dass $B_\varepsilon(x) := \{\tilde{x} \in R^n \mid ||x-\tilde{x}|| < \varepsilon\} \subset A$.*
- *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt* beschränkt, *wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in A$ gilt*
$$||x|| < M \qquad (d.h.\ A \subset B_M(0)).$$

Bemerkung 11.5

- *Offene Intervalle sind (im Sinne dieser Definition) offen, abgeschlossenen Intervalle sind abgeschlossen.*
- *Vereinigungen offener Menge und Schnitte endlich vieler offener Mengen sind offen.*
- *Schnitte abgeschlossener Mengen und Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- *Wenn M offen ist, dann ist $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen. Wenn M abgeschlossen ist, dann ist $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen.*
- *$\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.*

Beispiele hierzu finden Sie in Aufgabe 11.1.
Zur Definition von Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit vergleiche Def. 2.14 und 2.16 auf Seite 54.

Satz 11.6 *Eine auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte stetige Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis: Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall $n = 1, D = [a,b]$. Wir führen einen Beweis mit Widerspruch: Sei f nicht gleichmäßig stetig, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$, insbesondere zu $\delta = \frac{1}{m}$ für $m = 1,2,\ldots$, ein Paar x_m, y_m gibt mit

$$|x_m - y_m| < \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad |f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon,$$

Nun ist $(x_m)_m$ beschränkt, also gibt es mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{m_k})_k$ mit $x_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Wegen der Abgeschlossenheit ist dann $x \in D$. Aus $|x_m - y_m| < \frac{1}{m}$ folgt $y_{m_k} \longrightarrow x$. Schliesslich folgt aus der Stetigkeit, dass $f(x_{m_k}), f(y_{m_k}) \longrightarrow f(x)$. Da f stetig ist, folgt $|f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})| \longrightarrow |f(x) - f(x)| = 0$ im Widerspruch zu $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon$.

□

Bemerkung 11.7 *Der Satz von Bolzano-Weierstrass gilt auch im $\mathbb{R}^n$, damit funktioniert der obige Beweis analog für eine abgeschlossene und beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$.*

Satz 11.8 (Differentiation unter dem Integral) *Sei $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist das parameterabhängige Integral $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

stetig. Existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und ist sie stetig, dann ist g differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis:

(i) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f nach Satz 11.6 gleichmäßig stetig ist, gibt es zur Konstante $\frac{\varepsilon}{d-c}$ für ein beliebiges festes ε ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},y)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \qquad \text{falls } |x-\tilde{x}| < \delta.$$

(Die Division durch $(d-c)$ wurde bei Einführung der Konstante gewählt, um im nächsten Schritt besser kürzen zu können.) Hieraus folgt

$$|g(x) - g(\tilde{x})| \leq \int_c^d |f(x,y) - f(\tilde{x},y)|\,dy < \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit von g.

(ii) Mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung erhalten wir

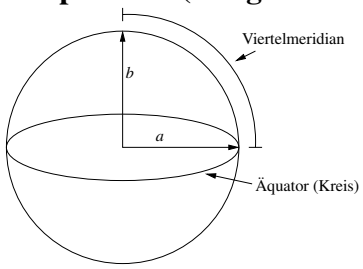
$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \int_c^d \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,dy \\
&= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy \qquad (\xi \in [x,x+h]) \\
&= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

Dabei existiert ξ wegen des Mittelwertsatzes, und kann von x, y und h abhängen. Der zweite Term kann im Betrag abgeschätzt werden gegen

$$\int_c^d \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| dy \overset{\frac{\partial f}{\partial x} \text{ glm stetig}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für } h \to 0, \text{ da } |\xi - x| \leq h.$$

□

Beispiel 11.9 (Länge des Halbmeridians)



Im Kugelmodell:

$L_{Kugel} = \frac{2\pi a}{4} = \frac{\pi}{2} a$

Erde als Rotationsellipsoid:

$$x(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_{Ellipsoid} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ||\dot{x}(t)||\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt \qquad \textit{mit } \varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} (\textit{Exzentrizität}) \end{aligned}$$

Reale Größen: $a = 6398644.322$ *m,* $b = 6377397.155$ *m,* $\varepsilon^2 = 0.006674372$
Betrachte nun

$$I(\delta) = \frac{L_{Ellipsoid}}{L_{Kugel}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\delta\cos^2 t}\, dt$$

als Funktion von $\delta = \varepsilon^2$.

Taylorentwicklung: $I(\delta) = I(0) + I'(0)\delta + I''(0)\frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3)$

Mit obigem Satz erhält man dann:

$$\begin{aligned}
I(\delta) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\delta\cos^2 t}\,dt \\
&\Rightarrow I(0)=1 \\
I'(\delta) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-\delta\cos^2 t}}\,dt \\
&\Rightarrow I'(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = -\frac{1}{4} \\
I''(\delta) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 t}{(1-\delta\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,dt \\
&\Rightarrow I''(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = -\frac{3}{32} \\
\Rightarrow I(\delta) &= 1-\frac{1}{4}\delta-\frac{3}{64}\delta^2+O(\delta^3) \\
\Rightarrow I(\varepsilon^2) &= 0.998329319+O(\varepsilon^6) \\
\Rightarrow L_{Ellipsoid} &= 10050966.997+O(\varepsilon^6)L_{Kugel}
\end{aligned}$$

Die Abweichung vom exakten Wert beträgt 6.4 *cm.*

Betrachten wir nun die Differentiation bei variablen Intervallgrenzen: Hierzu definieren wir die Funktion

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy$$

und fragen nun nach der Ableitung von F nach x. Der folgende nach Leibniz benannte Satz gibt darüber Auskunft.

Satz 11.10 (Differentiation bei parameterabh. Integrationsgrenzen, Leibniz-Formel)
f sei stetig in y und in x stetig differenzierbar, a,b seien stetig differenzierbar. Dann ist obige Funktion F stetig differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x,b(x))\,b'(x) - f(x,a(x))\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
g(u,v,x) &:= \int_v^u f(x,y)\,dy \\
\Rightarrow F(x) &= g\left(b(x),a(x),x\right) \\
\Rightarrow F'(x) &= \frac{\partial g}{\partial u}b'(x)+\frac{\partial g}{\partial v}a'(x)+\frac{\partial g}{\partial x} \\
&\overset{\substack{Satz\,11.8,\\ HS}}{=} f(x,b(x))b'(x)-f(x,a(x))a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

In der letzen Gleichung haben wir neben dem obigen Satz auch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet und dabei ausgenutzt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_v^u f(x,y)\,dy &= f(x,u)\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\int_v^u f(x,y)\,dy &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(-\int_u^v f(x,y)\,dy\right) = -f(x,v)\,.\end{aligned}$$

□

Beispiele hierzu finden Sie in den Aufgaben 11.9 und 11.10.

Satz 11.11 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge) *Sei $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt*

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Beweis: Sei

$$g(t) = \int_a^b\int_c^t f(x,y)\,dy\,dx.$$

Mit Satz 11.8 folgt

$$g'(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

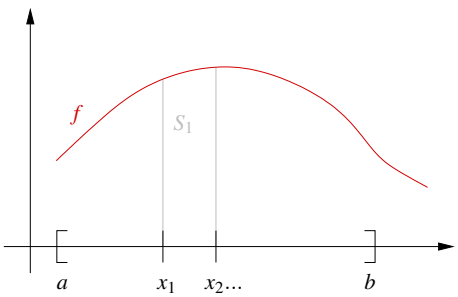
Schließlich ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Seite 212):

$$\underbrace{g(d)}_{=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx} - \underbrace{g(c)}_{=0} = \int_c^d g'(y)\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

□

Mehrfache Integrale sind geschachtelt zu verstehen, d.h. die Integrationsgrenzen des ersten Integralzeichens gehören zur als letzte aufgeführten Integrationsvariablen. Im obigen Fall läuft x von a bis b und y von c bis d.
Nun haben wir alle vorbereitenden Aussagen zur Integration in mehreren Dimensionen hergeleitet.

11.2 Riemannsummen zur Volumenbestimmung



Es sei $f(x) > 0$ auf einem Intervall $[a,b]$. Betrachte die Intervallteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

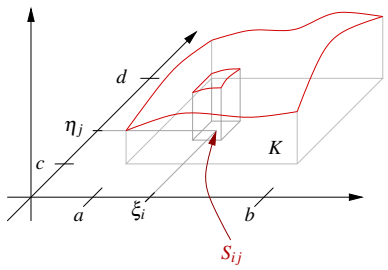
mit $h = \max|x_k - x_{k-1}|$.

Dann definiere durch $S_k := \{(x,y)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k,\ 0 \le y \le f(x)\}$ die „Streifen“ unter dem Graphen.
Es gilt: Fläche$(S_k) \approx f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ für $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$\textbf{Erinnerung:} \quad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{h\to 0} \int_a^b f(x)\,dx$$

Wir nutzen dies zur Volumenbestimmung eines Körpers:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,|\,a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$



Es sei $f(x,y) \ge 0$ für $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.

<u>Zerlegung:</u> $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$

mit $h_x := \max\limits_{0<i\le n} |x_i - x_{i-1}|$,
$h_y := \max\limits_{0<j\le m} |y_j - y_{j-1}|, \quad h = \max(h_x, h_y)$.

Definiere: $S_{ij} := \{(x,y,z)\,|\,x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ (Säule)

<u>Zwischenstellenwahl:</u> $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad y_{j-1} \le \eta_j \le y_j$.
Es gilt: Volumen$(S_{ij}) \approx (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(\xi_i, \eta_j)$

Aus dem Kalkül des Integrals in 1D erhalten wir:

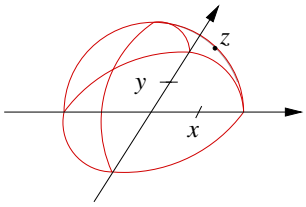
$$\lim_{h_y\to 0} \lim_{h_x\to 0} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})}_{\xrightarrow{h_x\to 0} \int_a^b f(x,\eta_j)\,dx = g(\eta_j)} (y_j - y_{j-1}) \qquad \text{mit } g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$= \lim_{h_y\to 0} \sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)(y_j - y_{j-1})$$

$$= \int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

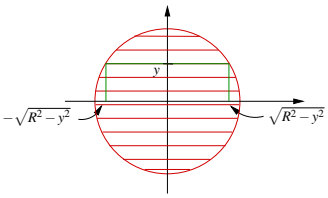
Beispiel 11.12 (Volumen einer Halbkugel)

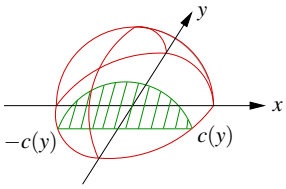
$$
\begin{aligned}
H &:= \{(x,y,z)\,|\,x,y \in [-R,R],\, 0 \le z \le f(x,y)\} \\
\text{mit } f(x,y) &= \begin{cases} \sqrt{R^2-x^2-y^2} & ;x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & ;\text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$



Kugelschale:
$x^2+y^2+z^2=R^2$

$$
\begin{aligned}
Vol(H) &= \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy \\
&\overset{c(y)=\sqrt{R^2-y^2}}{=} \int_{-R}^{R} \underbrace{\int_{-c(y)}^{c(y)} \sqrt{c^2(y)-x^2}\,dx}_{\substack{\text{Flächeninhalt des Halbkreises} \\ \text{mit Radius } c(y):\ \frac{c(y)^2\pi}{2}}} \quad dy
\end{aligned}
$$





$$
\begin{aligned}
&= \int_{-R}^{R} \frac{c^2(y)\pi}{2}\,dy = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R} R^2-y^2\,dy = \frac{\pi}{2}\left[R^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right] = \pi\frac{2}{3}R^3
\end{aligned}
$$

Um das Integral für die Fläche das Halbkreises zu berechnen, verwendet man z.B. die Substitution $x = c(y)\sin(\xi)$.
Weitere Beispiele finden Sie in Aufgabe 11.3 und 11.4.

11.3 Integration über Volumen im $\mathbb{R}^n$

Im vorangehenden Abschnitt haben wir eigentlich auch schon die Definition von Integralen in höherer Dimension über die Approximation mittels Riemannsummen kennengelernt. Nun definieren wir noch einmal und allgemein das Integral im $\mathbb{R}^n$ basierend auf geschachtelter Integration:

Zunächst betrachten wir Funktionen mit sogenanntem kompakten Träger:

Definition 11.13 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat* kompakten Träger, *falls eine beschränkte Menge A existiert mit $f(x) = 0$ für $x \notin A$.*

Bemerkung 11.14 *Jede beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ können wir in einer Kugel $B_R = \{x\,|\,\|x\| \le R\}$ einschließen, B_R ist wiederum enthalten in $[-R,R] \times \ldots \times [-R,R]$, dem n-dimensionalen Würfel mit Kantenlänge $2R$.*

Wir definieren nun, wann eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist und den Wert des entsprechenden Integrals.

Definition 11.15 (Riemann-Integral von Funktionen mit kompaktem Träger)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompakten Träger ($f(x) = 0$ falls $\|x\| > R$) für die, die aus geschachelten Integration hervorgehenden Funktionen

$$\begin{aligned} g_1(x_2,\ldots,x_n) &= \int_{-R}^{R} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\,, \\ g_2(x_3,\ldots,x_n) &= \int_{-R}^{R} g_1(x_2,\ldots,x_n)dx_2\,, \\ &\ldots \\ g_{n-1}(x_n) &= \int_{-R}^{R} g_{n-2}(x_{n-1},x_n)dx_{n-1}\,, \\ g_n &= \int_{-R}^{R} g_{n-1}(x_n)dx_n \end{aligned}$$

im Sinn des eindimensionalen Riemann-Integrals wohldefiniert sind (vgl. Definition 6.2). Dann ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbar und wir definieren

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = g_n = \int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\,.$$

Sei A eine beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$, dann ist $f : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf A falls die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $h(x) = 0$ für $x \notin A$ Riemann-integrierbar auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Wir definieren dann

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx\,.$$

In einem kurzen Exkurs soll ein deutlich allgemeinerer Integrationsbegriff skizziert werden.

Exkurs: Verallgemeinerung des Integralbegriffes

Definition 11.16 (Lebesgue-Integral) *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt* Lebesgue-integrierbar, *falls eine Folge von stetigen Funktionen f_k mit kompaktem Träger existiert mit*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)| dx \quad \text{konvergiert.}$$

Die Funktion f wird nur dort definiert, wo diese Summe absolut konvergiert (d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konvergiert). Wir setzen:

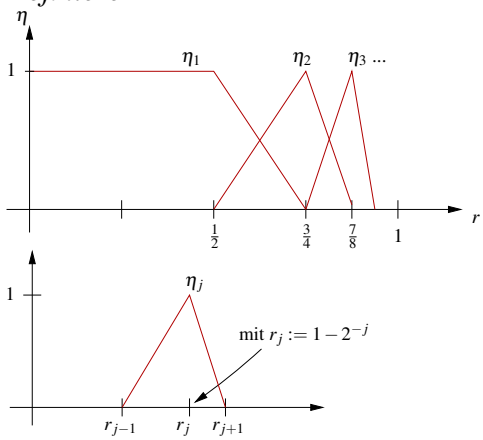
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\, dx$$

Achtung: Es muss gezeigt werden, dass der Wert des Integrals unabhängig von der Zerlegung in die Funktionen $(f_k)_{k=1,\dots,\infty}$ ist! (hier ohne Beweis!).

Definition 11.17 (Integration von Funktionen auf eingeschränkten Mengen) *Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt Lebesque-integrierbar, falls die Funktion*

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in A \\ 0 & ; sonst \end{cases} \quad \text{integrierbar ist.}$$

Beispiel 11.18 *Sei f stetig, $A = B_1(0) = \{x \mid \|x\| < 1\}$. $f_A = \begin{cases} f(x) & ; x \in A \\ 0 & ; sonst \end{cases}$.*
Problem: f_A nicht stetig $\to$ Approximation mit Reihe von f_j:
Definiere



$$\eta_1(r) := \begin{cases} 1 & ; r < \frac{1}{2} \\ 3 - 4r & ; \frac{1}{2} \le r \le \frac{3}{4} \\ 0 & ; r > \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\eta_j(r) := \max\left(0, \min(2^{j+1} - 1 - 2^{j+1} r, \; 2^j r - (2^j - 2))\right),$$

dann gilt $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(r) = \begin{cases} 1 & ; r < 1 \\ 0 & ; r \ge 1 \end{cases}$.

Wähle nun $f_j = \eta_j(\|x\|) f(x)$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) = f_{B_1(0)}(x),$$

und die Summe konvergiert absolut auf $B_1(0)$. D.h. $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

[Ende des Exkurses]

Bemerkung 11.19 *Auf Funktionen mit Singularitäten, z.B.*

$$f(x) = \|x\|^{\alpha}; \quad \alpha < 0$$

werden wir noch separat eingehen.

Satz 11.20 (Integrationsregeln) *Seien f und g integrierbare Funktionen auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f+g$ und cf integrierbar und es gilt:*

- $\displaystyle\int_A (f+g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_A (cf)(x)\,dx = c\int_A f(x)\,dx$
- *Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$ folgt $\displaystyle\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx$.*

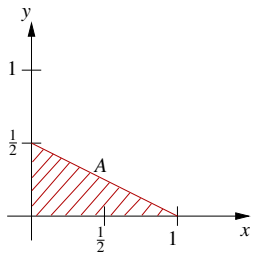
Wir haben bereits bei der Einführung des Integrals gesehen, dass die Reihenfolge der Integrationen in den unterschiedlichen Richtungen keine Rolle spielt:

Satz 11.21 (Fubini) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n,$$

wobei die einzelnen Integrationen in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können.

Beispiel 11.22 *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $A = \{(x,y) \,|\, x \geq 0; y \geq 0; x + 2y \leq 1\}$.*



Dann gilt:
$$\int_A f(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\,dx \overset{(2)}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Erläuterung:
Bei (1) wurde über x und $y(x)$ in Abhängigkeit von x integriert:
$x_{min} = 0$, $x_{max} = 1$, *für festes x ist $y_{min}(x) = 0$ und $y_{max}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.*
Bei (2) wurde über y und $x(y)$ in Abhängigkeit von y integriert:
$y_{min} = 0$, $y_{max} = \frac{1}{2}$, *für festes y ist $x_{min}(y) = 0$ und $x_{max}(y) = 1 - 2y$.*

Definition 11.23 (n-dimensionales Volumen) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, dann nennen wir A messbar, falls*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; sonst \end{cases} \qquad \textit{integrierbar ist.}$$

*Wir definieren das n-*dimensionale Volumen (das Maß) *von A durch*

$$\mathrm{Vol}_n(A) := \int_A 1\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\,dx.$$

Beispiele 11.24 *(i)* $n = 1, \quad A = [a,b]; \quad \mathrm{Vol}_1([a,b]) = \int_a^b 1dx = b - a.$

(ii) $A = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]: \quad \mathrm{Vol}_n(A) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 11.13.

Definition 11.25 (Mittelwert einer Funktion über einer Menge) *Sei f eine auf $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion und A messbar mit $0 < \mathrm{Vol}_n(A) < \infty$, dann definieren wir den* Mittelwert *von f über A als*

$$\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(A)} \int_A f(x)\,dx.$$

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $M = \sup_{x \in A} |f(x)|$, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} -M \le f(x) \le M \Rightarrow -M\mathrm{Vol}_n(A) &= -M \int_A 1\,dx = \int_A -M\,dx \le \int_A f(x)\,dx \\ &\le \int_A M\,dx = M \int_A 1\,dx = M\mathrm{Vol}_n(A) \end{aligned}$$

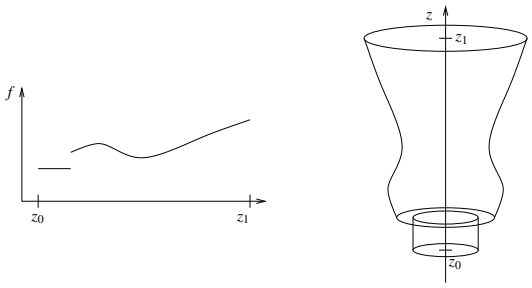
Folgerung 11.26

$$\textit{Es gilt:} \quad \left| \int_A f(x)\,dx \right| \le \sup_{x \in A} |f(x)|\,\mathrm{Vol}_n(A)$$

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers Sei $f : [z_0, z_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und f^2 sei integrierbar auf $[z_0, z_1]$. Wir betrachten den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, z_0 \le z \le z_1, x^2 + y^2 \le f^2(z) \right\}.$$

(K ergibt sich durch Rotation der Fläche $F = \{(x,z) \,|\, z_0 \le z \le z_1, 0 \le x \le f(z)\}$ um die z-Achse.)



$$\mathrm{Vol}(K) = \mathrm{Vol}_3(K) = \int_K 1\, d(x,y,z) = \int_{z_0}^{z_1} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2} \le f(z)} 1\, d(x,y) \right) dz$$

Für alle $z \in [z_0, z_1]$ gilt Fläche$\left(\left\{ (x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le f(z) \right\} \right) = \pi f^2(z)$.

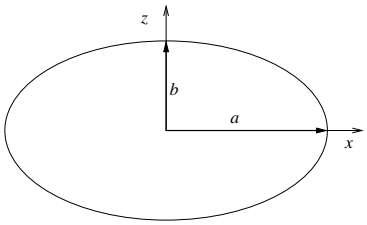
Damit folgt: $\boxed{\mathrm{Vol}(K) = \pi \int_{z_0}^{z_1} f^2(z)\, dz}$

Beispiele 11.27

(i) $K = B_R(0), f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$,

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_3\left(B_R(0)\right) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\, dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(ii) Volumen der Erde im Rotationsellipsoidmodell:



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \\
\Rightarrow x &= a\cos\left(\arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right) \\
&= a\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right)} \\
&= a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}} =: f(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{Damit ist} \quad K &:= \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2 \le f^2(z) = a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}, \\
\textit{und}\,\mathrm{Vol}_3(K) &= \pi a^2 \int_{-b}^{b}\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)dz \\
&= \pi a^2\left[z-\frac{z^3}{3b^2}\right]_{-b}^{b} \\
&= \pi a^2 2\left(b-\frac{b}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi a^2 b.
\end{aligned}$$

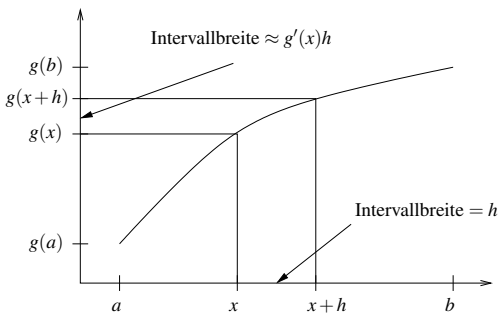
Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 11.2.

11.4 Der Transformationssatz

Im Folgenden werden wir nun eine Substitutionsregel für mehrfache Integrale herleiten. Zunächst wiederholen wir dazu die entsprechende Regel aus dem eindimensionalen Fall:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

<u>Merkregel:</u> $y(x) = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g'(x) \Rightarrow$ „ $dy = g'(x)\,dx$ “ + Anpassen der Grenzen

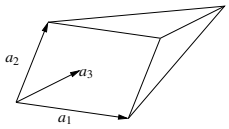


D.h. der Faktor $g'(x)$ ist die lokale Längenänderung, die man berücksichtigen muß, wenn man eine Integration im Bild auf dem Intervall $[g(a), g(b)]$ zurückziehen will auf eine Integration im Urbild.

Betrachten wir nun nicht die lokale Längenänderung in einer Dimension, sondern die lokale Volumenänderung in n dimensionalen Fall. Hierzu rufen wir uns die Determinante in Erinnerung:

$\det A = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ erfüllte folgende Regeln:

(i) $\det A = 0$ falls die Spalten von A linear abhängig sind
$\Leftrightarrow$ eine Spalte ist als Linearkombination der anderen darstellbar $a_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i a_i$.



Für das von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Parallelepiped $P[a_1, \dots, a_n]$,

$$P[a_1, \dots, a_n] = \{x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \,|\, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n\},$$

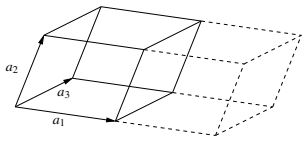
gilt dann

$$\mathrm{Vol}_n\left(P[a_1, \dots, a_n]\right) = 0.$$

(ii) $\det(.)$ ist linear in jeder Zeile:

a)

$$\det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \dots & \lambda a_j & \dots & a_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \lambda \det A$$



Dies korrespondiert dazu, dass für $\lambda > 0$ gilt

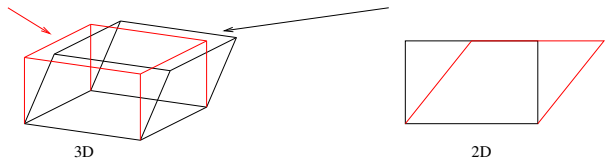
$$\mathrm{Vol}_n\left(P[a_1, \dots, a_{j-1}, \lambda a_j, a_{j+1}, \dots, a_n]\right) = |\lambda| \, \mathrm{Vol}_n\left(P[a_1, \dots, a_n]\right).$$

b)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \dots & (a_j + \tilde{a}_j) & \dots & a_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \dots & a_j & \dots & a_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} \\ &+ \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \dots & \tilde{a}_j & \dots & a_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Falls A nicht bereits singulär ist, können wir schreiben: $\tilde{a}_j = \lambda a_j + b_j$ mit $b_j \in \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n\}$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir das sogenannte *Cavalierische Prinzip*:

$$\operatorname{Vol}_n\left(P[a_1, \ldots, a_j + b_j, \ldots, a_n]\right) = \operatorname{Vol}_n\left(P[a_1, \ldots, a_n]\right)$$



(iii)

$$\det(\mathbb{1}) = 1 \qquad \text{mit } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ (Identität) .}$$

Dies entspricht der Volumennormierung

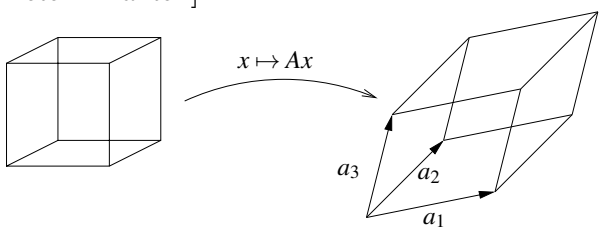
$$\operatorname{Vol}_n(\underbrace{P[e_1, \ldots, e_n]}_{\text{Einheitswürfel}}) = 1.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Determinante ergibt sich also (siehe auch Seite 165)

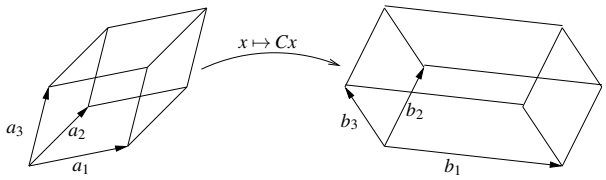
$$\operatorname{Vol}_n(P[a_1, \ldots, a_n]) = \left| \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \ldots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \right|.$$

Betrachten wir zunächst die Volumentransformation unter linearen Abbildungen:

(i) $\operatorname{Vol}_n\left(P[a_1, \ldots, a_n]\right) = |\det A| = |\det(A\mathbb{1})| \overset{(*)}{=} |\det A| \det \mathbb{1} = |\det A| \operatorname{Vol}_n\left(P[e_1, \ldots, e_n]\right)$
[$(*)$ Produktregel für Determinanten]

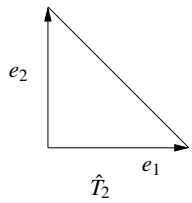


(ii) $\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \ldots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \ldots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

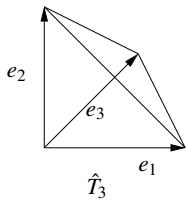


$$\mathrm{Vol}_n\left(P[b_1,\ldots,b_n]\right) = |\det(CA)| = |\det C|\,|\det A| = |\det C|\mathrm{Vol}_n\left(P[a_1,\ldots,a_n]\right).$$

Genauso, wie man Deformationen und Volumen von Parallelepipeden betrachten kann, kann man auch Simplizes und ihr Volumen bearbeiten.
Wir betrachten hierzu Einheitssimplizes mit $|e_1| = |e_2| = \ldots = 1$:



$\mathrm{Vol}_2\left(\hat{T}_2\right) =$ Fläche $\left(\hat{T}_2\right) = \frac{1}{2}$



$\mathrm{Vol}_3\left(\hat{T}_3\right) = \frac{1}{6}$

<u>Allgemein:</u> $\hat{T} = \{x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \,|\, 0 \le \lambda_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i \le 1\}$

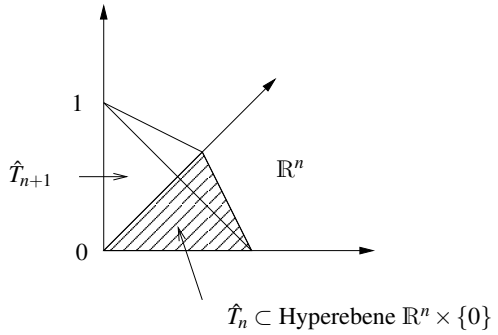
Setzt man $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n$, so ergibt sich $\lambda_0 \ge 0$ und $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ und daher mit $e_0 = 0$ die Darstellung aller Punkte eines Dreiecks über baryzentrische Koordinaten durch $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$, d.h. als Konvexkombination der Eckpunkte (vgl. Definitionen 7.20 und 7.33).

Es gilt: $\boxed{\mathrm{Vol}_n\left(\hat{T}_n\right) = \dfrac{1}{n!}}$

Beweis: Induktion: $\boxed{n = 1}$

$$\hat{T}_1 = [0,1] \qquad \mathrm{Vol}_1\left(\hat{T}_1\right) = \text{ Länge } \left([0,1]\right) = 1$$

$\boxed{n \rightsquigarrow n+1}$



$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{n+1}\left(\hat{T}_{n+1}\right) &= \int_0^1 \mathrm{Vol}_n\left((1-\lambda)\hat{T}_n\right) d\lambda \\
&= \int_0^1 (1-\lambda)^n \underbrace{\mathrm{Vol}_n\left(\hat{T}_n\right)}_{=\frac{1}{n!}} d\lambda \\
&= \frac{1}{n!}\left[\frac{-(1-\lambda)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

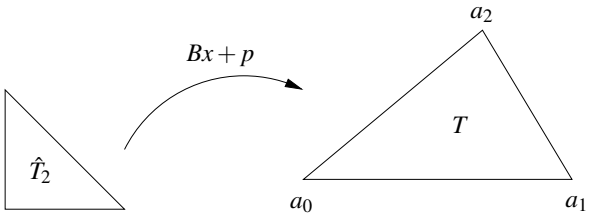
<u>konkret:</u> $\boxed{n = 2 \rightsquigarrow n+1 = 3}$

$$\mathrm{Vol}_3\left(\hat{T}_3\right) = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{da Dreieck}\\ \text{als Schnitt}}} \underbrace{(1-\lambda)^2}_{\substack{\text{Fläche des}\\ \text{Quadrates}}} d\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{-(1-\lambda)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

□

Konkrete Rechnungen für $n = 2$ und $n = 3$ finden Sie in Aufgabe 11.5.

Tranformation des Simplexvolumens unter linearen Abbildungen:



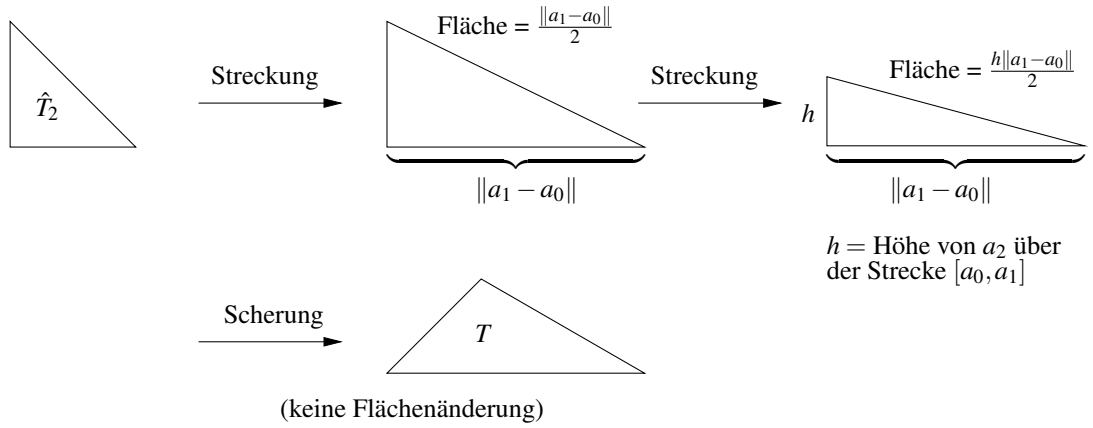
$p = a_0$

$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ | & | \end{pmatrix}$$

Bemerkung 11.28 *Die Argumente für Parallelepipede (siehe Anfang Paragraph 11.4) übertragen sich auf Simplizes:*
Für $T = B(\hat{T}_n) + p$ *gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(T) = |\det B| \mathrm{Vol}_n(\hat{T}_n) = \frac{|\det B|}{n!}.$$

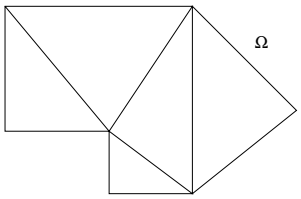
Konkret: $\boxed{n=2}$ $\quad$ $\mathit{Fläche}(\triangle_{a_0a_1a_2}) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} | & | \\ a_1-a_0 & a_2-a_0 \\ | & | \end{pmatrix}.$



Allgemein: Für $\tilde{T} = AT + q$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $q \in \mathbb{R}^n$ gilt

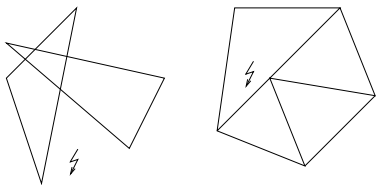
$$\mathrm{Vol}_n(\tilde{T}) = |\det A|\mathrm{Vol}_n(T).$$

Nun betrachten wir Integrale über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, das wir in Simplizes zerlegen können. Diese Zerlegung nennt man *Triangulierung*:



Es sind

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_h &= \{T_i\}_{i=1,\dots,m},\ T_i \text{ Simplizes}, \\ h &= \max_{i=1,..,m} h(T_i) \qquad \text{(max. Kantenlänge)} \end{aligned}$$



Es soll gelten:

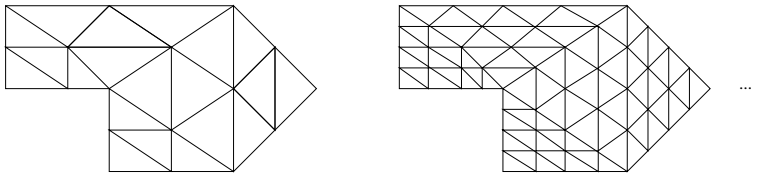
- $\Omega = \bigcup_{i=1,..,m} T_i$ (Achtung: $\Omega \neq \mathscr{T}_h$)
- Zwei Simplizes schneiden sich höchstens in einem Untersimplex (Punkt, Kante, Seitenfläche...)

Nun greifen wir die Riemannsummenidee auf und definieren eine Approximation (numerische Quadratur) zu einem Integral einer Funktion f auf Ω:

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad I(f) &= \int_\Omega f(x)\,dx, \\ \text{und} \quad I_h(f) &= \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_n(T_i) f(x_i). \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{wobei } x_i \text{ ein beliebiger, fester Punkt aus } T_i \text{ ist, z.B.} \\ x_i = \mathscr{S}(T_i) = \frac{a_0^i + a_1^i + \dots + a_n^i}{n+1} \text{ (Schwerpunkt) oder } x_i = a_0^i. \\ \text{Die Punkte } a_0^i, a_1^i, \dots, a_n^i \text{ bezeichnen die Ecken von } T_i. \end{array}\right]$$

Nun betrachten wir feinere Triangulierungen:



Lemma 11.29 *Sei Ω ein polygonal berandetes (und damit in Simplizes zerlegbares) Gebiet und $\mathscr{T}_{h_0}, \mathscr{T}_{h_1}, \ldots$ eine Familie von Triangulierungen zu Ω mit $h_k \to 0$ für $k \to \infty$. Ferner sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$I_{h_k}(f) \longrightarrow I(f) = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Beweis: Da f als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Gebiet gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein h, so dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ falls $\|x - y\| < h$ ist. Wähle h_k nun so, dass $h_k < h$:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega f(x)\,dx = \sum_{i=1,\ldots,m_k} \int_{T_i} f(x)\,dx \\
& \text{(Summe der Integrale über den einzelnen Simplizes:} \\
& m_k = \text{Anzahl der Simplizes in } \mathscr{T}_{h_k}) \\
= \; & \underbrace{\sum_{i=1,\ldots,m_k} \left(\int_{T_i} f(x_i)\,dx \right.}_{=I_{h_k}(f)} \left. + \int_{T_i} (f(x) - f(x_i))\,dx \right) \\
\Rightarrow |I(f) - I_{h_k}(f)| \; \leq \; & \sum_{i=1,\ldots,m_k} \int_{T_i} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{<\varepsilon}\,dx \\
< \; & \varepsilon \sum_{i=1,\ldots,m_k} \int_{T_i} 1\,dx \leq \varepsilon \mathrm{Vol}_n(\Omega) \\
\Rightarrow \text{Beh.} &
\end{aligned}$$

□

Nun betrachten wir die Transformation eines Gebietes Ω mittels einer Abbildung

$$g : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Zunächst betrachten wir Abbildungen g, die insgesamt stetig sind, und auf jedem Simplex T_i eine affine Funtion, d.h.

$$\begin{aligned}
g(x) &= A_i x + b_i \quad && \text{für } x \in T_i, \\
Dg(x) &= A_i && \text{für } x \in T_i.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\tilde{T}_i = g(T_i)$, $\tilde{\mathscr{T}}_{h_k} = \{\tilde{T}_i\}_{i=1,\dots m_k}$ und $\tilde{x}_i = g(x_i)$, dann ist $\tilde{\mathscr{T}}_{h_k}$ eine Triangulierung von $g(\Omega)$, und $\tilde{x}_i \in \tilde{T}_i$.
Nach den obigen Überlegungen zur Volumenänderung von Simplizes ist außerdem

$$\mathrm{Vol}_n(\tilde{T}_i) = |\det A_i| \mathrm{Vol}_n(T_i) = |\det Dg(x_i)| \mathrm{Vol}_n(T_i).$$

Nun erhält man unter Verwendung von Lemma 11.29

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{m_k} \mathrm{Vol}_n(\tilde{T}_i) f(\tilde{x}_i) \xrightarrow{h_k \to 0} \int_{g(\Omega)} f(y)\,dy \\ \| \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m_k} \mathrm{Vol}_n(T_i) f(g(x_i)) |\det Dg(x_i)| \xrightarrow{h_k \to 0} \int_{\Omega} f(g(x)) |\det Dg(x)|\,dx \end{array}$$

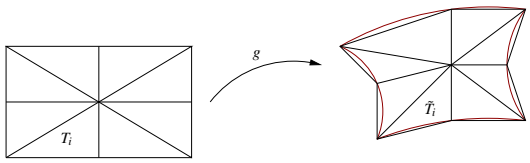
und daher

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\,dy = \int_{\Omega} f(g(x)) |\det Dg(x)|\,dx.$$

Im allgemeineren Fall sei die Abbildung g stetig differenzierbar und die Jacobi-Matrix Dg eine gleichmäßig stetige Funktion ($Dg : \Omega \to \mathbb{R}^{n,n}$). Dann betrachten wir eine Familie von Triangulierungen $\{\mathscr{T}_{h_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ zum Gebiet Ω und eine Familie $\{\hat{\mathscr{T}}_{h_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ zu $g(\Omega)$, so dass zu jedem Simplex $T_i \in \mathscr{T}_{h_k}$ genau ein $\hat{T}_i \in \hat{\mathscr{T}}_{h_k}$ gehört mit

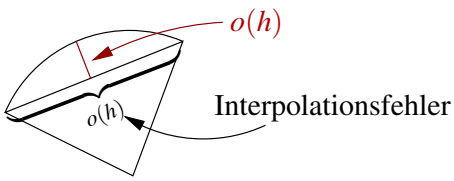
$$\tilde{a}_i = g(a_i)$$

für die Knoten $a_0^i, \dots, a_n^i$ zu T_i und $\tilde{a}_0^i, \dots, \tilde{a}_n^i$ zu $\tilde{T}_i$. Es gilt



$$\int_{g(\Omega)} f(y)\,dy = \sum_{i=1,\dots,m_k} f(y_i) \mathrm{Vol}_n(\tilde{T}_i) + o(1) = \sum_{i=1,\dots,m_k} f(\tilde{a}_0^i) \frac{\det(\tilde{A}^i)}{n!} + o(1)$$

wobei $o(1) \to 0$ for $h_k \to 0$. Hierbei ist der Fehler in der Randapproximation $o(h)$, da der Interpolationsfehler auch $o(h)$ ist.



Wir haben hier $y_i = \tilde{a}_0^i$ (0-ter Eckknoten von $\tilde{T}_i$) gewählt. Damit ergibt sich

$$\tilde{A}^i = \begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{a}_1^i - \tilde{a}_0^i & \dots & \tilde{a}_n^i - \tilde{a}_0^i \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ g(a_1^i) - g(a_0^i) & \dots & g(a_n^i) - g(a_0^i) \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von $\tilde{A}^i$ können wir nun mittels der Jacobi-Matrix zu Abbildung g umformulieren:

$$
\begin{aligned}
& g(a_j) - g(a_0) = Dg(a_0)(a_j - a_0) + \underbrace{o(\|a_j - a_0\|)}_{o(h_k)} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{A}^i = Dg(a_0) \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1^i - a_0^i & \dots & a_n^i - a_0^i \\ | & & | \end{pmatrix}}_{=:A^i} + o(h_k) \\
\Rightarrow \quad & \frac{|\det \tilde{A}^i|}{n!} = |\det Dg(a_0^i)| \frac{|\det A^i|}{n!} o(1) h_k^n = \det Dg(a_0^i) \mathrm{Vol}_n(T_i)\, o(1) h_k^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{g(\Omega)} f(y)\,dy \quad &= \quad \sum_{i=1,\dots,m_k} f(g(a_0^i)) |\det Dg(a_0^i)| \mathrm{Vol}_n(T_i) + o(1) \\
&\xrightarrow{\text{Lemma 11.29}} \quad \int_\Omega f(g(x)) |\det Dg(x)|\,dx \\
& \qquad [\text{da } x \mapsto (f \circ g) |\det Dg(x)| \text{ gleichmäßig stetig ist.}]
\end{aligned}
$$

Mit einem weiteren Approximationsargument zeigt man dieses Resultat auch für stückweise glatt berandete Gebiete Ω:

Satz 11.30 (Transformationsformel) *Sei Ω ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ invertierbar und stetig differenzierbar, $Dg(\cdot)$ gleichmäßig stetig auf Ω, $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann gilt*

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega f(g(x)) |\det Dg(x)|\,dx.$$

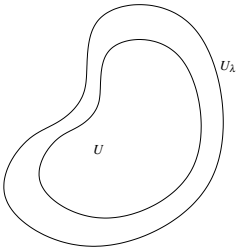
Bemerkung 11.31 *So wie in 1D der Faktor $g'(x)$ die Längenänderung misst, so misst $|\det Dg(x)|$ die lokale Volumenänderung.*

Da in 1D das Vorzeichen des Integrals von der Reihenfolge der Grenzen anhängt, ist das Vorzeichen von g' von Bedeutung. In höheren Dimensionen ist nur das Gebiet über das man integriert relevant (und nicht die Orientierung des Randes), daher geht dort nur der Betrag von $\det Dg$ *ein.*

Beispiele 11.32 *(i)* **Integration unter Skalierung:**

Sei U eine messbare Menge im $\mathbb{R}^n$ und

$$U_\lambda := \{\lambda x \,|\, x \in U\}.$$



Weiterhin setze $g(x) = \lambda x$ mit $\lambda > 0$,

$$\Rightarrow \det Dg(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n.$$

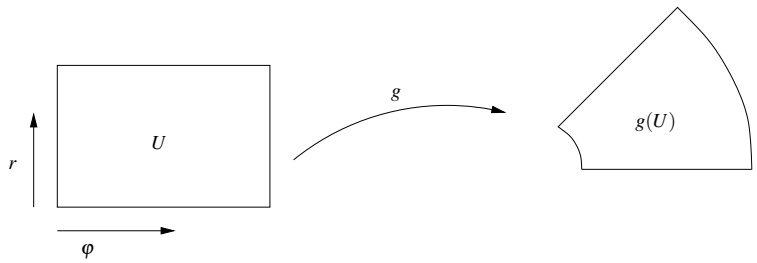
$$\textit{Damit folgt} \quad \int_{U_\lambda} f(y)\,dy \;=\; \int_U f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx = \lambda^n \int_U f(\lambda x)\,dx.$$

(ii) **Polarkoordinaten:**

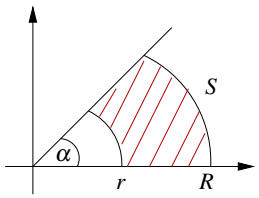
Betrachte $g : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *mit* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. *Dann ist*

$$Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det Dg(r,\varphi) = r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r,$$

$$\textit{und es gilt} \quad \int_{g(U)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_U f(g(r,\varphi))\,r\,d\varphi\,dr.$$



$$\begin{aligned} \underline{\textit{Konkret:}} \quad \textit{Fläche}(S) &= \int_S 1\,dx = \int_0^\alpha \int_r^R s\,ds\,d\varphi \\ &= \alpha\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right). \end{aligned}$$



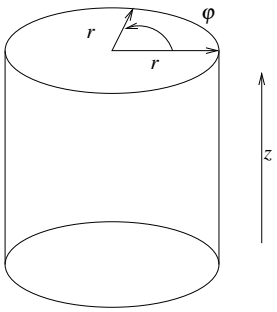
(iii) **Volumen eines Körpers**

Berechne das Volumen V des Körpers im ersten Oktanten, der von der den Flächen $z = 0, z = xy, x^2 + y^2 = R^2$ begrenzt wird.

$$\begin{aligned} V &= \int_{x^2+y^2<R^2;x,y>0} xy\,dx\,dy \\ &\overset{s.ii)}{=} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow V &= \int_0^R r^3\,dr \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \right) \\
&= \int_0^R r^3\,dr \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi\, d\varphi \right) \\
&= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{R^4}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{R^4}{8}
\end{aligned}
$$

(iv) **Zylinderkoordinaten:**



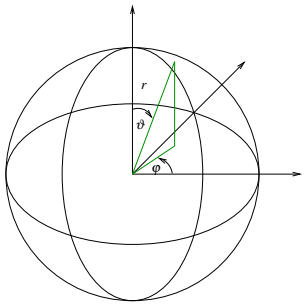
Transformation:

$$
\begin{aligned}
g(r,\varphi,z) &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow Dg(r,\varphi,z) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow |\det Dg(r,\varphi,z)| &= r.
\end{aligned}
$$

Konkrete Integration: *Viertelzylinder mit Höhe H und Radius R:*

$$
\begin{aligned}
\textit{Es gilt} \quad \mathrm{Vol}_3(\Omega) &= \int_0^H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= H \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{2} = \frac{\pi}{4} H R^2.
\end{aligned}
$$

(v) **Kugelkoordinaten:**



$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ (r\cos\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi],
$$

Transformation:

$$
\begin{aligned}
g(r,\vartheta,\varphi) &= \begin{pmatrix} x(r,\vartheta,\varphi) \\ y(r,\vartheta,\varphi) \\ z(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow Dg(r,\vartheta,\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \det Dg(r,\vartheta,\varphi) &= \cos\vartheta\left(r^2\cos^2\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\right) \\
&\quad + r\sin\vartheta\left(r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta\right) \\
&= \cos^2\vartheta\left(r^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{=1}\sin\vartheta\right) \\
&\quad + r^2\sin\vartheta\sin^2\vartheta\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{=1} \\
&= r^2\sin\vartheta\underbrace{\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)}_{=1} \\
&= r^2\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

Konkrete Integration:

Es bezeichne $\rho(x,y,z) = \tilde{\rho}(r(x,y,z))$ die Dichte eines Körpers. Dann lässt sich die Masse der Kugel K mit Radius R berechnen durch:

$$
\begin{aligned}
M_K &= \int_K \tilde{\rho}(r(x,y,z))\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \tilde{\rho}(r)r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
&= \left(\int_0^R \tilde{\rho}(r)r^2\,dr\right)2\pi\underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right)}_{=[-\cos\vartheta]_0^\pi=1+1} \\
&= 4\pi\int_0^R \tilde{\rho}(r)r^2\,dr.
\end{aligned}
$$

Wähle die Dichte konstant $\tilde{\rho} \equiv 1 \Rightarrow$ Masse $M_K = \frac{4}{3}\pi R^3$.

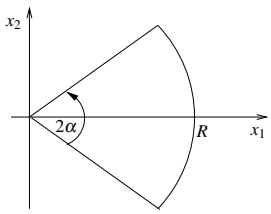
Definition 11.33 (Schwerpunkt eines Körpers) *Zu einem Körper K im $\mathbb{R}^n$ mit Dichte $\rho : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Schwerpunkt x_s:*

$$x_s = \frac{1}{M_k}\int_K x\rho(x)\,dx \qquad \left(\textit{komponentenweise: } (x_s)_i = \frac{1}{M_k}\int_K x_i\rho(x)\,dx\right)$$

wobei die Masse M_K gegeben ist über

$$M_k = \int_K \rho(x)\,dx.$$

Beispiel 11.34 *Schwerpunkt eines Kreissektors mit konstanter Dichte $\rho \equiv 1$ und Öffnungswinkel 2α sowie Radius R.*



Die Masse ergibt sich als

$$\begin{aligned} M_k &= \int_K dx \overset{*}{=} \int_0^R \int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,d\varphi\,dr \\ &= 2\alpha\frac{R^2}{2} = \alpha R^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*)\quad (x_1,x_2) &= g(r,\alpha) \\ x_1 &= r\cos\alpha \\ x_2 &= r\sin\alpha \\ \Rightarrow |\det D_g| = r &\Leftrightarrow dx = r dr d\alpha \end{aligned}$$

Damit sind die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\begin{aligned} (x_s)_1 &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_K x_1\,dx = \frac{1}{\alpha R^2}\int_0^R\int_{-\alpha}^{+\alpha} r(r\cos\varphi)\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\left(\int_0^R r^2\,dr\right)\left(\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{1}{\alpha R^2}\frac{R^3}{3}[\sin\varphi]_{-\alpha}^{+\alpha} \\ &= \frac{R}{3\alpha}2\sin\alpha = \frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \\ (x_s)_2 &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_0^R\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{R}{3\alpha}[-\cos\varphi]_{-\alpha}^{+\alpha} = 0 \quad \textit{(klar, wegen Symmetrie).} \end{aligned}$$

<u>*Extremfälle:*</u>

$\boxed{\alpha = \pi}$ $\quad x_s = 0$

$\boxed{\alpha \to 0}$ $\quad \frac{2R}{3}\underbrace{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}_{\xrightarrow{\alpha\to 0} 1} \to \frac{2R}{3} \neq \frac{R}{2}$

wobei $\frac{R}{2}$ Schwerpunkt des Intervalls $[0,R]$ (im Limes sehen wir eine andere Dichteverteilung)

Ein weiteres Beispiel finden Sie in Aufgabe 11.6.

Definition 11.35 (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper und L eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ (Achse), dann wird das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse definiert durch:*

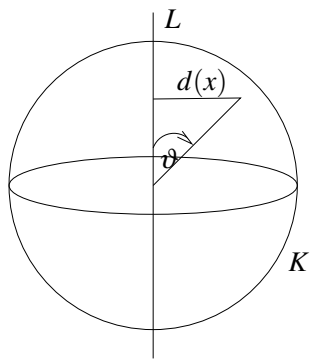
$$\Theta_L = \int_K d_L^2(x)\rho(x)\,dx$$

Hierbei ist $d_L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abstandsfunktion zur Geraden L und ρ wiederum die Dichte.

Für $\boxed{n=2}$ wählen wir statt einer Geraden einen Punkt bezüglich dessen wir das Trägheitsmoment bestimmen.

Beispiel 11.36 *Trägheitsmoment einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius R:*

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 0 \right\} \text{(Achse ist aus Symmetriegründen beliebig),}$$



$$\begin{aligned}
\Theta_L &= \int_K d^2(x)\,dx = \int_K (r(x)\sin\vartheta(x))^2\,dx \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r\sin\vartheta)^2 r^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
&= \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\vartheta\,d\vartheta\right)2\pi \\
&= \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\,d\vartheta\right)2\pi \\
&= 2\pi\frac{R^5}{5}\left[-\cos\vartheta - \left(-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right)\right]_0^\pi \\
&= 2\pi\frac{R^5}{5}\left(1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi R^5}{15}.
\end{aligned}$$

11.5 Exkurs: Integration unbeschränkter Funktionen

Wir berechnen Integrale über unbeschränkte Funktionen oder unbeschränkte Mengen durch Approximation durch Integrale über beschränkte Funktionen.
Wird eine Menge A durch Teilmengen A_k ausgeschöpft (ist A unbeschränkt, so wählt man beschränkte Mengen A_k; liegen Singulärstellen der zu integrierenden Funktion in A, dann nimmt man Umgebungen dieser Stellen bei der Wahl der A_k heraus), so streben die Integrale über die Teilmengen A_k gegen das Integral über die Gesamtmenge A.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 11.37 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ eine Folge ineinander geschachtelter Mengen mit*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Weiter sei $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ auf den Teilmengen A_k integrierbar und

$$\int_{A_k} |f(x)|\, dx \leq C < \infty,$$

dann ist f auf A integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\, dx.$$

(hier ohne Beweis)

Falls ∂A eine niederdimensionale Menge, d.h. ein Menge aus endliche vielen Punkt für $n = 1$, eine Menge aus Kurvestücken oder einzelnen Punkt, dann schreiben wir auch

$$\int_{\bar{A}} f(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx\,.$$

In gleicher Weise verfahren wir, wenn wir nur Teile solcher Randmengen hinzunehmen. Ein Beispiel ist $\overline{B_1(0) \setminus \{0\}} = \overline{B_1(0)}$.

Beispiele 11.38 *(i)* $f(x) = \|x\|^{-\alpha} = r(x)^{-\alpha}$ *mit* $\alpha > 0$ *und* $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, n = 1,2,3$

Wann ist f über der Einheitskugel $B_1(0) = \{x \,|\, r(x) < 1\}$ integrierbar (Wegen obiger Bemerkung ist es gleichgültig ob wir über $B_1(0)$ oder über $B_1(0) \setminus \{0\}$ integrieren) ?

$\boxed{n = 1}$

$$\int_{-1}^{1} |x|^{-\alpha}\, dx = ?$$

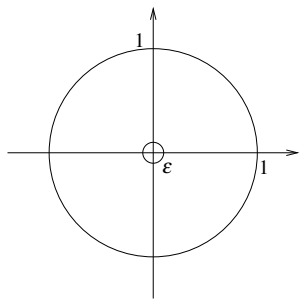
Wähle $\varepsilon = \frac{1}{k}, A_k = \{x \,|\, \varepsilon < r(x) < 1\}$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-\alpha}\, dx &= \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty \quad \boxed{\textit{falls } \alpha > 1.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha < 1} \quad \int_{\varepsilon}^{1} x^{-\alpha}\, dx \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad f \textit{ ist integrierbar.}$$

$$\boxed{\alpha = 1} \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_{\varepsilon}^{1} = -\ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty$$

$\boxed{n=2}$



$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} r(x)^{-\alpha}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<r(x)<1} r(x)^{-\alpha}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r^{-\alpha} r\,dr\,d\varphi \\
&\overset{\alpha\neq 2}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi}{2-\alpha}\left(1-\varepsilon^{2-\alpha}\right) \longrightarrow \begin{cases} \infty & ,\alpha>2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} & ,\alpha<2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha = 2$: vgl. logarithmischen Fall in $1D$

$\boxed{n=3}$

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} r(x)^{-\alpha}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_\varepsilon^1 r^{-\alpha} r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \\
&\overset{\alpha\neq 3}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_\varepsilon^1 2\pi 2 = \begin{cases} \infty & ,\alpha>3 \\ \frac{4\pi}{3-\alpha} & ,\alpha<3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha = 3$: wiederum der logarithmische Fall

Zusammenfassung: *$f(x) = r(x)^{-\alpha}$ ist genau dann integrierbar auf der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ wenn $\alpha < n$ (hier gezeigt für $n = 1,2,3$)*

(ii) Wann ist $f(x) = r^{-\alpha}$ integrierbar auf dem Außengebiet $A = \mathbb{R}^n \backslash B_1(0)$?

Wähle $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq ||x|| < k\}$:

$\boxed{n=2}$

$$\int_{A_k} r(x)^{-\alpha}\,dx = 2\pi\int_1^k r^{1-\alpha}\,dr = 2\pi\left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & ,\alpha<2 \\ \frac{2\pi}{\alpha-2} & ,\alpha>2 \end{cases}$$

Die anderen Fälle für α, n behandelt man ganz analog. Es folgt:

$f(x) = r(x)^{-\alpha}$ ist im Außengebiet genau dann integrierbar, wenn $\alpha > n$.

(iii) In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy$$

eine wichtige Rolle. Wähle $A_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^2+y^2 < k^2\right\}$:

$$\int_{A_k} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = \int_0^k\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,d\varphi\,dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^k = \pi\left(1-e^{-k^2}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi$$

(iv) *Nun betrachten wir das entsprechende Integral in 1D:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad A_k = [-k,k], \quad D_k = \int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx.$$

Wir greifen auf obiges Ergebnis zurück und erhalten:

$$D_k^2 = \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \overset{Fubini}{=} \int_{-k}^{k}\int_{-k}^{k} \underbrace{e^{-x^2}e^{-y^2}}_{=e^{-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy$$

Nun schätzen wir ab:

$$\underbrace{\int_{x^2+y^2<k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy}_{=\pi\left(1-e^{-k^2}\right)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\pi} \quad\leq\quad D_k^2 \quad\leq\quad \underbrace{\int_{x^2+y^2<2k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy}_{=\pi\left(1-e^{-(2k)^2}\right)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\pi}$$

$$\Rightarrow\quad D_k^2 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi \quad\Rightarrow\quad D_k \longrightarrow \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Damit ergibt sich das Integral über die Dichtefunktion der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tilde{x}^2}\,d\tilde{x} = 1 \qquad \left[mit\,\tilde{x} = \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma},\, dx = \sqrt{2}\sigma d\tilde{x}\right]$$

(v) *Betrachten wir nun den höherdimensionalen Fall. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Dann wissen wir dass A diagonalisierbar ist, d.h.*

$$A = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:\Lambda} Q^T,$$

wobei Q eine orthogonale Matrix ($Q^T = Q^{-1}$). Die Spalten von Q sind dabei die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ der Matrix A. Nun betrachten wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Ax\cdot x}\,dx\,.$$

Mittels der Diagonalisierung von A berechnen wir

$$\begin{aligned} Ax\cdot x &\overset{Def.\,Q}{=} \Lambda Q^T x \cdot Q^T x = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \quad \text{für } y = Q^T x. \Rightarrow \\ Dy(x) &= Q^T \Rightarrow Dx(y) = Q \Rightarrow \text{„}dx = |\det Q| dy\text{“} \end{aligned}$$

Damit können wir den Transformationssatz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Ax\cdot x}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2)} \underbrace{|\det Q|}_{=1}\,dy \\
&\qquad \left[\begin{array}{l} Q^{-1}=Q^T \Rightarrow \mathbb{1}=Q^{-1}Q=Q^TQ \\ \Rightarrow 1=\det\mathbb{1}=\det Q^T\det Q \\ \Rightarrow 1=(\det Q)^2 \Rightarrow |\det Q|=1 \end{array}\right] \\
&\overset{Fubini}{=} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y_1^2}\,dy_1\right)}_{\overset{\tilde{y}_1=\sqrt{\lambda_1}y_1}{=}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{y}_1^2}\,d\tilde{y}_1=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_1}}} \cdot\ldots\cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_n y_n^2}\,dy_n\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Ax\cdot x}\,dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$

Dieses Integral ist von grosser Bedeutung in der Statistik.

11.6 Integration über Kurven und Flächen

Wir wollen nun die Integration über „flache“ Mengen im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern zur Integration über Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$. Zunächst betrachten wir Kurven:

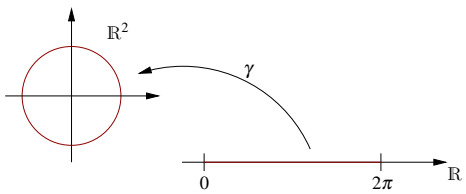
Integration über Kurven

Beginnen wir mit der Parametrisierung einer Kurve:
$I=[a,b]$ *Parameterintervall*, $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ *Kurvenabbildung*, $\Gamma=\{\gamma(t)\,|\,t\in I\}$ *Kurve*.

Beispiel 11.39

$$I=[0,2\pi],\quad \gamma(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad n=2.$$

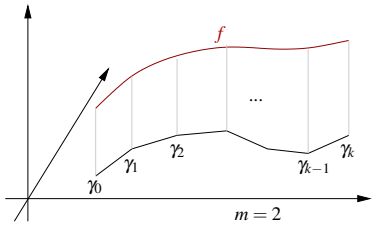
($I=[0,2\pi k]\ \cong\ k$ *Durchläufe der Kurve*)



Nun betrachten wir eine Funktion $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ und wollen das Integral von f über Γ definieren.
Solche Funktionen f sind oft nicht nur auf Γ sondern auch im umgebenden Raum $\mathbb{R}^m$ (oder zumindest in der Nachbarschaft von Γ) definiert. Wir werden nun zwei Zugänge betrachten mit dem gleichen Ergebnis.

Zugang über Riemannsummen: Wir approximieren γ durch einen Polygonzug mit Knoten $\gamma_i = \gamma(t_i)$ wobei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ eine Zerlegung des Parameterintervalls aus einer Familie mit

$$h_k = \max_{j=1,\ldots,k} |t_j - t_{j-1}| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{ist.}$$



Für $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren wir die Riemannsumme

$$I_{h_k}(f) := \sum_{j=1}^{k} f(\gamma_j)\|\gamma_j - \gamma_{j-1}\|.$$

Nun betrachten wir den Grenzübergang $k \to \infty$ und damit $h_k \to 0$. Es gilt

$$I_{h_k}(f) = \sum_{j=1}^{k} f(\gamma_j)\frac{\|\gamma_j - \gamma_{j-1}\|}{t_j - t_{j-1}}(t_j - t_{j-1}).$$

Falls γ stetig differenzierbar ist, konvergiert damit $\dfrac{\|\gamma_j - \gamma_{j-1}\|}{t_j - t_{j-1}} \overset{t_{j-1}\to t_j}{\longrightarrow} \|\dot\gamma(t_j)\|$.

Aber $\sum_{j=1}^{k} f(\gamma_j)\|\dot\gamma(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$ ist eine Riemannsumme zum Integral $\int_a^b f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\|\,dt$ und für $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig und γ stetig differenzierbar konvergiert die obige Riemannsumme gegen dieses Integral. D.h. aber $\quad I_{h_k}(f) \longrightarrow \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t_j)\|\,dt.$
Damit ergibt sich:

Definition 11.40 *Für $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ mit $I = [a,b]$ und $\Gamma = \{\gamma(t) \,|\, t \in I\}$ definieren wir*

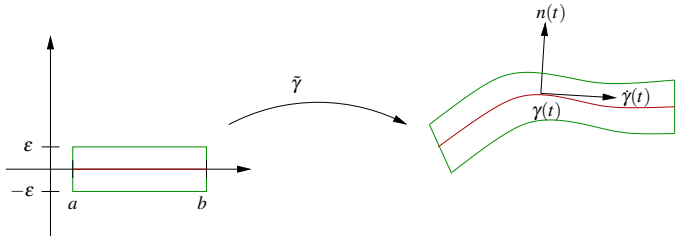
$$\int_\Gamma f\,dl := \int_I f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\|\,dt.$$

*(*Das Integral von f über die Kurve Γ.*)*

Bemerkung 11.41 *dl ist hier das sogenannte Längenelement:*

$$l(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(s)\|\,ds, \quad \dot l(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \|\dot\gamma(t)\| \quad \Rightarrow \quad \textit{Merkregel „}dl = \|\dot\gamma(t)\|dt\textit{“}.$$

Zugang über Umgebungsintegrale ($n = 2$): Statt über die Kurve zu integrieren, integrieren wir über einen schmalen Streifen der Dicke ε um die Kurve herum und dividieren dann durch die Dicke:



$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t)}} \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$$

Definiere $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^2; \quad (t,s) \mapsto \gamma(t) + sn(t)$.

Bemerkung 11.42

- *$n(t)$ ist die Normale auf der Kurve Γ ($\|n(t)\| = 1$, $n(t) \cdot \dot{\gamma} = 0$).*
- *$\tilde{\gamma}$ repräsentiert eine Familie von parallelen Kurven:*

  $\Gamma_s := \{\tilde{\gamma}(t,s) \,|\, t \in I\}, \quad \Gamma_0 = \Gamma.$

  Γ_s läuft parallel zu $\Gamma_0 = \Gamma$ mit Abstand s.

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieren wir nun:

$$I_\varepsilon(f) := \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{wobei } \tilde{\Gamma}_\varepsilon = \{\tilde{\gamma}(t,s) \,|\, t \in I, -\varepsilon \le s \le \varepsilon\} \quad = \bigcup_{s \in [-\varepsilon,\varepsilon]} \Gamma_s$$

(ε-Streifen um Γ)

Nun können wir den Transformationssatz anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} f(x)\,dx &= \int_{[a,b]\times[-\varepsilon,\varepsilon]} f(\tilde{\gamma}(t,s)) |\det D\tilde{\gamma}|\,ds\,dt \\
\text{wobei} \quad D\tilde{\gamma} &= \begin{pmatrix} | & | \\ \dot{\gamma}(t) + s\dot{n}(t) & n(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) + s\dot{n}_1(t) & n_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) + s\dot{n}_2(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \\
\text{und} \quad \det D\tilde{\gamma} &= \dot{\gamma}_1(t)n_2(t) + s\dot{n}_1(t)n_2(t) - n_1(t)\,(\dot{\gamma}_2(t) + s\dot{n}_2(t)) \\
&= \frac{\dot{\gamma}_1^2}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} - \frac{-\dot{\gamma}_2^2}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} + s \underbrace{(\dot{n}_1 n_2(t) - n_1 \dot{n}_2(t))}_{\substack{\text{beschränkt, falls } \gamma \text{ zwei-} \\ \text{mal stetig differenzierbar}}} \\
&= \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t)} + O(\varepsilon) \\
\Rightarrow \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} f(x)\,dx &= \int_{[a,b]\times[-\varepsilon,\varepsilon]} f(\tilde{\gamma}(t,s)) \|\dot{\gamma}(t)\|\,ds\,dt + 2\varepsilon O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Für γ stetig differenzierbar (d.h. $n : I \to \mathbb{R}^2$ stetig) und f stetig folgt mittels gleichmäßiger Stetigkeit von $f \circ \tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} f(x)\,dx &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_a^b f(\tilde{\gamma}(t,s))\|\dot{\gamma}(t)\|\,ds\,dt + O(\varepsilon)\\ &= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\tilde{\gamma}(t,s))\|\dot{\gamma}(t)\|\,ds\right)}_{\overset{gl.m.Konvergenz}{\longrightarrow} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|} dt + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} f(x)\,dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt \overset{(s.o.)}{=} \int_\Gamma f\,dl$$

Beispiel 11.43

(i)

Es sei $\Gamma = \{\gamma(t)\,|\,t \in [0,2\pi]\}$ *mit* $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ *(Einheitskreis), damit ist*

$$\text{Länge}(\Gamma) = \int_0^{2\pi}\|\dot{\gamma}\|\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Betrachte weiterhin $\tilde{\Gamma}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2\,|\,1-\varepsilon \le \|x\| \le 1+\varepsilon\}$, *dann folgt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} 1\,dx &= \frac{\pi(1+\varepsilon)^2 - \pi(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{2\varepsilon}(1+2\varepsilon+\varepsilon^2-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2))\\ &= \frac{\pi}{2\varepsilon}4\varepsilon = 2\pi.\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten den Halbkreis $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(\pi t)\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix}$, *dann ist die Normale* $n(t) = \begin{pmatrix}\cos(\pi t)\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix}$. *Wir definieren für einen Streifen S um den Halbkreis*

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [0,1]\times[-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t,s) &= \gamma(t) + sn(t)\\ &= (1+s)\begin{pmatrix}\cos(\pi t)\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix},\\ D\tilde{\gamma}(t,s) &= \begin{pmatrix}-\pi(1+s)\sin(\pi t) & \cos(\pi t)\\ \pi(1+s)\cos(\pi t) & \sin(\pi t)\end{pmatrix},\\ \det(D\tilde{\gamma}(t,s)) &= -\pi(1+s).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Fläche des Streifens

$$\int_S 1dx = \int_0^1\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\det Dg|ds\,dt = \int_0^1\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\pi(1+s)ds\,dt = 2\varepsilon\pi,$$

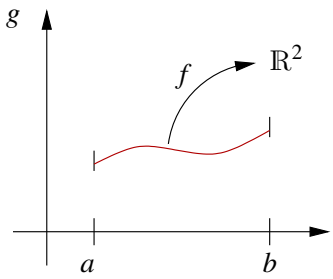
woraus sich der Wert π *für die Länge des Halbkreises ergibt.*

Integration längs Graphenkurven:

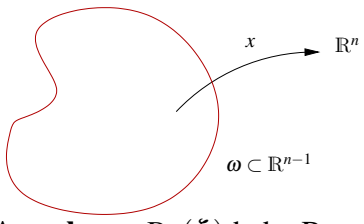
Betrachte $\gamma : I \to \mathbb{R}^2; \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$

(Graph von g über I). Dann ist

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{g} \end{pmatrix} \Rightarrow \int_\Gamma f(x)\,dl = \int_I f(t, g(t))\sqrt{1+\dot{g}^2}\,dt.$$



Integration über Hyperflächen



Betrachten wir einen Parameterbereich $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $x : \omega \to \mathbb{R}^n$ (Parametrisierung),

$$\omega \ni \xi \mapsto x(\xi), \quad Dx(\xi) \in \mathbb{R}^{n,n-1}.$$

Annahme: $Dx(\xi)$ habe Rang $(n-1)$ für alle $\xi \in \omega$ (maximal). Dann heißt

$$\Gamma := \{x(\xi) \,|\, \xi \in \omega\}$$

Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ (bzw. Hyperfläche der Dimension $n-1$).

Beispiele 11.44

(i) $\omega = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \xi = (\varphi, \vartheta) \in \omega.$

$x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$ *(vgl. Kugelkoordinaten)*

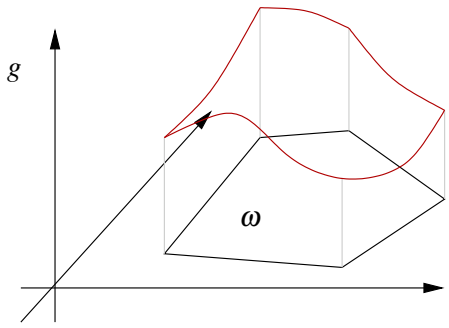
ist eine Parametrisierung der Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| = 1\}$ *außer in den Polen* $(\vartheta = \pm\frac{\pi}{2})$*:*

$$Dx(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$Dx(\varphi, \pm\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 1.$$

(ii) $\omega = I = [a, b], \quad \xi = t, \quad x(\xi) = \gamma(t)$ *mit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *ist eine eindimensionale Hyperfläche.*

(iii) **Graphenflächen**



Betrachte die Graphenfläche
$x(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ g(\xi) \end{pmatrix}$
mit $\xi \in \omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$
und $g : \omega \to \mathbb{R}$.

(vgl. Abschnitt 5.4)

$$\textit{Es gilt} \quad Dx(\xi) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \hline \nabla g(\xi) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Rang}(Dx(\xi)) = n-1.$$

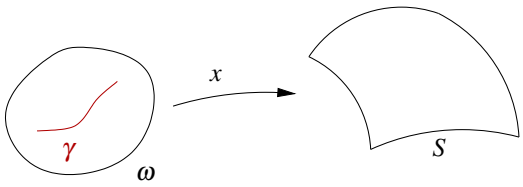
$$\begin{aligned} \textit{Konkret:} \quad & \omega = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\xi\| \leq 1\}, \quad g(\xi) = \sqrt{1-(\xi_1^2+\xi_2^2)} \\ \Rightarrow \quad & \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| = 1, x_3 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Um den Tangentialraum an eine Hyperfläche zu definieren, erinnern wir uns, dass für eine Kurvenabbildung

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

$\dot{\gamma}(t)$ ein Tangentenvektor an die Kurve ist.
Betrachten wir nun Kurven im Parametergebiet ω:

Es sei $\gamma : I \to \omega$ ein Kurve in $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.



Dann ist $x \circ \gamma : I \to S$ eine Kurve auf der Fläche S und die Ableitung nach dem Kurvenparameter t ist

$$\frac{d}{dt} x(\gamma(t)) = \underbrace{Dx(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}^{n,n-1}} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\in \mathbb{R}^{n-1}} \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist ein Vektor tangential an die Fläche.

Definition 11.45 (Tangentialraum) *Die Menge*

$$T_{x(\xi)}S = \left\{ \frac{d}{dt}(x \circ \gamma(t))\Big|_{t=0} \;\middle|\; \gamma : [-1,1] \to \omega \text{ Kurve mit } \gamma(0) = \xi \right\}$$

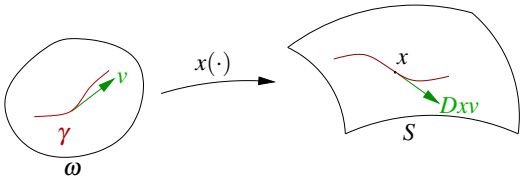
heißt Tangentialraum an S im Punkt $x(\xi) = x(\gamma(0))$,

$$T^{aff}_{x(\xi)}S = x(\xi) + T_{x(\xi)}S$$

ist der affine Tangentialraum *(vgl. Definition 5.18).*

Bemerkung 11.46

Es gilt $\quad T_xS = \{Dx\,v \mid v \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$
$\qquad\qquad = \text{Bild}\,(Dx)$



Der Tangentialraum ist also in der Tat ein Untervektorraum der $\mathbb{R}^n$. *Seine Dimension ist stets*

$$\dim(T_xS) = \dim(\text{Bild}\,(Dx)) = \text{Rang}\,(\text{Bild}\,(Dx)) = n-1.$$

Beispiele 11.47

(i) Wiederholung aus Abschnitt 5.4:

$$\text{Sei } S = G_g = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ g(\xi) \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi \in \omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\} \text{ eine Graphenfläche, dann ist}$$

$$T_{(\xi,g(\xi))}G_g = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & \nabla g(\xi) & \end{pmatrix}}_{Dx(\xi) \text{ für } x(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ g(\xi) \end{pmatrix}} v \;\middle|\; v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

$$= \left\{ v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_1} \end{pmatrix} + \ldots + v_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_{n-1}} \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

der Tangentialraum an S im Punkt $\begin{pmatrix} \xi \\ g(\xi) \end{pmatrix}$

(ii) Tangentialraum an die Sphäre: In Beispiel 11.44 haben wir für eine Parametrisierung der Sphäre

$$Dx(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

berechnet. Der Tangentialraum an die Sphäre läßt sich also in jedem Punkt außer den Polen als

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right\}$$

darstellen. Für $\varphi = \vartheta = 0$ erhält man also

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

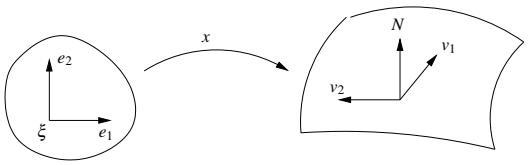
als Tangentialraum im Punkt $(1,0,0)^T$.

Der **Normalenvektor auf Graphenflächen** ist gegeben durch

$$N(x(\xi)) = \frac{\begin{pmatrix} | \\ -\operatorname{grad} g(\xi) \\ | \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\|\operatorname{grad} g\|^2 + 1}}, \qquad \text{wobei } \operatorname{grad} g(\xi) = \nabla g(\xi)^T.$$

Was ist der Normalenvektor auf beliebigen Hyperflächen?
$\boxed{n=3}$ (2-dimensionale Fläche) Die Vektoren v_1, v_2, die den Tangentialraum aufspannen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} v_1 &= Dx(\xi)e_1 \quad \text{(1. Spalte von } Dx\text{)}, \\ v_2 &= Dx(\xi)e_2 \quad \text{(2. Spalte von } Dx\text{)}. \end{aligned}$$



Damit ist $N = \dfrac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$.

Beispiel 11.48 (Graphenfall) *Ist S Graph einer Funktion g, so gilt*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 g \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 g \end{pmatrix}, \qquad v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -\partial_1 g \\ -\partial_2 g \\ 1 \end{pmatrix}.$$

allgemeine Hyperflächen, n beliebig: Hier wähle

$$N(x) = \frac{((-1)^{j+1}\det A_j)_j}{\|(-1)^{j+1}\det A_j)_j\|} = \frac{(\widetilde{N}_j)_j}{||\widetilde{N}||}, \qquad \mathbb{R}^{n,n} \ni A_j = \begin{pmatrix} \nabla x_1 \\ \vdots \\ \nabla x_{j-1} \\ \hline \nabla x_{j+1} \\ \vdots \\ \nabla x_n \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile gestrichten.}$$

Um zu sehen, dass N wirklich die Normale auf die Fläche ist, muss N orthogonal zum Tangentialraum sein, d.h. es ist zu zeigen: $\partial_i x \cdot \widetilde{N}(x) \overset{!}{=} 0$, wobei $\partial_i x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \\ | \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_i} \end{pmatrix}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ die i-te Spalte von Dx ist.

$$\begin{aligned} \text{Hierzu:} \quad \partial_i x \cdot \tilde{N}(x) &= (-1)^{(i+1)} \partial_i x_1 \det A_1 + \ldots + (-1)^{(n+1)} \partial_i x_n \det A_n \\ &\overset{\text{Def. } N(x)}{=} \det \begin{pmatrix} | & \boxed{\quad Dx \quad} \\ \partial_i x & \\ | & \end{pmatrix} \qquad \text{[Entwicklung 1. Spalte]} \\ &= 0, \quad \text{denn die Spalte } \partial_i x \text{ erscheint doppelt.} \end{aligned}$$

Beispiel 11.49 *Betrachten wir erneut die Sphäre aus Beispiel 11.44, so erhalten wir*

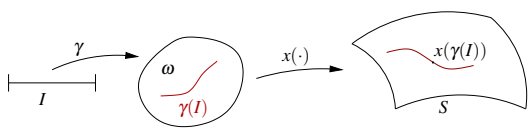
$$N(x(\varphi,\vartheta)) = \frac{1}{\cos\vartheta} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\vartheta \\ \sin\varphi\cos^2\vartheta \\ \sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Auf der Spähre mit Radius 1 ist also $N(x(\varphi,\vartheta)) = x(\varphi,\vartheta)$, d.h. die Normale an einem Punkt ist gleich dem Vektor vom Mittelpunkt zu diesem Punkt.

Längen von Kurven auf Hyperflächen:

Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_I \left\| \frac{d}{dt} x(\gamma(t)) \right\| dt \\ &= \int_I \sqrt{Dx(\gamma(t))\dot\gamma(t) \cdot Dx(\gamma(t))\dot\gamma(t)}\, dt \\ &= \int_I \sqrt{\underbrace{Dx(\gamma(t))^T Dx(\gamma(t))}_{=:G(\gamma(t))} \dot\gamma(t) \cdot \dot\gamma(t)}\, dt. \end{aligned}$$



Definition 11.50 (Metrik, Metrischer Tensor) *Die bilineare Abbildung* $g_\xi(v,w) = G(\xi)\,v\cdot w$ *mit* $G(\xi) := Dx^T(\xi)Dx(\xi)$ $(\in \mathbb{R}^{n-1,n-1})$ *heißt* Metrik *der Fläche S bzgl. der Parametrisierung $x:\omega\to\mathbb{R}^n$. Dabei ist $\xi\in\omega$ ein Punkt im Parameterbereich und $v,w\in\mathbb{R}^{n-1}$ sind Vektoren im Parameterraum, so dass $x(\xi)$ ein Punkt auf der Hyperfläche ist und $Dx(\xi)\,v$ sowie $Dx(\xi)\,w$ Tangentialvektoren. Die Matrix $G(\xi)$ heißt* metrischer Tensor.
Man schreibt oft auch einfach g bzw G, auch wenn die Metrik vom Punkt ξ abhängt.

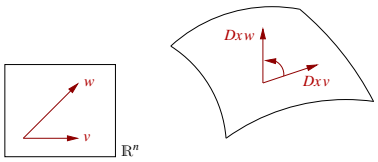
Betrachtet wir nun zwei verschiedene Kurven γ und $\tilde\gamma$ auf der Fläche mit $\xi=\gamma(0)=\tilde\gamma(0)$, dann gilt für das Skalarprodukt der beiden Tagentialvektoren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\gamma(t))|_{t=0} = Dx(\xi)\,v$ für $v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(0)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\tilde\gamma(t))|_{t=0} = Dx(\xi)\,w$ für $w=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde\gamma(0)$in $x(\xi)$ auf der Fläche:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\gamma(t))|_{t=0}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\tilde\gamma(t))|_{t=0}\cdot &= Dx(\xi)v\cdot Dx(\xi)w\\ &= Dx(\xi)^T Dx(\xi)v\cdot w = G(\xi)v\cdot w\,.\end{aligned}$$

Hierbei ist das Skalarprodukt der erste das Euklische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und das in der zweite Zeile das Euklische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{n-1}$. Damit wissen wir wie wir Längen von Tagentialvektoren und Winkel zwischen Tagentialvektoren auf der Fläche messen:

- Die Metrik erlaubt es also, Längen und Winkel von Vektoren $Dx\,v$, $Dx\,w$ im Tangentialraum an die Fläche zu messen, indem man deren Urbilder v,w im Parameterraum verwendet.

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(Dx\,v,Dx\,w) &= \frac{Gv\cdot w}{\sqrt{Gv\cdot v}\,\sqrt{Gw\cdot w}}\\ &= \frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)}\sqrt{g(w,w)}},\\ \|Dx\,v\| = \sqrt{Gv\cdot v} &= \sqrt{g(v,v)}.\end{aligned}$$



- Für die Länge der Kurve $x\circ\gamma : I\to S$ folgt

$$\text{Länge}((x\circ\gamma)(I)) = \int_I \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\,dt.$$

Beispiel 11.51 *Auf der Sphäre aus Beispiel 11.44 ergibt sich*

$$G = Dx^T Dx = \begin{pmatrix}\cos^2\vartheta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die Kurven $a(t) = \begin{pmatrix} t\\ 0\end{pmatrix}$ *im Parameterraum hat dort die Tangente* $\dot a(t) = e_1$, *die Kurve* $m(t) = \begin{pmatrix} 0\\ t\end{pmatrix}$ *die Tangente* $\dot m(t) = e_2$. *Nun ist $x\circ a$ der Äquator der Sphäre und $x\circ m$ der*

Nullmeridian (bezüglich dieser Parametrisierung). Da $G\dot{a}(0)\cdot\dot{m}(0)=0$, schneiden sich Äquator und Nullmeridian im rechten Winkel.

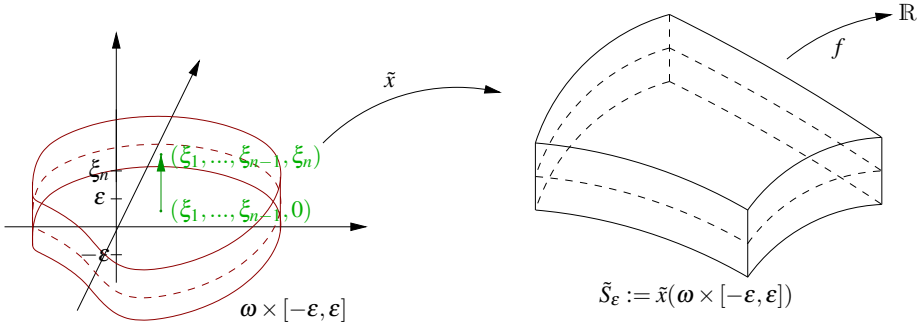
Betrachtet man den Breitenkreis zum Winkel α, $b_\alpha(t)=\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}$, so ergibt sich dessen Länge durch

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{G\dot{b}_\alpha(t)\cdot\dot{b}_\alpha(t)}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e_1\cdot e_1}dt=\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,dt=2\pi\cos\alpha.$$

Integration auf Flächen (Zugang über Umgebungsintegrale)

Zunächst dehnen wir die Parametrisierung x auf eine Umgebung von $\omega\times\{0\}$ aus:

$$\tilde{x}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n)=x(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})+\xi_n N(x(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}))$$



Sei nun $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ gegeben, dann definiere

$$\begin{aligned}\int_S f(x)\,da &:= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tilde{S}} f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\omega\times[-\varepsilon,\varepsilon]} f(\tilde{x}(\xi))\,|\det D\tilde{x}|\,d\xi \qquad \text{[Transformationssatz].}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Hierbei ist } D\tilde{x} &= \left(\begin{array}{c|c} Dx & \begin{matrix} | \\ N(x) \\ | \end{matrix} \end{array}\right)+\xi_n\left(\begin{array}{c|c} D(N\circ x) & \begin{matrix} | \\ 0 \\ | \end{matrix} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} Dx & \begin{matrix} | \\ N(x) \\ | \end{matrix} \end{array}\right)+O(\varepsilon) \\ \text{und } |\det D\tilde{x}| &= \sqrt{\det D\tilde{x}\det D\tilde{x}}=\sqrt{\det D\tilde{x}^T\det D\tilde{x}} \\ &= \sqrt{\det D\tilde{x}^T D\tilde{x}}=\sqrt{\det G(\xi)}+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$D\tilde{x}^T Dx=\begin{pmatrix} D\tilde{x}^T Dx & 0 \\ 0 & N^T N \end{pmatrix}+O(\varepsilon)=\begin{pmatrix} G(\xi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+O(\varepsilon)$$

wobei man beachte, dass $N(x) \cdot N(x) = 1$.

Satz 11.52 (Integration über Flächen) *Falls $x : \omega \to \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar und ω eine glatt berandete Menge im $\mathbb{R}^{n-1}$ ist, dann gilt*

$$\int_S f(x)\, da = \int_\omega f(x(\xi)) \sqrt{\det G(\xi)}\, d\xi. \qquad \textit{(vgl. Satz 11.30: Transformationsfomel)}$$

Bemerkung 11.53 *Statt $G(\xi) = Dx^T(\xi) Dx(\xi)$ schreibt man auch $g := G(\xi)$ für den metrischen Tensor:*

$$g(v,w) = gv \cdot w \quad \textit{mit } g \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}.$$

Beweis: [des obigen Satzes] Man sieht, dass $D\tilde{x}$ stetig ist. Der Rest ist identisch zum Kurvenfall.

□

Bemerkungen 11.54

- **Im Fall von Kurven:**

$$\begin{aligned} &\textit{Sei } \omega = I,\ x = \gamma,\ \textit{dann sind } Dx = \dot\gamma,\ Dx^T Dx = \dot\gamma^T \dot\gamma = \dot\gamma \cdot \dot\gamma \in \mathbb{R}, \\ &\sqrt{\det Dx^T Dx} = \sqrt{\dot\gamma \cdot \dot\gamma} = \|\dot\gamma\|, \\ \Rightarrow\ &\int_\Gamma f(x)\, dl = \int_I f(\gamma(t)) \|\dot\gamma\|\, dt. \end{aligned}$$

- **Im Graphenfall:** *Betrachte $x : \omega \to \mathbb{R}^n$; $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}))$, dann ist*

$$\begin{aligned} &Dx = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \hline —\nabla g— \end{pmatrix} \Rightarrow Dx^T Dx = \left(\mathbb{1} + \nabla g^T \nabla g\right), \quad \det Dx^T Dx = 1 + \|\nabla g\|^2 \\ &\Rightarrow \int_{G_g} f(x)\, da = \int_\omega f(\xi, g(\xi)) \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}\, d\xi. \end{aligned}$$

Beispiele 11.55

- **(Kugeloberfläche)**
  Mit der Parametrisierung

$$x(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

für eine Kugel vom Radius R ergibt sich die Metrik (vgl. oben)

$$G = \begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\det G} = R^2\cos\vartheta\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_S 1\,da &= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,R^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi \\ &= 2\pi R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta = 2\pi R^2(1+1) = 4\pi R^2\,. \end{aligned}$$

- **(Kugeloberfläche)** *im Graphenfall*
  Für die halbe Kugeloberfläche mit Radius R ist

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2) &= \sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}\,, \\ \nabla g(x_1,x_2) &= -\frac{1}{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \sqrt{1+\|\nabla g(x_1,x_2)\|^2} &= \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x_1^2-x_2^2}}\,. \end{aligned}$$

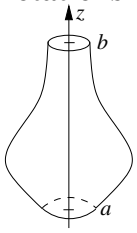
  Das Integral über die Menge $x^2+y^2 \le R^2$ berechnet man dann in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{G_g} 1\,da &= \int_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x_1^2-x_2^2}}\,dx \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-r^2}}\,r\,d\varphi\,dr \\ &= -R\,2\pi\int_0^R\frac{-2r}{2\sqrt{R^2-r^2}}\,dr \\ &= -2\pi R\sqrt{R^2-r^2}\Big|_{r=0}^{r=R} = -2\pi R(0-R) = 2\pi R^2\,. \end{aligned}$$

- **(Kugeloberfläche)** *als Limes einer Volumendifferenz*
  $S = \{\|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^3\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_3(\tilde{S}_\varepsilon) &= \frac{4}{3}\pi\left((1+\varepsilon)^3-(1-\varepsilon)^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(1+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3-(1-3\varepsilon+3\varepsilon^2-\varepsilon^3)\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(6\varepsilon+2\varepsilon^3\right), \\ \Rightarrow \mathit{Fläche}(S) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{Vol}_3(\tilde{S}_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(4\pi-\frac{4}{3}\pi\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 4\pi. \end{aligned}$$

- **Rotationsflächen**



Betrachte die Menge $S = \left\{ \begin{pmatrix} r(z)\cos\varphi \\ r(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in I,\ \varphi \in [0,2\pi) \right\}$

für eine Funktion $r : I \to \mathbb{R}, \quad I = [a,b]$.

Parametrisierung: $\quad x : I \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad x(z,\varphi) = \begin{pmatrix} r(z)\cos\varphi \\ r(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$

$$\begin{aligned}
Dx(z,\varphi) &= \begin{pmatrix} r'(z)\cos\varphi & -r(z)\sin\varphi \\ r'(z)\sin\varphi & r(z)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\textit{Metrik:} \quad g &= \begin{pmatrix} 1+r'(z)^2 & 0 \\ 0 & r(z)^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = r(z)^2(1+r'(z)^2). \\
\Rightarrow \textit{Fläche}(S) &= \int_{I\times[0,2\pi)} 1\sqrt{r(z)^2(1+r'(z)^2}\, dz\, d\varphi \\
&= 2\pi \int_I r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\, dz.
\end{aligned}$$

- **(Kugeloberfläche)** *als Rotationsfläche*
  Im Fall der Kugel sind: $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}, \quad I = [-R,R], \quad r'(z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}$.

$$\begin{aligned}
\textit{Damit folgt:} \quad \textit{Fläche(Kugel)} &= 2\pi \int_I \sqrt{R^2-z^2}\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2-z^2}}\, dz \\
&= 2\pi \int_I R\, dz = 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

Interpretation: $2\pi r(z) \cong$ *Umfang des Kreises um die Achse,*
$\sqrt{1+r'(z)^2} \cong$ *Längenelement der Kurve* $z \mapsto \begin{pmatrix} r(z) \\ z \end{pmatrix}$, *welche rotiert wird,*

$$\Rightarrow 2\pi \int r(z)\sqrt{1+r'(z)^2}\, dz = \textit{Fläche}(S).$$

Definition 11.56 (Abschluss, Inneres, Rand von Mengen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, dann definieren wir*

- *den* Abschluss *von Ω:*

$$\bar{\Omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \textit{es gibt eine Folge } (x_k)_k \subset \Omega \textit{ mit } x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \right\},$$

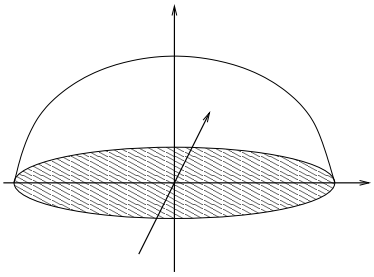
- *das* Innere *von Ω:*

$$\mathring{\Omega} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \textit{es gibt } \varepsilon > 0, \textit{ so dass } B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < \varepsilon \} \subset \Omega \},$$

- *den* Rand *von Ω:*

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \backslash \mathring{\Omega}.$$

Beispiel 11.57



$$\begin{aligned}
\textit{Sei } \Omega &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1, x_1 \geq 0 \right\}, \textit{ dann sind} \\
\bar{\Omega} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1, x_1 \geq 0 \right\}, \\
\mathring{\Omega} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1, x_1 > 0 \right\}, \\
\partial\Omega &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \textit{ und } x_1 > 0 \\
&\qquad \textit{oder } \|x\| \leq 1 \textit{ und } x_1 = 0 \}.
\end{aligned}$$

11.7 Der Satz von Gauß

Nun wenden wir uns einem wichtigen Satz der Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$ zu, dem Satz von Gauß. Dieser verallgemeinert die partielle Integration in höherer Dimension.

Wiederholung:

$$\begin{aligned}
\text{Hauptsatz} \quad &\Rightarrow \quad \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a) \\
\text{part. Integration} \quad &\Rightarrow \quad \int_a^b f(t)g'(t)\,dt = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt + [f(t)g(t)]_a^b
\end{aligned}$$

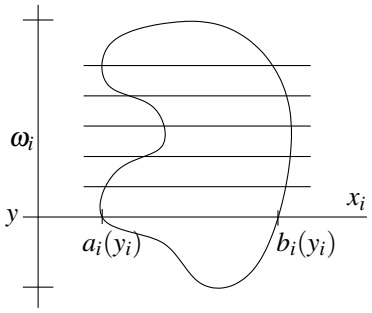
Definition 11.58 (Divergenz) *Sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann definieren wir die* Divergenz *des* Vektorfeldes *v als*

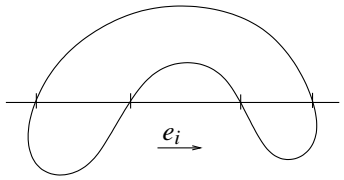
$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i(x).$$

Lemma 11.59 (Satz von Gauß für Funktionen mit Nullrandwerten) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = 0.$$

Beweis:





Es ist zu zeigen:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \int_\Omega \sum_i \partial_i v_i(x)\, dx \\
&\overset{(*1)}{=} \sum_i \int_{\omega_i} \underbrace{\left(\int_{a_i(y_i)}^{b_i(y_i)} \partial_i v_i(x)\, dx_i \right)}_{= v(b_i(y_i)) - v(a_i(y_i)) \overset{(*2)}{=} 0 - 0} dy \\
&\qquad (*1) : \text{falls es für jedes } y_i \text{ genau ein } a_i(y_i) \\
&\qquad\quad \text{und ein } b_i(y_i) \text{ gibt, wobei} \\
&\qquad\quad y_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \\
&\qquad (*2) : \text{da } v(b_i(y_i)), v(a_i(y_i)) \text{ Randwerte} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Auch wenn die Schnitte der Geraden in Richtung von e_i mehrere Teilstücke in Ω enthalten, verläuft der Beweis ganz analog.

□

Satz 11.60 (Gauß) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ eine glatte Fläche (in dem Sinn, dass der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt), mit $N(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$*

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\, da.$$

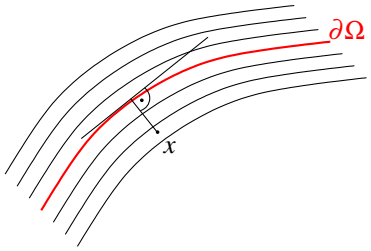
Bemerkung 11.61 *Vgl. den eindimensionalen Fall:*

$$\int_a^b f'(x)\, dx = \underbrace{f(b) - f(a)}_{\textit{Randwerte}}.$$

Beweis: Betrachten wir die Abstandsfunktion

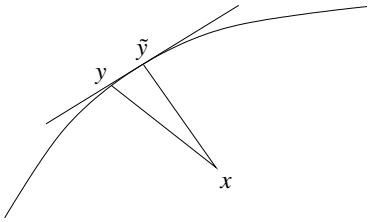
$$d : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d(x)$$

bezüglich des Randes $\partial\Omega$.



Zu $x \in \Omega$ sei $y \in \partial\Omega$ der nächste Punkt auf dem Rand $\partial\Omega$ zu x, dann gilt

$$(x-y) \perp T_y\partial\Omega, \qquad \text{d.h. } (x-y) = \pm\|x-y\|N(y).$$



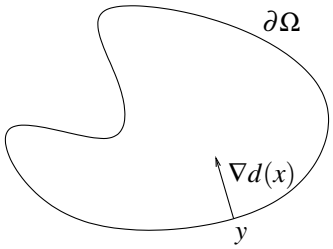
<u>Hierzu:</u> Wenn $(x-y)$ nicht senkrecht auf $T_y\partial\Omega$ stehen würde, dann gäbe es ein $\tilde{y} \in \partial\Omega$ mit $\|x-y\| > \|x-\tilde{y}\|$.

Wir nehmen hier ohne Beweis an, dass die Abstandsfunktion stetig differenzierbar ist in Ω. Erinnern wir uns an die Parallelflächenkonstruktion:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{x}(\xi,\varepsilon) & = & x(\xi) & + & \varepsilon & N(x(\xi)) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ x & & y & & d(x) & \end{array}$$

Die Parallelflächen sind die Niveauflächen von $d(.)$, $\nabla d(x)$ steht senkrecht auf der Niveaufläche $\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(\tilde{x}) = d(x)\}$. Auf $\partial\Omega$ steht $N(y)$ für $y \in \partial\Omega$ senkrecht, d.h.

$$\nabla d(y) = \pm N(y), \quad \text{da } \|\nabla d\| = 1. \qquad (*)$$



Weiterhin gilt

$$\left.\begin{array}{l} d(x) > 0 \text{ für } x \in \Omega \\ d(y) = 0 \text{ für } y \in \partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla d(y) \text{ zeigt ins Innere von } \Omega,$$

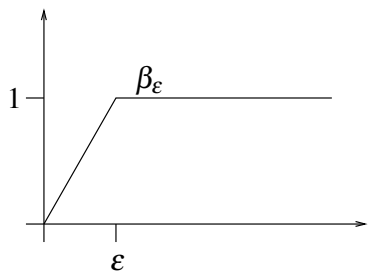
$$\Rightarrow \nabla d(y) = -N(y).$$

(*) $\quad d(y+\varepsilon N(y)) = \varepsilon, \quad \nabla d(y) || N(y) \Rightarrow ||\nabla d(y)|| = 1$

Nun betrachten wir die skalierte und abgeschnitte Abstandsfunktion

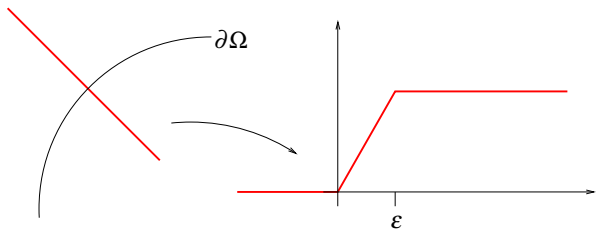
$$\eta_\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon(d(x))$$

$$\text{mit} \quad \beta_\varepsilon(d) = \begin{cases} \frac{d}{\varepsilon} \; ; \; d \le \varepsilon \\ 1 \; ; \; \text{sonst} \end{cases}.$$



$$\text{Dann ist} \quad \begin{array}{lcll} \nabla\eta_\varepsilon(x) & = & -\frac{N(x)}{\varepsilon} & \text{für} \quad x \in \partial\Omega, \\ \nabla\eta_\varepsilon(x) & = & 0 & \text{für} \quad d(x) > \varepsilon, x \in \Omega. \end{array}$$

Für $d(x) < \varepsilon$ gilt $\nabla \eta_\varepsilon = -\frac{N(y(x))}{\varepsilon}$, wenn $y(x)$ der nächste Punkt zu x auf $\partial\Omega$ ist.



Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\eta_\varepsilon(x)v(x)\right) &= \left(\partial_1\eta_\varepsilon(x)v_1(x) + \eta_\varepsilon(x)\partial_1 v_1(x)\right) + \\
&\quad + \ldots + \left(\partial_n\eta_\varepsilon(x)v_n(x) + \eta_\varepsilon(x)\partial_n v_n(x)\right) \\
&= \nabla\eta_\varepsilon(x)\cdot v(x) + \eta_\varepsilon(x)\operatorname{div} v(x)
\end{aligned}$$

Schließlich wenden wir den Satz von Gauß für Funktionen mit Nullrandwerten an:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\eta_\varepsilon(x)v(x)\right)dx = \int_\Omega \nabla\eta_\varepsilon(x)\cdot v(x)\,dx + \int_\Omega \eta_\varepsilon(x)\operatorname{div} v(x)\,dx \\
&\overset{*}{=} \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega\cap\{d(x)<\varepsilon\}} -N(y(x))\cdot v(x)\,dx}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega} -N(x)\cdot v(x)\,dx} + \underbrace{\int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x)\operatorname{div} v(x)\,dx}_{\longrightarrow \int_\Omega \operatorname{div} v(x)\,dx}
\end{aligned}$$

(*) Außerhalb von $\Omega\cap\{d(x) < \varepsilon\}$ verschwinden die Einträge.

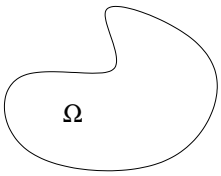
Schliesslich erhalten wir:

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} N(x)\cdot v(x)\,dx.$$

□

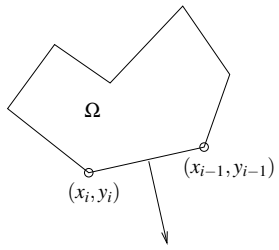
Anwendungen des Satzes von Gauß

Mit dem Satz von Gauß ist es möglich, das Volumen einer Menge Ω nur durch Integration über den Rand $\partial\Omega$ zu bestimmen:



$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}_n(\Omega) &= \int_\Omega 1\,dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{x}{n}\right)dx \qquad \left[\operatorname{div}\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\partial_1 x_1}{n} + \ldots + \frac{\partial_n x_n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} x\cdot N(x)\,da
\end{aligned}$$

$\boxed{n=2}$ Sei Ω ein polygonal berandetes Gebiet. Bezeichne mit



$(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ die Ecken des Polygons (mit $x_0 = x_n, y_0 = y_n$).
Ferner sei K_i die Kante von (x_{i-1}, y_{i-1}) nach (x_i, y_i) und N_i die Normale auf K_i, gegeben durch

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} \begin{pmatrix} -(y_i - y_{i-1}) \\ x_i - x_{i-1} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist $|K_i|$ = Länge von $K_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}(\Omega) &= \mathrm{Vol}_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x \cdot N(x)\, dl = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\int_{K_i} N_i \cdot x\, dl \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|K_i| N_i \cdot \underbrace{\frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} x\, dl}_{= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_i + x_{i-1} \\ y_i + y_{i-1} \end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(y_i - y_{i-1}) \\ x_i - x_{i-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i + x_{i-1} \\ y_i + y_{i-1} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\big[(y_i + y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1})(x_i + x_{i-1})\big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(y_{i-1}x_i - y_i x_{i-1})
\end{aligned}$$

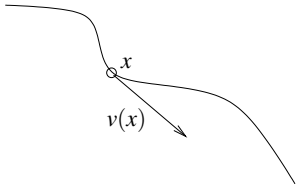
(vgl. Seite 27)

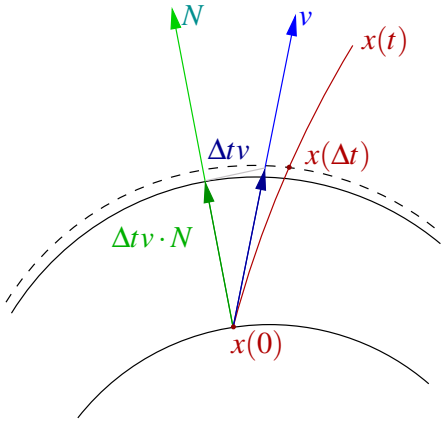
Physikalische Interpretation

Es sei v das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, d.h. Partikel des Fluids bewegen sich längs Bahnen:

$$\dot{x}(t) = v(x(t)).$$

$$\begin{aligned}
\text{Gauß: } \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\, da &= \text{Ausflussrate aus dem Gebiet } \Omega \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div} v\, dx
\end{aligned}$$





Betrachte $\delta(x) = \triangle t\, v(x) \cdot N(x)$, dann ist

$\int_{\partial\Omega} \delta(x)\, da + O(\triangle t^2) =$ Ausfluss über Zeitintervall $\triangle t$.

D.h. wenn $\operatorname{div} v = 0$ ist, dann fließt aus jedem Teilgebiet genau so viel hinaus wie hinein. Solche Strömungen nennt man *inkompressibel*.

Beispiel 11.62 *Wir betrachten den Satz von Gauß auf dem Einheitskreis $\Omega = B_1(0)$ für zwei verschiedene Geschwindigkeitsfelder.*

(i) $v(x) = x$, *d.h.* $\operatorname{div} v(x) = 2$. *Die Divergenz ist positiv, das Fluid dehnt sich also aus.* $\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = 2\pi$.

Die Flussbilanz über den Rand muss das Gleiche ergeben. Dazu parametrisieren wir den Rand mit $\gamma(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$, verwenden die Normale $N(x) = x$ an den Einheitskreis und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\, dl &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.\end{aligned}$$

(ii) $v(x) = \binom{1}{0}$, *d.h.* $\operatorname{div} v(x) = 0$. *Die Divergenz ist Null, das Fluid dehnt sich weder aus noch zieht es sich zusammen.* $\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = 0$.

Die Flussbilanz über den Rand muss also ebenfalls Null sein. Mit der selben Parametrisierung wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\, dl &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0.\end{aligned}$$

Folgerung 11.63 (Satz von Gauß für eine partielle Ableitung) *Sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann gilt*

$$\int_\Omega \partial_i f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) N_i(x)\, da,$$

wobei $N_i(x)$ die i-te Komponente der äußeren Normalen $N(x)$ auf $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Wähle das Geschwindigkeitsfeld v als

$$v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag} = f(x)e_i, \quad \text{dann ist}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \operatorname{div} v(x) & = & \partial_i f(x) \\ v(x)\cdot N(x) & = & f(x)N_i(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

□

Satz 11.64 (Partielle Integration) *Wie oben sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet, $f,g:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt*

$$\int_\Omega \partial_i f(x)g(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\partial_i g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)N_i(x)\,da.$$

(vgl. partielle Integration in 1D: Seite 216, Satz 6.20)

Beweis: Definiere $h(x) = f(x)g(x)$, dann ist $\partial_i h(x) = \partial_i f(x)g(x) + f(x)\partial_i g(x)$,

$$\overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_\Omega \partial_i f(x)g(x) + f(x)\partial_i g(x)\,dx}_{\int_\Omega \partial_i h(x)\,dx} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} f(x)g(x)N_i(x)\,da.}_{\int_{\partial\Omega} h(x)N_i(x)\,da}$$

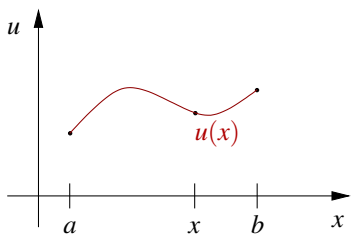
□

Anwendung: Membrankurven und -flächen

$\boxed{\text{1D:}}$ Es sei u die Funktion von $[a,b]\to\mathbb{R}$, für die

$$E[u] = \int_a^b \|u'(x)\|^2\,dx$$

minimal ist unter allen stetig differenzierbaren Funktionen mit den Randwerten $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$.

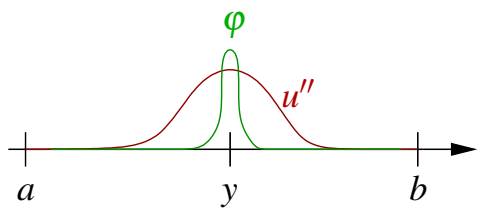


Behauptung: Falls u zweimal stetig differenzierbar ist, so gilt $u'' = 0$ auf (a,b), d.h. der Graph ist eine Gerade.

Beweis: Definiere $f(t) := E[u+t\varphi]$ für Funktion φ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, dann hat f ein Minimum für $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 0 &= \int_a^b \frac{d}{dt}\big(u'(x)+t\varphi'(x)\big)\big(u'(x)+t\varphi'(x)\big)\Big|_{t=0} dx \\
&= 2\int_a^b u'(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -2\int_a^b u''(x)\varphi(x)\,dx + \Big[u'(x)\varphi(x)\Big]_a^b = -2\int_a^b u''(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Angenommen, es gebe nun ein y mit $u''(y) > 0$ (analog < 0). Dann gibt es eine Umgebung $\{\tilde{y} \mid |\tilde{y}-y| < \delta\}$ für δ klein, so dass $u''(\tilde{y}) > 0$ ist für alle $\tilde{y}$ aus dieser Umgebung.



Wähle φ nun so, dass $\varphi = 0$ außerhalb der Umgebung und $\varphi > 0$ innen und $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

$$\Rightarrow 0 = -2\int_a^b \underbrace{u''(\tilde{y})\varphi(\tilde{y})}_{>0}\,d\tilde{y} > 0 \quad ↯$$

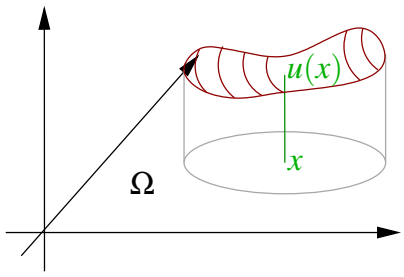
$\Rightarrow u'' \equiv 0$ auf ganz (a,b).

□

$\boxed{\text{2D:}}$ Ω sei eine offene, beschränkte Untermenge des $\mathbb{R}^2$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und

$$E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\,dx$$

sei minimal unter allen stetig differenzierbaren Funktionen mit gegebenen Randwerten auf $\partial\Omega$.



Behauptung: Falls u zweimal stetig differenzierbar ist, so gilt in Ω

$$\Delta u = 0, \quad \text{wobei } \Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u.$$

Beweis: Analog zum obigen Fall folgern wir $f'(0) = 0$ für $f(t) = E[u+t\varphi]$ $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(\nabla u + t\nabla\varphi)\cdot(\nabla u + t\nabla\varphi)\Big|_{t=0} dx \\
&= 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = 2\int_\Omega \partial_1 u\,\partial_1\varphi + \partial_2 u\,\partial_2\varphi\,dx \\
&\overset{\substack{\text{partielle Int.}\\ \varphi|_{\partial\Omega}=0}}{=} -2\int_\Omega \partial_1^2 u\,\varphi + \partial_2^2 u\,\varphi\,dx + 0 \\
&= 2\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^1(\overline{\Omega})
\end{aligned}$$

Damit folgt $-\Delta u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$.

$\square$

11.8 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 11.1 Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, und/oder beschränkt sind:

a) $B_1(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < 1\}$

b) $B_1(0) \backslash B_1((1,0,\ldots,0))$

c) $\mathbb{R}^n \backslash (B_1(0) \cup B_1((2,0,\ldots,0)))$

d) $B_1(0) \cap B_1((1,0,\ldots,0))$

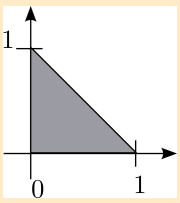
Anwesenheitsaufgabe 11.2 Bestimmen Sie das Volumen des dreidimensionalen Kegels, der durch folgende Eigenschaften gegeben ist:

- Die Spitze des Kegels liegt im Ursprung.
- Die Mittelachse des Kegels liegt auf der x-Achse.
- Der Kegel ist begrenzt durch die zur y,z-Ebene parallele Kreisebene, die ihren Mittelpunkt in $(L,0,0)$ und den Radius R hat.

Anwesenheitsaufgabe 11.3 Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2y^2$$

über das in der folgenden Zeichnung dargestellte Gebiet



Anwesenheitsaufgabe 11.4 Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy.$$

D. h. geben Sie neue Integrationsgrenzen an, so daß gilt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy.$$

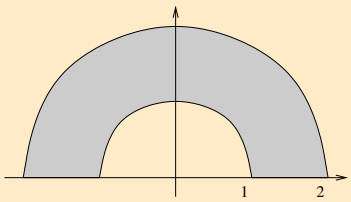
Dabei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

Anwesenheitsaufgabe 11.5 Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(0,1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

Anwesenheitsaufgabe 11.6 Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



Anwesenheitsaufgabe 11.7 Wenden Sie den Gauß'schen Integralsatz auf die Vektorfelder

$$\text{a) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

an. Zeigen Sie, dass sich auf diese Weise Formeln für den Flächeninhalt eines ebenen Gebiets ergeben.

Anwesenheitsaufgabe 11.8 Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|}\, da = 2 \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\|x\|}\, dx\,.$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

Aufgabe 11.9
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \int\limits_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy.$$

Aufgabe 11.10
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\, \sin(k(t-u))\, du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 11.11
Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6,\ \ x = 0,\ \ z = 0,\ \ x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.

Aufgabe 11.12
(a) Leiten Sie für einen Kreiszylinder mit Höhe h und Radius R des Basiskreises die Formel zur Berechnung des Volumens mittels des Satzes von Gauß her.
(b) Leiten Sie für ein Tetraeder mit den Eckpunkten $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ $(0 \leq i \leq 3)$ im $\mathbb{R}^3$ die folgende Formel für das Volumen V mit Hilfe des Satzes von Gauß her:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \right| .$$

Hinweis: Was gilt für Richtung (inklusive Vorzeichen!) und Norm des Kreuzproduktes zweier Vektoren? Erinnern Sie sich weiterhin an den Zusammenhang zwischen Determinante und Kreuzprodukt.
(c) (**Zusatzaufgabe:**) Wie würde man das Volumen eines beliebigen Polyeders im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Dreiecksoberflächen berechnen?

Aufgabe 11.13 Betrachten Sie das Sechseck, das durch die Punkte $P_1 = (2,-1)$, $P_2 = (0,-2)$, $P_3 = (-2,-1)$, $P_4 = (-2,1)$, $P_5 = (0,2)$ und $P_6 = (2,1)$ gegeben ist. Die eingeschlossene Fläche bezeichen wir mit H. Berechnen Sie die Fläche (das zweidimensionale Volumen) von H.

Aufgabe 11.14 Berechnen Sie das Volumen des Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-b)^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

mit $0 < a < b$ um die z-Achse entsteht.
Tipp: Bei einem Integranden der Form $\sqrt{a^2 - z^2}$ und Integration in der Variablen z bietet sich die Substitution $z := a\sin(t)$ an.

Aufgabe 11.15 Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

Aufgabe 11.16 Existiert das Integral

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\,dx\,dy$$

mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| < 23 \right\}$$

im Sinne des Kapitels "Integration unbeschränkter Funktionen"?

Aufgabe 11.17 Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6 \cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in $\mathrm{kg/m^3}$)

$$\rho(x) = \begin{cases} 12 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{1 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| \leq 3 \cdot 10^6, \\ 6 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{3 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| > 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K.

Aufgabe 11.18 Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in [0,10] \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z+4}{x^2+y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Aufgabe 11.19

a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5} M R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{(x,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5} M a^2$$

Aufgabe 11.20 Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0,2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

Aufgabe 11.21 Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

Aufgabe 11.22 Sie befinden sich auf der Bonner Hofgartenwiese an der Position $50°42'57''N, 7°6'16''O$ in einer Höhe von 64 Metern. Wo befindet sich (relativ zu Ihnen) der Punkt mit den kartesischen Koordinaten $Y = \begin{pmatrix} 4\,001\,331 \\ 498\,963 \\ 4\,932\,630 \end{pmatrix}$?
Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius 6371 km, berechnen Sie die Tangentialebene an die Sphäre an Ihrer Position und projizieren Sie den gesuchten Punkt orthogonal auf die Tangentialebene. Wählen Sie die Basis der Tangentialebene so, dass sie die Abstände in Nord- und Ost-Richtung direkt aus den Koeffizienten der Projektion ablesen können.

Aufgabe 11.23 Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\varphi) \\ \sin(2\pi\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0,1)$ und $h \in [0,1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1,2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1,2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Aufgabe 11.24 Betrachten Sie einen durch

$$x(\varphi,h) = \begin{pmatrix} h\cos\varphi \\ h\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0,2\pi)$ und $h \in (0,1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t,h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0,1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0,1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\varphi_0,t) \qquad \text{für festes } \varphi_0 \in [0,2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

Aufgabe 11.25 Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \cosh x$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von g zwischen den Punkten $(-1,\cosh(-1))$ und $(1,\cosh(1))$.
Tipp: $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Aufgabe 11.26 Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.
Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 + \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}$$

Aufgabe 11.27 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \le t \le 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it}+e^{-3it}+e^{it}+e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Aufgabe 11.28 Sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Aufgabe 11.29 Thema: Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$
Welche Mengen sind offen in $\mathbb{R}$?

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 5\}$ ja □ nein □

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$ ja □ nein □

c) $\{1,2,3,\dots\}$ ja □ nein □

Welche Mengen sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$?

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 5\}$ ja □ nein □

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 5\}$ ja □ nein □

f) $\{1,2,3,\dots\}$ ja □ nein □

Aufgabe 11.30 Geben Sie den Satz von Gauß an

a) einmal mit Differentialoperatoren und

b) und einmal mit ausgeschriebenen partiellen Ableitungen und ausgeschriebenem Skalarprodukt.

Aufgabe 11.31 Geben Sie die Formel für die Integration einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einer Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 11.32 Geben Sie das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 11.33 Betrachten Sie die Fläche $\mathscr{S}$, welche durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\cos v \\ (R + r\cos w)\sin v \\ r\sin w \end{pmatrix},$$

und $\Omega := [0,2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).
Berechen Sie den Flächeninhalt von $\mathscr{S}$.

Aufgabe 11.34 Betrachten Sie einen durch

$$x(\varphi,h) = \begin{pmatrix} h\cos\varphi \\ h\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0,2\pi)$ und $h \in (0,H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

12 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Wir haben in den vorgehenden Kapitel lineare Abbildungen und Matrizen, die lineare Abbildungen darstellen kennengelernt. Als spezielle Klassen von Matrizen haben wir bisher die symmetrischen Matrizen diskutiert. Nun wollen wir eine weitere wichtige Klasse von linearen Abbildungen und dazugehörigen Matrizen kennenlernen, die längenerhaltenden linearen Abbildungen. Aus ihren Eigenschaften heraus wird sich der Name orthogonale Abbildungen rechtfertigen. Wichtige Beispiele sind Drehungen und Spiegelungen, die uns bereits begegnet sind. Darüber hinaus werden wir den Zusammenhang mit schiefsymmetrischen Matrizen untersuchen.

12.1 Eigenschaften orthogonaler Abbildungen

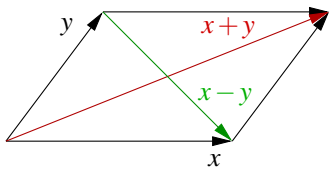
Definition 12.1 (Orthogonale Abbildung) *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt „$\cdot$“ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, dann heißt eine lineare Abbildung $f : V \to V$* orthogonal, *falls $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$ gilt (längentreue Abbildung).*

Lemma 12.2 (Winkeltreue) *Es sei $f : V \to V$ orthogonal, dann gilt $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in V$. Insbesondere gilt*

$$|\sphericalangle(f(x), f(y))| = |\sphericalangle(x, y)|.$$

Beweis: Für Skalarprodukte gilt die Parallelogrammidentität

$$x \cdot y = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$



Hierzu (Erinnerung):

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 - \left(\|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2\right).$$

Nun betrachten wir:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\| - \|f(x-y)\|\right) \\ &\overset{\text{Def. Orthog.}}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+y\| - \|x-y\|\right) \\ &= x \cdot y, \end{aligned}$$

ferner folgt aus der Definition des $\cos\sphericalangle(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$ direkt

$$\cos\sphericalangle(f(x), f(y)) = \cos\sphericalangle(x, y).$$

Die Winkel sind also bis auf das Vorzeichen gleich.

□

Definition 12.3 (Orthogonale Matrizen) *Die Matrix A_f zu einer orthogonalen Abbildung f auf einem endlich dimensionalen Vektorraum heißt* orthogonal.

Lemma 12.4 (Eigenschaften orthogonaler Matrizen) *A sei eine reelle orthogonale Matrix aus $\mathbb{R}^{n,n}$, dann gilt*

(i) $Ax \cdot Ay = x \cdot y, \quad \|Ax\| = \|x\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $v \perp w \Rightarrow Av \perp Aw$ *für alle* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(iii) *A ist invertierbar und A^{-1} ist ebenfalls orthogonal.*

(iv) $A^{-1} = A^T$.

(v) *Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis.*

(vi) *Die Zeilenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis.*

(vii) *Für einen Eigenwert λ von A gilt $|\lambda| = 1$.*

Beweis:

zu (i): Folgt direkt aus der Definition und aus Lemma 12.2

zu (ii): $v \perp w \Leftrightarrow v \cdot w = 0 \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} Aw \cdot Aw = 0 \Rightarrow Av \perp Aw$.

zu (iii): $\operatorname{Ker}(A) = \{x \,|\, Ax = 0\} \overset{\|Ax\| = \|x\|}{=} \{0\} \Rightarrow A$ invertierbar,
$\|A^{-1}x\| \overset{\text{Def.}}{=} \|AA^{-1}x\| = \|x\| \Rightarrow A^{-1}$ orthogonal.

zu (iv): $Ax \cdot y \overset{A^{-1}\text{ orthogonal}}{=} A^{-1}Ax \cdot A^{-1}y = x \cdot A^{-1}y$, ebenso gilt aber auch
$Ax \cdot y \overset{\text{Def. } A^T}{=} x \cdot A^T y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad A^T = A^{-1}$.

zu (v): $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad (\dim \mathbb{R}^n = n)$,

$a_i = Ae_i, \quad a_i \cdot a_j = Ae_i \cdot Ae_j = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1; \; i = j \\ 0; \; i \neq j \end{cases}$,

d.h. die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem.

zu (vi): A orthogonal $\Rightarrow A^T = A^{-1}$ orthogonal. Wie oben gezeigt,
bilden die Spalten von A^T ein Orthonormalsystem,
$\Rightarrow$ die Zeilen von A bilden ein Orthonormalsystem.

zu (vii): λ Eigenwert, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$. Dann folgt
$\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \overset{\|x\| \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1.$

□

Bemerkung 12.5 *Häufig (siehe auch Definition 9.11) werden orthogonale Matrizen über die Eigenschaft $A^{-1} = A^T$ definiert. Man sieht wie folgt die Äquivalenz:*

$$\begin{aligned} \textit{Es gelte } Ax \cdot Ay = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n &\overset{(iv)}{\Rightarrow} A^{-1} = A^T, \\ \textit{anders herum gelte } A^{-1} = A^T &\Rightarrow Ax \cdot Ay = x \cdot A^T Ay = x \cdot A^{-1} Ay = x \cdot y. \end{aligned}$$

Definition 12.6 (Unitäre Matrizen in $\mathbb{C}^{n,n}$) *In Abschnitt 8.4 haben wir gesehen, dass für $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ die adjungierte Matrix $\overline{A}^T$ die Rolle der transponierten Matrix einer reellen Matrizen übernimmt. Damit ergibt sich, dass für eine längenerhaltende Abbildungen f auf $\mathbb{C}^n$ für die darstellenden Matrix $A_f \in \mathbb{C}^{n,n}$ gilt*

$$A^{-1} = \overline{A}^T.$$

Solche Matrizen bezeichnet man dann als unitäre Matrizen und die Abbildungen als unitäre Abbildungen.

Satz 12.7 *$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ sei unitär (damit orthogonal falls $A \in \mathbb{R}^{n,n}$) , dann ist A diagonalisierbar als komplexe Matrix in $\mathbb{C}^{n,n}$ und alle Eigenwerte liegen auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ($|\lambda| = 1$).*

Beweis: Betrachten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\ &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \quad \text{(Fundamentalsatz der Algebra, S. 267).} \end{aligned}$$

Hier sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die n möglicherweise mehrfachen Nullstellen von $P_A(\lambda)$.
Sei v_1 Eigenvektor zu λ_1. Aus $||v_1||^2 = A^{-1}Av_1 \cdot v_1 = \bar{A}^T Av_1 \cdot v_1 = Av_1 \cdot Av_1 = |\lambda_1|^2 ||v_1||^2$ folgt dann $|\lambda_1| = 1$.
Nun definieren wir den Raum

$$V_1^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, v_1 \cdot v = 0\} = \text{span}\{v_1\}^\perp.$$

Wir zeigen nun, dass

$$A(V_1^\perp)\Big(= \big\{w \in \mathbb{C}^n \,|\, w = Av \text{ für ein } v \in V_1^\perp\big\}\Big) \subseteq V_1^\perp.$$

Dies zeigen wir wie folgt:

Es gilt $|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$. Sei nun $v \in V_1^\perp$, dann gilt
$\Rightarrow v \cdot v_1 = 0 \Rightarrow Av \cdot Av_1 = 0 \Rightarrow Av \cdot \lambda_1 v_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1(Av \cdot v_1) = 0 \overset{\lambda_1 \neq 0}{\Rightarrow} Av \cdot v_1 = 0$
$\Rightarrow Av \in V_1^\perp$.

D.h. in einer Basis $\{v_1, w_2, ..., w_n\}$ mit $w_2, ..., w_n \in V_1^\perp$ erhält man als Darstellung von A

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \longleftarrow \text{wegen } A(v_1^\perp) \subseteq V_1^\perp$$

mit $A_1 \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$.

wegen λ_1 Eigenwert mit Eigenvektor v_1

Nun zeigen wir, dass A_1 unitär ist:

$$\|A_1 v\| = \|Av\| = \|v\| \quad \text{mit } v \in V_1^\perp.$$

Wir können nun iterativ fortfahren und A_1 diagonalisieren. Wir erhalten eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ aus Eigenvektoren zu A. Daraus folgt die Behauptung.

□

Beispiele 12.8

- **Drehungen im $\mathbb{R}^2$:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \textit{(Drehung um Winkel } \alpha\textit{)} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A^T \Rightarrow A \textit{ orthogonal.} \end{aligned}$$

  Bemerkung: Drehungen sind längentreu.

- **Ebene Drehungen im $\mathbb{R}^n$:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cos\alpha & & & & -\sin\alpha & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & \sin\alpha & & & & \cos\alpha & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Drehung in der e_i, e_j-Ebene, es gilt $A^{-1} = A^T$ (s.o.). Achtung: Abhängig von der Werten von i und j kann es sich (für $n \geq 3$) um Drehungen mit unterschiedlicher Drehrichtung handeln.

- **Spiegelung im $\mathbb{R}^n$:** *Für eine Spiegelung an einer Ebene mit Normalenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ ($\|v\| = 1$) gilt*

$$\begin{aligned}
Q &= \mathbb{1} - 2vv^T \text{ für } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \text{ (v senkrecht auf der Spiegelungsebene)}, \\
Qx &= x - 2v(v \cdot x), \\
Q^T &= \mathbb{1} - 2(v^T)^T v^T = \mathbb{1} - 2vv^T = Q \quad \text{(Symmetrie)}, && (i) \\
Q^2 &= \left(\mathbb{1} - 2vv^T\right)\left(\mathbb{1} - 2vv^T\right) = \mathbb{1} - 4vv^T + 4v \underbrace{v^T v}_{=1} v^T = \mathbb{1}, && (ii) \\
&\Rightarrow Q^{-1} \overset{(ii)}{=} Q \overset{(i)}{=} Q^T \\
&\Rightarrow Q \text{ ist orthogonal.}
\end{aligned}$$

Lemma 12.9

(i) Sind A, B orthogonal, dann ist AB orthogonal.

(ii) Ist A orthogonal, dann ist $|\det A| = 1$.

Beweis:

zu (i): $(AB)^T AB = B^T A^T AB \overset{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B = B^T B \overset{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1}$
$\Rightarrow (AB)^T = (AB)^{-1} \Rightarrow AB$ ist orthogonal.

zu (ii): A orthogonal $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
(\det A)^2 &= \det(A)\det(A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A^{-1})\det(A) \\
&= \det(A^{-1}A) = \det(\mathbb{1}) = 1
\end{aligned}$$

□

Definition 12.10 (Mengen orthogonaler Matrizen) *Wir definieren*

$$\begin{aligned}
O(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \,|\, A^{-1} = A^T\}, \\
SO(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \,|\, A \in O(n),\ \det A = 1\}. \quad \text{(Drehungen)}
\end{aligned}$$

Bemerkungen 12.11

- *Für $O(n)$ gilt:*
  $A,B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n), \quad \mathbb{1} \in O(n), \quad A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n).$
  Eine Menge mit diesen Eigenschaften für eine Verknüpfung (hier die Matrizenmultiplikation) nennt man eine Gruppe. Deshalb nennt man $O(n)$ die orthogonale Gruppe.

- *Analog sieht man, dass $SO(n)$ auch eine Gruppe ist, (es gilt* $\det \mathbb{1} = 1, \det(AB) = \underbrace{\det A}_{=1}\underbrace{\det B}_{=1} = 1, \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$*), die sogenannte* spezielle orthogonale Gruppe.

Nun werden wir sehen, dass jedes $A \in SO(2)$ bereits die Gestalt $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ hat.

Hierzu nehmen wir an, dass $A^T A = \mathbb{1}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & d^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d.h. im Einzelnen}$$

$$\begin{aligned} a^2+c^2 = 1 &\Rightarrow \text{Es gibt } \alpha \in [0,2\pi) \text{ mit } a = \cos\alpha, c = \sin\alpha, \\ b^2+d^2 = 1 &\Rightarrow \text{Es gibt } \alpha' \in [0,2\pi) \text{ mit } d = \cos\alpha', b = \sin\alpha', \\ ab+cd = 0 &\Rightarrow \underbrace{\cos\alpha\sin\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha'}_{=\sin(\alpha+\alpha')} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \underbrace{\alpha+\alpha' \in \{0,2\pi\}} \\ &\alpha = \alpha' = 0 \text{ oder} \\ &\underbrace{\alpha = 2\pi - \alpha'} \\ &\sin\alpha' = -\sin\alpha \\ &\underbrace{\cos\alpha' = \cos\alpha} \\ &\Rightarrow \underbrace{A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\det A = 1} \end{aligned}$$

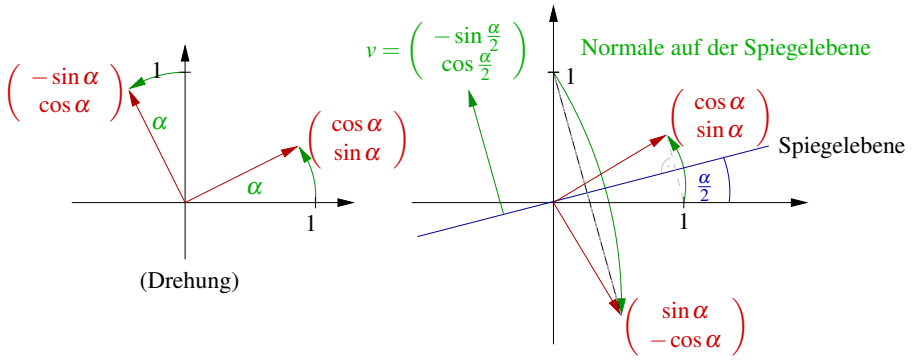
oder

$$\begin{aligned} &\underbrace{\alpha+\alpha' \in \{\pi,3\pi\}} \\ &\alpha = \pi - \alpha' \text{ oder} \\ &\underbrace{\alpha = 3\pi - \alpha'} \\ &\sin\alpha' = \sin\alpha \\ &\underbrace{\cos\alpha' = -\cos\alpha} \\ &\Rightarrow \underbrace{A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{\det A = -1} \end{aligned}$$

Wir haben also noch mehr gezeigt:

Satz 12.12

$$\begin{aligned} \textit{Ist } A \in SO(2) &\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textit{Drehung}, \alpha \in \mathbb{R}, \\ \textit{ist } A \in O(2)\backslash SO(2) &\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textit{Spiegelung}, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Das Bild des des Vektors $(0,1)^T$ unter der Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x-Achse berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cos(\frac{\alpha}{2}) \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) \\ 1-2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

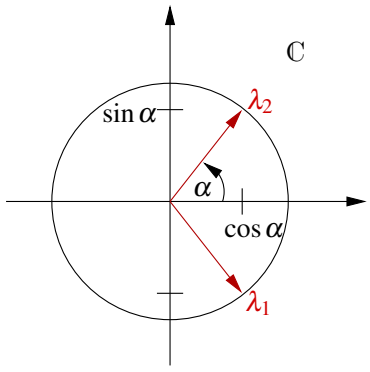
Hierbei haben wir die Additionstheoreme für sin und cos verwendet und $1-2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = -\cos(\alpha)$. Da die Abbildung A linear ist und die (geometrische) Spiegelung bzw. Drehung ebenso und A auf der Basis identisch zur Spiegelung, bzw. zur Drehung, gilt dies auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Berechnen wir nun explizit Eigenwerte und Eigenvektoren einer Drehmatrix:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \\
P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} (\cos\alpha-\lambda) & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (\cos\alpha-\lambda)^2 + \sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind:

$$\begin{aligned}
& P_A(\lambda) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\cos\alpha-\lambda)^2 = -\sin^2\alpha \\
\overset{(\pm i)^2=-1}{\Leftrightarrow}\quad & \cos\alpha - \lambda_{1,2} = \pm i\sin\alpha \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} = \cos\alpha \mp i\sin\alpha.
\end{aligned}$$



D.h. die Eigenwerte entsprechen den zu $+\alpha, -\alpha$ assoziierten Punkten auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Nun zu den Eigenvektoren:

$$
\begin{aligned}
& Ax^{1,2} = \lambda_{1,2}x^{1,2} \quad \Leftrightarrow \quad && \text{Gleichungssystem } (c = \cos\alpha, s = \sin\alpha) \\
& && Ax = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c \mp is)x_1 \\ (c \mp is)x_2 \end{pmatrix} = \lambda_{1,2}x^{1,2} \\
\Leftrightarrow \quad & \pm isx_1 - sx_2 = 0 \quad \Leftrightarrow && x_1 = \frac{1}{\pm i}x_2 \quad \left(\frac{1}{i} = -i\right) \\
& sx_1 \pm isx_2 = 0 && x_1 = \mp ix_2
\end{aligned}
$$

D.h. als Eigenvektoren erhalten wir

$$
x^1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x^2 = \begin{pmatrix} +i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{unabhängig vom Drehwinkel.}
$$

Wir sind ausgegangen von längenerhaltenden linearen Abbildungen f, mit $\|f(x)\| = \|x\|$. Im folgenden Satz werden wir sehen, dass die Linearität im Wesentlichen bereits aus der Längenerhaltung folgt, und dass die Kombination einer Translation und einer Dreh-Spiegelung der allgemeine Typus einer längenerhaltenden Abbildung ist:

Satz 12.13 (Charakterisierung längenerhaltender Abbildungen) *Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig-differenzierbare und längentreue Abbildung, d.h. $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Matrix $Q \in O(n)$, so dass*

$$
\Phi(x) = b + Qx \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n.
$$

Beweis: Definiere eine Abbildung F durch

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &:= \|\Phi(x) - \Phi(y)\|^2 - \|x - y\|^2 = 0, \quad \text{dann gilt} \\
\partial_{x_i}F(x,y) &= 2\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_i}\Phi_j(x)\big(\Phi_j(x) - \Phi_j(y)\big) - 2(x_i - y_i) = 0, \\
\partial_{y_k}\partial_{x_i}F(x,y) &= -2\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_i}\Phi_j(x)\partial_{y_k}\Phi_j(y) + 2\delta_{ik} = 0, \\
& \text{wobei } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & ; i = k \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Schreiben wir dies nun in Matrixnotation:

$$
\begin{aligned}
& \partial_{y_k}\Phi_j(y) = (D\Phi(y))_{jk}, \quad \partial_{x_i}\Phi_j(x) = (D\Phi(x))_{ji} = \big(D\Phi(x)^T\big)_{ij}, \quad \delta_{ik} = (\mathbb{1})_{ik}, \\
\Rightarrow \quad & D\Phi(x)^T D\Phi(y) = \mathbb{1} \\
\Rightarrow \quad & D\Phi(y) \text{ invertierbar und } \quad D\Phi(y)^{-1} = D\Phi(x)^T \\
\Rightarrow \quad & D\Phi(y)^{-1} \text{ ist konstant und somit auch } D\Phi(y) \equiv Q \in \mathbb{R}^{n,n}. \\
& \text{Ferner gilt } Q^{-1} = Q^T, \text{ da auch } D\Phi(x) = Q.
\end{aligned}
$$

D.h. aber, dass Φ eine affine Deformation ist mit

$$\Phi(y) = \underbrace{Qy}_{\text{orthogonale Matrix}} + \underbrace{b}_{\text{Translation}} \quad \text{mit } b = \Phi(0).$$

□

12.2 Schiefsymmetrische Matrizen als Erzeugende von Drehungen

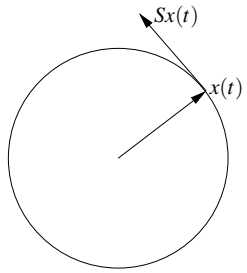
Betrachten wir nun bestimmte Familien von Drehungen. Hierzu sei $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. es gilt

$$S^T = -S \quad \left(\text{Bsp.:} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Untersuchen wir nun zu S und einem x_0 mit $\|x_0\| = 1$ das gewöhnliche Differentialgleichungsanfangsproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Sx(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Bahnkurve.



Beobachtung: Es gilt $Sx \perp x$, denn

$$\begin{aligned} & Sx \cdot x = x \cdot S^T x = -x \cdot Sx \overset{\text{Symmetrie Skalarprod.}}{=} -Sx \cdot x \\ \Rightarrow \quad & Sx \cdot x = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass für $\|x(t)\| = 1$ für alle t die ganze Kurve auf der Einheitssphäre liegt. Dies sehen wir, wie folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\dot{x}(t) \cdot x(t) = 2Sx(t) \cdot x(t) \overset{\text{s.o.}}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad & \|x(t)\| = \text{konstant} = \|x_0\| = 1. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass die Lösung die Form $x(t) = e^{tS}x_0$ hat (vgl. Kapitel 10). Hierzu rechnen wir noch einmal nach:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tS}x_0\right) = Se^{tS}x_0 = Sx(t), \\ \text{wobei} \quad & x(0) = e^{0S}x_0 = \mathbb{1}x_0 = x_0. \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$Q(t) := e^{tS} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Es gilt $Q(t)^T = \left(e^{tS}\right)^T = e^{tS^T} = e^{-tS}$ und damit $Q(t)^T Q(t) = e^{-tS}e^{tS} = \mathbb{1}$, d.h. $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine Familie orthogonaler Matrizen ($Q : \mathbb{R} \to O(n)$). Hierbei verwenden wir, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{y} = -Sy$ bei Anfangswerten $y(0) = x(t)$ den Punkt $x(t)$ wieder auf den Punkt x_0 zurückbewegt. D.h. e^{-tS} ist damit die Inverse von e^{tS}. Man kann auch alternativ zeigen, dass $e^{-tS}e^{tS} = e^{-tS+tS} = e^{0S} = \mathbb{1}$ ist. Weiterhin ist

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \dot{Q}(t) = (e^{\dot{t}S}) = Se^{tS} = SQ(t),$$

damit löst $Q(t)$ das Anfangswertproblem für Matrizen

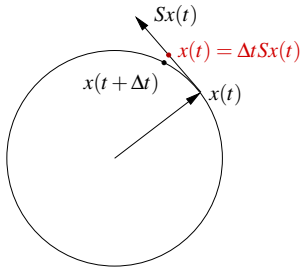
$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= SQ(t), \\ Q(0) &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\dot{Q}(0) = SQ(0) = S$,

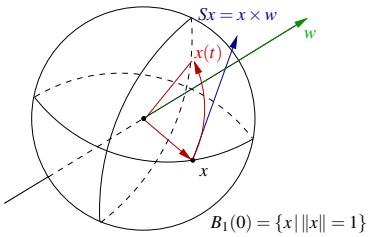
$$\Rightarrow \quad Q(\Delta t) = \mathbb{1} + \Delta t S + O(\Delta t^2),$$

und für die Bahn $x(t)$ gilt

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t S x(t) + O(\Delta t^2).$$



Man nennt S deshalb auch eine infinitesimale Drehung. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ den Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt:



$$\text{Sei } S = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$\rightsquigarrow x \times w = \begin{pmatrix} w_3x_2 - w_2x_3 \\ -w_3x_1 + w_1x_3 \\ w_2x_1 - w_1x_2 \end{pmatrix} = Sx.$$

Wenn $\|w\| = 1$ ist, dann ist $Q(t) = e^{tS}$ eine Drehung um die Achse w um den Winkel t. Hier verwendet man den zuvor diskutierten Fall einer Drehung in einer zweidimensionalen Ebene.

Betrachten wir nun den Fall einer zeitlich variierenden schiefsymmetrischer Matrix:

Es sei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n,n}$ mit $S(t)^T = -S(t)$ (d.h. wir ändern die Richtung der Drehung kontinuierlich), dann hat $\dot{x}(t) = S(t)x(t)$, $x(0) = x_0$, die Lösung

$$x(t) = e^{\int_0^t S(s)\,ds} x_0,$$

(vgl. Kapitel 10). Definieren wir nun $Q(t) := e^{\int_0^t S(s)\,ds}$, dann gilt auch hier

$$Q^T(t) = e^{\int_0^t S^T(s)\,ds} = e^{-\int_0^t S(s)\,ds} = Q^{-1}(t)$$

, da $e^{-\int_0^t S^T(s)\,ds} e^{\int_0^t S(s)\,ds} = e^{0S} = \mathbb{1}$ (vgl. obige Argumentation). D.h. auch mit dieser Bewegungsgleichung wird eine Familie von Drehungen (um eine Achse, die im Allgemeinen von t abhängt) erzeugt.

12.3 QR-Zerlegung zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Im Folgenden werden wir nun orthogonale Matrizen (speziell Spiegelungen) einsetzen um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Erinnerung: Betrachten wir noch einmal die Gaußelimination

$$
\begin{aligned}
& A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow \quad & L^{(1)}A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \text{ mit } L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & \ddots & & \\ | & & \ddots & \\ -l_{n1} & & & 1 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \quad & L^{(n-1)}L^{(n-2)}\ldots L^{(1)}A = R = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad & A = \underbrace{L^{(1)^{-1}}\ldots L^{(n-1)^{-1}}}_{=L=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & \ddots & & \\ | & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix}} R
\end{aligned}
$$

Das Lösen des Gleichungssystems geschieht dann folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad \leftrightarrow \quad & 1.\ \text{Löse } Ly = b \text{ mit Vorwärtseinsetzen,} \\
& 2.\ \text{Löse } Rx = y \text{ mit Rückwärtseinsetzen,}
\end{aligned}
$$

Nun streben wir eine Zerlegung der Form

$$A = QR$$

mit $Q \in O(n)$ und R eine rechte obere Dreiecksmatrix an. Hierzu elimieren wir wie bei der Gaußelimination spaltenweise.

Vorteile:

- Keine Zeilen- oder Spaltenvertauschungen erforderlich,
- bessere Stabilität (weniger rundungsfehleranfällig),
- kann in der Ausgleichsrechnung eingesetzt werden (s.u.),
- Verwendung zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung.

Nachteile:

- circa doppelt so viele Rechenschritte wie *LR*-Zerlegung,
- etwas aufwändigere Implementierung,
- Durchführung von Hand in der Regel deutlich aufwändiger,
- kann Bandstruktur der Matrix nicht ausnutzen.

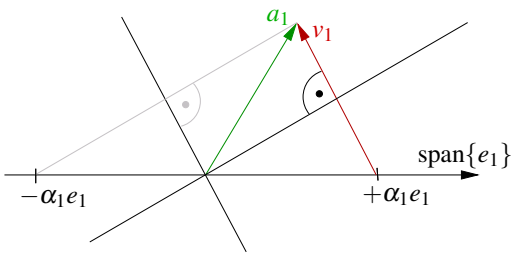
1. Schritt: Ziel: Finde eine Spiegelung $Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$, so dass für

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \text{ gilt } A^{(2)} = Q^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & | & & | \\ 0 & | & & | \\ \vdots & Qa_2 & \cdots & Qa_n \\ 0 & | & & | \end{pmatrix},$$

d.h. gesucht ist $v_1 \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q^{(1)}a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Hierzu: Es ist $Q^{(1)}a_1 = a_1 - 2\frac{v_1 \cdot a_1}{\|v_1\|^2} v_1$.

Da $Q^{(1)}$ orthogonal ist, gilt weiter: $\alpha_1 = \pm \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \pm\|a_1\|$.



Dazu muss: $v_1 \in \text{span}\{a_1 - \alpha_1 e_1\}$

Wähle: $v_1 = (a_{11} - \alpha_1, a_{21}, \ldots, a_{n1})$

Eine stabile Wahl von α_1 ist:

$$\alpha_1 = -\text{sign}(a_{11})\|a_1\|.$$

Zur Berechnung von $\mathbf{Q^{(1)}x}$:

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } \|v_1\|^2 &= (a_1-\alpha_1 e_1)\cdot(a_1-\alpha_1 e_1) = \underbrace{\|a_1\|^2}_{\alpha_1^2} - 2\alpha_1 a_{11} + \alpha_1^2 \\
&= 2\alpha_1(\alpha_1 - a_{11}), \\
\text{und damit } Q^{(1)}x &= x - 2\frac{v_1\cdot x}{\|v_1\|^2}v_1 = x + \frac{v_1\cdot x}{\alpha_1(a_{11}-\alpha_1)}v_1 \\
&= x + \frac{v_1\cdot x}{\alpha_1 v_{11}}v_1.
\end{aligned}$$

Hierbei ist v_{11} die erste Komponente von v_1. Nun iterieren wir den Eliminationsschritt: Es ergibt sich

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
\alpha_1 & & & & & \\
& \ddots & & & * & \\
& & \alpha_{k-1} & & & \\
\hline
& 0 & & | & & | \\
& & & a_k^{(k)} & \cdots & a_n^{(k)} \\
& & & | & & |
\end{array}\right), \qquad Q^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c}
\mathbb{1} & \\
\hline
& \tilde{Q}^{(k)}
\end{array}\right),$$

mit $Q^{(k)} \in O(n)$, $\tilde{Q}^{(k)} \in O(n-k+1)$ definiert über:

$$\alpha_k = -\operatorname{sign}\left(a_{kk}^{(k)}\right)\|a_k^{(k)}\|, \quad v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{kk}^{(k)} - \alpha_k \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad Q^{(k)}x = x + \frac{v_k\cdot x}{\alpha_k v_{kk}}v_k,$$

wobei v_{kk} die $k$te Komponente von v_k ist. Wir erhalten schließlich:

$$Q^{(n-1)}Q^{(n-2)}\ldots Q^{(1)}A = R = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = Q^{(1)^T}Q^{(2)^T}\ldots Q^{(n-2)^T}Q^{(n-1)^T}R \overset{Q^T=Q}{=} Q^{(1)}Q^{(2)}\ldots Q^{(n-2)}Q^{(n-1)}R.$$

Für ein Gleichungssystem $Ax = b$ ergibt sich somit:
$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^{(n-1)}Q^{(n-2)}\ldots Q^{(1)}b$

(i) Wende nacheinander die Spiegelungen $Q^{(1)}, Q^{(n-2)}, \ldots, Q^{(n-1)}$ auf die rechte Seite an: $y = Q^{(n-1)}\ldots Q^{(1)}b$. Hierbei speichert man natürlich nicht die vollen

Matrizen $Q^{(k)}$ sondern nur die α_k und die v_k (vgl. Bemerkung 12.14) und verwendet:

$$Q_k x = x + \frac{v_k \cdot x}{\alpha_k v_{kk}} v_k$$

(ii) Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Bemerkung 12.14 (Speicherschema)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} | & r_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ | & | & r_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ | & | & & \ddots & & & \vdots \\ v_1 & v_2 & & & \ddots & & \vdots \\ | & | & & & & r_{n-2,n-1} & \vdots \\ | & | & & & & v_{n-1} & r_{n-1,n} \\ | & | & & & & | & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{kann in der „alten Matrix“ gespeichert werden.}}$$

Dabei sind von den Vektoren v_j nur die Nicht-Null-Einträge gespeichert. Die R-Matrix ergibt sich aus den Einträgen r_{ij} zusammen mit den $\alpha_i = r_{ii}$, die die Diagonaleinträge von R sind:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & r_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ & \alpha_2 & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & r_{n-2,n-1} & r_{n-2,n} \\ & & & & \alpha_{n-2} & r_{n-1,n} \\ & & & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.15 *Zur Illustration berechnen wir die QR-Zerlegung der Matrix*

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{12} v_1 v_1^T$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 6 \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)}\begin{pmatrix}4\\2\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\12\end{pmatrix}-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}12 \qquad =\begin{pmatrix}8\\0\\10\end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}3&5&8\\0&3&0\\0&4&10\end{pmatrix}$$

$$\alpha_2=-5,\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}, \qquad Q^{(2)}=\mathbb{1}-\frac{1}{40}v_2v_2^T$$

$$Q^{(2)}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{40}\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}0 \qquad =\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\checkmark$$

$$Q^{(2)}\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{1}{40}\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}40 \qquad =\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\\alpha_2\\0\end{pmatrix}\checkmark$$

$$Q^{(2)}\begin{pmatrix}8\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\10\end{pmatrix}-\frac{1}{40}\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}40 \qquad =\begin{pmatrix}8\\-8\\6\end{pmatrix}$$

$$R=A^{(3)}=\begin{pmatrix}3&5&8\\0&-5&-8\\0&0&6\end{pmatrix}$$

Schema 12.16 (Algorithmus zur *QR*-Zerlegung)

```
function [A,alpha] = QRDecomposition( A )
% QR - decomposition
% argument "A" is the matrix we want to decompose

% sign, being either +1 or -1, but not 0
function sig = pmsign (val)
    if (val < 0)
        sig = -1;
    else
        sig = +1;
    end
end

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    n = size(v);
    for l = k:n
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:n
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end

% main program
% get the length of the vector
[m,n] = size( A );

for k = 1:(n-1)
    norm = 0;
    for i =k:n
        norm = norm + A(i,k)*A(i,k);
    end
    norm = sqrt(norm);
    alpha(k) = -pmsign(A(k,k)) * norm;
    A(k,k) = A(k,k) - alpha(k);
    for j = k+1:n
        A(:,j) = ApplyQ( k, alpha(k), A(:,k), A(:,j) );
    end
end

end
```

12.4 QR-Verfahren für Ausgleichsprobleme

Das QR-Verfahren kann auch auf nicht quadratische Matrizen angewandt werden. Man erhält damit eine Zerlegung:

$$A = QR \quad \text{mit}\, Q \in O(m), \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{kk} \\ & 0 & \end{pmatrix}, \quad k = \min(m,n).$$

Hierbei kann $r_{ii} = 0$ sein für $i = 1, ..., k$.

Damit kann die QR-Zerlegung auch zum Lösen von Ausgleichsproblemen eingesetzt werden, wie wir im folgenden diskutieren werden. Betrachten wir das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit}\, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n \text{ gesucht.}$$

Für $m > n$ haben wir also mehr Gleichungen als Unbekannte und das Gleichungssystem ist im Allgemeinen nicht lösbar.

Beispiel 12.17 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ *ist lösbar, genau dann wenn $a = 2$ ist.*

Deshalb suchen wir stattdessen $x \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$\|Ax - b\|^2 = \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\tilde{x} - b\|^2 \quad \textit{(Problem der kleinsten Quadrate).}$$

Als notwendige Bedingung erhalten wir:

$$\nabla \underbrace{\|Ax - b\|^2}_{(Ax-b)\cdot(Ax-b)} = 0 \overset{\text{Produktregel}}{\Leftrightarrow} A^T Ax - A^T b = 0.$$

$$\left(\partial_i \sum_{j,k} (A_{jk}x_k - b_j)^2 = 2\sum_{j,k} (A_{jk}x_k - b_j)A_{ji} = 2\sum_{j,k} A^T_{ij}(A_{jk}x_k - b_j) \to \text{Beh.} \right)$$

Schließlich folgt: $\underbrace{A^T A}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} x = \underbrace{A^T b}_{\in \mathbb{R}^n}$.

Satz 12.18 (Normalengleichung) *Das Problem der kleinsten Quadrate ist eindeutig lösbar, genau dann wenn* $\operatorname{Rang}(A) = n$ *ist. Die Lösung ist dann bestimmt durch die Normalengleichung*

$$A^T A x = A^T b.$$

Beweis: Es ist $A^T A \in \mathbb{R}^{n,n}$, d.h. zu zeigen bleibt, dass $A^T A$ injektiv ist. Es gilt

$$A^T A x = 0 \Rightarrow A^T A x \cdot x = 0 \Rightarrow 0 = Ax \cdot Ax = \|Ax\|^2 \overset{A \text{ max. Rg.}}{\Rightarrow} x = 0.$$

□

Es sei $\operatorname{Rang}(A) = n$ für $A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte die QR-Zerlegung von A:

$$A = QR \quad \text{mit } Q \in O(m), R \in \mathbb{R}^{m,n}.$$

$$\begin{aligned}
\|Ax - b\|^2 &= \|Q^T(Ax - b)\|^2 \quad \text{da } Q^T \in O(m) \\
&\overset{\substack{R=Q^{-1}A \\ =Q^TA}}{=} \|Rx - Q^T b\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q^T b \end{pmatrix} \right\|^2
\end{aligned}$$

Unterteile $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 = \mathbb{R}^{m-n}$. Dann ist

$$\left\| \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} - b_1 \right\|^2 + \|0 - b_2\|^2,$$

Der erste Summand wird offenbar Null (und damit die Summe minimal, da beide Summanden nicht-negativ sind, und der zweite Summand konstant), wenn x die Gleichung

$$\begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} x = b_1$$

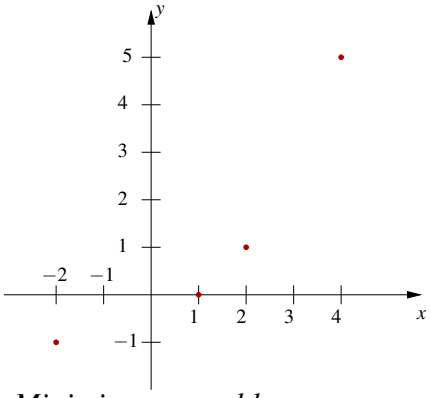
löst, (lösbar, da $\operatorname{Rang}(A) = n \Rightarrow r_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$). Damit ergibt sich also $\|Ax - b\|^2 = \|b_2\|^2$, d.h. mit der QR-Zerlegung bestimmt man sowohl die Lösung des Problems der kleinsten Quadrate, als auch das sogenannte Residuum $\|Ax - b\|$.

Erläuterung: QR-Verfahren bewirkt Projektion des Problems in den Spaltenraum von A mittels Q^T (vgl. STAT III).

Beispiel 12.19 (Lineare Regression)

Gesucht ist eine affine Funktion $y(x) = \alpha x + \beta$, die möglichst gut die folgende $x-y-$Zuordnung approximiert:

x_i	-2	1	2	4
y_i	-1	0	1	5



Mit dem Ansatz der kleinsten Quadrate ergibt sich das Minimierungsproblem:

$$\|Ax-b\|^2 \to \min \quad \textit{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} [(\alpha x_i + \beta) - y_i]^2 \to \min .$$

Dies führt auf die Normalengleichungen:

$$A^T A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T b \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{15},$$

$$\alpha = (24 - \frac{5}{15})/25 = \frac{23\frac{2}{3}}{25} = \frac{71}{75}.$$

Achtung: *Für $\alpha = 1, \beta = 0$ gilt $|x_i - y(x_i)| = 1$ für $i = 1,2,3,4$, dennoch ist die Lösung des Problems der kleinsten Quadrate*

$$y(x) = \frac{71}{75}x + \frac{1}{15}.$$

Wir suchen eine affine Funktion $y(x) = \alpha x + \beta$, die möglichst gut die folgende Zuordnung approximiert:

x_i	-10	-3	6	9
y_i	-19	7	19	73

Dazu minimieren wir $\|Ax-b\|^2$ mit

$$x = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 19 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Für die Normalengleichung ergibt sich

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 226 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 80 \\ 940 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Stattdessen kann man das Minimierungsproblem auch direkt mit der QR-Zerlegung von A lösen:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = -2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{6} v_1 v_1^T$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-18) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} b = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 19 \\ 73 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (42) = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 12 \\ 66 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 12 \\ 66 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = -15, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{225} v_2 v_2^T$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} b^{(2)} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 12 \\ 66 \end{pmatrix} - \frac{1}{225} \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} (12 \cdot 75) \qquad = \begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \alpha = 4, \beta = 18$$

Mit der Funktion $y(x) = 4x + 18$ ergeben sich nun die folgenden Funktionswerte:

x_i	-10	-3	6	9
$y(x_i)$	-22	6	42	54
y_i	-19	7	19	73

Das Quadrat des Residuums ist also einerseits

$$(22-19)^2 + (7-6)^2 + (42-19)^2 + (73-54)^2 = 3^2 + 1^2 + 23^2 + 19^2 = 900,$$

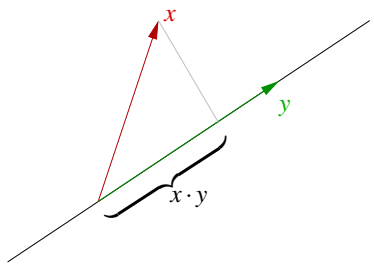
andererseits

$$\|b_2\|^2 = 24^2 + 18^2 = 900.$$

12.5 Orthogonale Projektion und Orthonormalisierung

Zur Erinnerung: Es gelte $\|y\| = 1$, dann ist

$$x - (x \cdot y)y \perp y.$$



Hierzu:
$(x - (x \cdot y)y) \cdot y = x \cdot y - (x \cdot y)\|y\|^2 = 0.$
$(x \cdot y)y$ ist die Projektion von x auf $\operatorname{span}\{y\}$ und es gilt

$$\|x - (x \cdot y)y\| \leq \|x - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } \tilde{y} \in \operatorname{span}\{y\}.$$

Notwendige Bedingung für $\|x - ty\|^2 \leq \|x - \tilde{y}\|^2$ für $\tilde{y} \in \operatorname{span}\{y\}$ ist eine Extremstelle bei t. Dieses kann nur das Minimum sein:

$$0 = \frac{d}{dt}\|x - ty\|^2 = -2(x - ty) \cdot y = -2(x \cdot y - t\|y\|^2) \Rightarrow t = x \cdot y.$$

Nun betrachten wir den allgemeineren Fall in folgendem Satz:

Satz 12.20 (Orthogonale Projektion) *Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum eines Vektorraums V über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt, dann heißt die Abbildung $P : V \to U$ mit $(v - Pv) \perp U$* orthogonale Projektion. *Die Abbildung P ist eindeutig definiert und linear. Ferner gilt*

$$\|v - Pv\| \leq \|v - u\| \quad \textit{für alle } u \in U.$$

Beweis:

(i) Zur Eindeutigkeit: u_1, u_2 seien Vektoren aus U mit $v - u_1 \perp U$ und $v - u_2 \perp U$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (v - u_1) \cdot u - (v - u_2) \cdot u = 0 - 0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \big[(v - u_1) - (v - u_2)\big] \cdot u = 0 \quad \text{für alle } u \in U, \\
&\Rightarrow \quad (u_2 - u_1) \cdot u = 0 \quad \text{für alle } u \in U, \\
&\overset{u_2, u_1 \in U}{\Rightarrow} \quad u_2 = u_1.
\end{aligned}$$

(ii) Zur Linearität: Es gelte $(v_1 - Pv_1) \cdot u = 0, \quad (v_2 - Pv_2) \cdot u = 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
& (\alpha v_1 - \alpha P v_1) \cdot u = 0, \quad (\beta v_2 - \beta P v_2) \cdot u = 0 \quad \text{für alle } u \in U, \\
\Rightarrow \quad & [(\alpha v_1 + \beta v_2) - (\alpha P v_1 + \beta P v_2)] \cdot u = 0 \quad \text{für alle } u \in U, \\
& \text{Hierbei haben wir verwendet, dass} \quad \alpha P v_1 + \beta P v_2 \in U. \\
\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} \quad & P(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha P v_1 + \beta P v_2.
\end{aligned}$$

(iii) Minimalitätseigenschaft: Zu zeigen ist $\|v-(Pv+tu)\|^2 \overset{!}{\geq} \|v-Pv\|^2$.

$$\begin{aligned} \text{Hierzu: } \|v-(Pv+tu)\|^2 &= \|(v-Pv)-tu\|^2 \\ &= \|v-Pv\|^2 - 2t\underbrace{(v-Pv)\cdot u}_{=0\,\text{nach Def.}} + \underbrace{t^2\|u\|^2}_{\geq 0} \geq \|v-Pv\|^2. \end{aligned}$$

□

Wir zeigen hier nicht die Existenz einer solchen Abbildung. Bisher haben wir nur für eindimensionale Untervektorräume $U = \text{span}\{y\}$ mit $\|y\| = 1$ durch $Pv = (v \cdot y)y$ die Abbildung P explizit angegeben und damit ihre Existenz bewiesen.

Lemma 12.21 *Falls $\{u_1,..,u_k\}$ eine Orthonormalbasis von U ist ($u_j \cdot u_i = 0$ für $i \neq j, \|u_i\|^2 = 1$ für alle i), so gilt*

$$Pv = (v \cdot u_1)u_1 + ... + (v \cdot u_k)u_k.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $(v-Pv)$ für oben angegebenes Pv senkrecht zu allen Basisvektoren u_i steht. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit der Projektion.

Es gilt: $(v-Pv)\cdot u_i \overset{u_i \cdot u_j = 0, i \neq j}{=} v \cdot u_i - (v \cdot u_i)\underbrace{\|u_i\|^2}_{=1} = 0 \overset{\text{Satz 12.20}}{\Rightarrow}$ Beh.

□

Beispiel 12.22

$$U = \text{span}\{u_1, u_2\}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\| = \|u_2\| = 1,$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v - Pv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Orthonormale Basen spielen also eine besondere Rolle:
Frage: Wie gewinnt man aus einer Basis eine Orthonormalbasis?

Das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben seien m linear unabhängige Vektoren $a_1, a_2, ..., a_m$.

Verfahren: $\boxed{\text{1ter Schritt}}$ $v_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$,

$\vdots$

$\boxed{k\text{ter Schritt}}$ Abzug der Richtungsanteile in Richtung von$v_1, \ldots, v_{k-1}$:
$\tilde{v}_k = a_k - (a_k \cdot v_1)v_1 - \ldots - (a_k \cdot v_{k-1})v_{k-1}$,
Normierung:
$v_k = \dfrac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}, \quad k = 2, ..., m.$

Satz 12.23 *Die so konstruierten Vektoren $v_1, ..., v_m$ bilden eine Orthonormalbasis von* $\operatorname{span}\{a_1, ..., a_m\}$.

Beweis: Zu zeigen ist:

- Orthogonalität: Diese folgt induktiv. Nehmen wir an, dass $v_i \cdot v_j = 0$ für alle $i, j < k$, Nun zeigen wir $v_k \cdot v_j = 0$ wie folgt

$$v_k \cdot v_j = \frac{1}{\|\tilde{v}_k\|}\big((a_k \cdot v_j) - (a_k \cdot v_j)(v_j \cdot v_j)\big) = \frac{1}{\|\tilde{v}_k\|}\big((a_k \cdot v_j) - (a_k \cdot v_j)\big) = 0.$$

- $\|v_k\| = 1$ folgt aus Konstruktion
- $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_k\}$ folgt ebenfalls aus Konstruktion

□

Beispiele 12.24 *(i) Es seien* $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *dann sind*

$$v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{9}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) **Orthogonale Polynome** *(vgl. Bemerkung 7.48)*
Als Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome betrachten wir

$$g(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Nun fragen wir nach einer orthogonalen Basis des Unterraums $\mathscr{P}_2$ = Polynome vom Grad ≤ 2. Dazu betrachten wir die Monome $a_0 : x \mapsto 1, a_1 : x \mapsto x, a_2 : x \mapsto x^2$ und wenden das Orthonormalisierungsverfahren an:

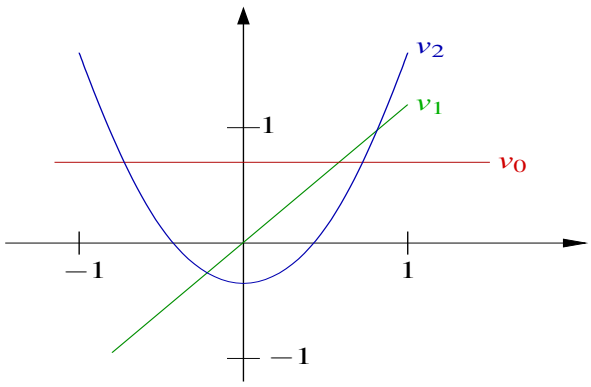
$$\|a_0\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2\,dx} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{v}_1(x) = x - \left(\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}}\,dx\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = x \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}\right)^{-1} x = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

$$\tilde{v}_2(x) = x^2 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}\,dx\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}x^3\,dx\right)\sqrt{\frac{3}{2}}x = x^2 - \frac{1}{3} + 0,$$

$$v_2 = \left(\sqrt{\underbrace{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}}\right)^{-1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$



Zusammenhang mit der QR-Zerlegung

Die QR-Zerlegung liefert im Fall $m = n$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & & | \\ & & \ddots & | \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & a_1 = r_{11}v_1 \\
& a_2 = r_{12}v_1 + r_{22}v_2 \Leftrightarrow r_{22}v_2 = a_2 - r_{12}v_1 \\
& \vdots \\
& r_{kk}v_k = a_k - r_{1k}v_1 - r_{2k}v_2 - \ldots - r_{k-1,k}v_{k-1}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir (durch Multiplikation mit v_j for $j = 1, \ldots, k-1$) den Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \|a_1\|, \\
r_{12} &= (a_2 \cdot v_1),\ r_{22} = \|\tilde{v}_2\| \\
r_{jk} &= (a_k \cdot v_j), \text{ für } j = 1, \ldots, k-1 \\
r_{kk} &= \|\tilde{v}_k\|.
\end{aligned}$$

D.h. die Koeffizienten der Gram-Schmidtschen Orthogonalisierung sind die Einträge der R-Matrix und die Spalten von Q die orthogonalisierten Vektoren.

Aus dem Lemma 12.21 und dem konstruktiven Orthonormalisierungsverfahren zum Satz 12.23 folgt direkt:

Satz 12.25 (Zusatz zum Projektionssatz) *Falls U endlich dimensional ist, dann sichert das Orthonormalisierungsverfahren die Existenz der Projektion $P : V \to U$.*

Bemerkung 12.26 *Der Satz gilt auch generell für abgeschlossene Unterräume $U \subset V$, die unendlich dimensional sein können (ohne Beweis).*

12.6 Fourier-Entwicklung und FFT

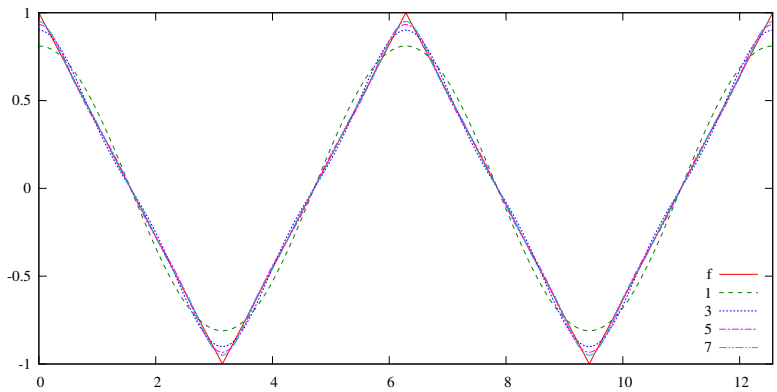
Die Fourier-Entwicklung erlaubt es, Schwingungen in ihr Frequenzspektrum zu zerlegen, d.h. zu identifizieren, welche Frequenzen in welcher Amplitude in der Schwingung vorkommen. Dazu stellt man die periodische Schwingung als Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz dar.

Fourier-Reihenentwicklung Wir betrachten zunächst den umgekehrten Fall, d.h. die Überlagerung mehrerer Kosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen zu einer periodischen (aber nicht mehr sinusförmigen) Schwingung (Fourier-Synthese).

Beispiel 12.27 *Die Funktion f sei die Überlagerung der Funktionen* $\cos(x)$, $\cos(3x)$ *und* $\cos(5x), \ldots$ *mit den Gewichten* $\frac{8}{\pi^2}, \frac{8}{\pi^2 3^2}, \frac{8}{\pi^2 5^2}, \ldots$, *d.h.*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{8}{\pi^2}\cos(x) + \frac{8}{\pi^2 3^2}\cos(3x) + \frac{8}{\pi^2 5^2}\cos(5x) + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) \qquad \textit{mit } a_k = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}, & \textit{falls } k \textit{ ungerade,} \\ 0, & \textit{falls } k \textit{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Grafik zeigt die ersten Partialsummen der unendlichen Reihe und den Grenzwert f.



Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Funktion f und den Koeffizienten der Kosinus-Terme? Dazu multiplizieren wir die Reihe mit $\cos(lx)$ für $l = 1,3,5,\ldots$ und integrieren

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(lx)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx\,.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhält man nun

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)\,dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx = \pi, & \textit{falls } k = l, \\ = 0, & \textit{falls } m \neq n, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\textit{denn} \int_0^{2\pi} \cos(mx)\,dx = \frac{1}{m}\sin(mx)|_0^{2\pi} = 0 \qquad \textit{für } m \neq 0.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(lx)\,dx = \pi a_l,$$

wir können also die Koeffizienten a_l aus der Funktion f durch Integration mit der passenden Kosinus-Schwingung bestimmen.

Man kann nachweisen, dass sich die (ebenfalls periodische) Grenzfunktion f auch folgendermaßen beschreiben lässt:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x + 1 & x \in [0,\pi), \\ \frac{2}{\pi}x - 3 & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi) & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Damit lässt sich nun die Formel für a_1 (und analog $a_2, a_3, \ldots$) verifizieren:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)\cos(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{2}{\pi}x-3\right)\cos(x)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx + \frac{2}{\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi} x\cos(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x) - \frac{3}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx - x\sin(x)|_0^{\pi}\right) - \frac{2}{\pi^2}\left(\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\,dx - x\sin(x)|_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sin(x)|_0^{\pi} - \frac{3}{\pi}\sin(x)|_{\pi}^{2\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\cos(x)|_0^{\pi} + 0 + \frac{2}{\pi^2}\cos(x)|_{\pi}^{2\pi} + 0 + 0 + 0 = \frac{2}{\pi^2}(2+2) = \frac{8}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Man kann $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ hier als Skalarprodukt für stetige, 2π-periodische Funktionen f und g verstehen. Im Sinne dieses Skalarproduktes sind die Funktionen $\cos(x)$, $\cos(3x)$, $\cos(5x)\ldots$ dann also orthogonal (und haben Norm $\sqrt{\pi}$).
Eine Partialsumme der obigen Reihe ist daher eine orthogonale Projektion der Funktion f im Sinn von Lemma 12.21, die Skalierung $\frac{1}{\pi}$ ergibt sich aus der Tatsache, dass die Basisfunktionen $\cos(x), \cos(3x), \cos(5x)\ldots$ nicht normiert sind.

Welche Basisfunktionen muss man nun wählen, um möglichst viele periodische Funktionen in dieser Weise darstellen zu können?

Satz 12.28 (Fourier-Entwicklung) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Dann ist*

$$f(x) = a_0\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \text{ und } b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

(ohne Beweis)
Man kann also nicht nur aus harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen andere periodische Schwingungen zusammensetzen (Fourier-Synthese), sondern auch umgekehrt alle (Lipschitz-stetigen) periodische Funktionen in ihre harmonischen Anteile unterschiedlicher Frequenzen zerlegen (Fourier-Entwicklung).

Bemerkung 12.29 *Die Funktionen*

$$\mathscr{B} = \{\frac{1}{2}, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots, \sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \ldots\}$$

sind im Sinne des Skalarproduktes

$$(f,g)_{L^2} := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

alle orthogonal zueinander und haben jeweils die Norm $\sqrt{\pi}$. Dass man alle Lipschitz-stetigen periodischen Funktionen durch Funktionen aus $\mathscr{B}$ darstellen kann und die Koeffizienten sich durch das Skalarprodukt ergeben, bedeutet also, dass $\mathscr{B}$ in einem geeigneten Sinne eine bzgl. $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ orthogonale (aber nicht normierte) Basis des Raums aller Lipschitz-stetigen periodischen Funktionen ist.

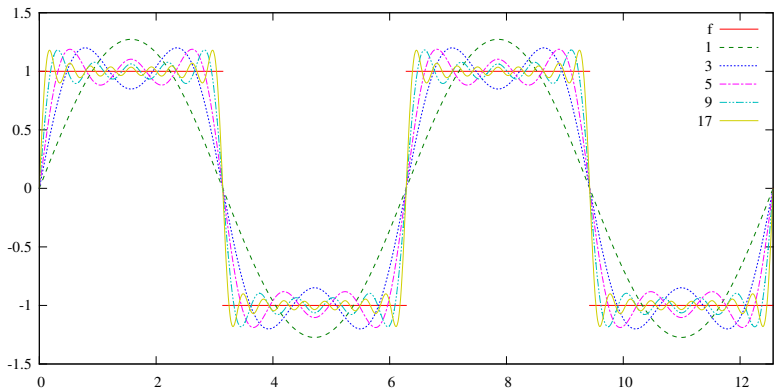
Auch für viele unstetige Funktionen konvergiert die Fourier-Entwicklung. In der Regel kann man aber keine gleichmäßige Konvergenz erwarten.

Beispiel 12.30 (Gibbs-Phänomen) *Wir betrachten die Funktion*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,\pi), \\ -1 & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x-2k\pi) & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten bemerken wir zunächst, dass aus Symmetriegründen alle $a_k = 0$ sind.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\cos(kx)|_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}(\pm 1 - 1) + \frac{1}{k}(1-(\pm 1))\right) \text{ (+1, falls k gerade)} \\ &= 0, \text{ falls k gerade;} \\ &= \frac{4}{\pi k}, \text{ falls k ungerade.} \end{aligned}$$



Der maximale Abstand zwischen g und den Fourier-Approximationen entspricht dem Überschwinger vor und nach der Sprungstelle. Dieser wird zwar beliebig schmal und rückt beliebig nahe an die Sprungstelle heran, der Abstand zur Grenzfunktion g wird aber nie kleiner als 0,17.

Schnelle Fouriertransformation (fast Fourier transform, FFT) Wir wenden uns nun der effizienten Berechnung der Fourier-Koeffizienten zu. Dazu betrachten wir Partialsummen der Fourier-Reihe. Da wir nachher die Menge der Basisfunktionen rekursiv in zwei Hälften aufteilen wollen, sollte die Anzahl der Summanden gerade sein, wir wählen hier $\frac{1}{2}, \cos(x), \cos(2x), \ldots \cos(nx), \sin(x), \sin(2x), \ldots \sin((n-1)x)$.
Statt durch Sinus und Kosinus lässt sich diese Summe auch mit der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(x) = a_0 \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(kx) = \sum_{k=-n+1}^{n} c_k \exp(ikx).$$

Dabei gilt $\bar{c}_k = c_{-k}$ für $1 < k < n$; c_0 und c_n sind reell. Die Koeffizienten a_k, b_k kann man aus den c_k zurückgewinnen:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } 1 < k < n \qquad \text{sowie} \quad a_0 = 2c_0 \text{ und } a_n = c_n.$$

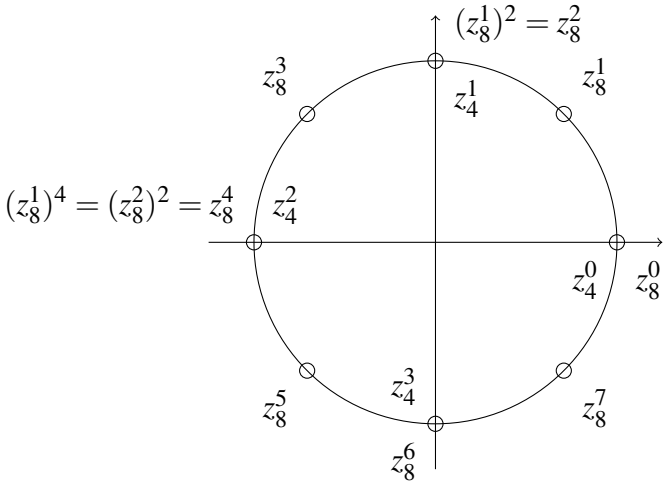
Um eine gegebene Funktion f nun durch eine solche Summe zu approximieren, kann man (anstatt die Integrale zur Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k auszuwerten) auch eine Interpolationsaufgabe lösen. (Achtung: Man erhält dadurch die Fourier-Koeffizienten für eine Funktion, die an den Knoten die durch f vorgegebenen Werte annimmt. Wir bezeichnen dies zur Unterscheidung auch als Fourier-Interpolation. Die Koeffizienten sind nämlich nicht exakt die Koeffizienten der Fourier-Entwicklung von f, siehe Beispiel 12.31 unten.)
Dazu betrachten wir $2n$ Knoten $x_j = \frac{2\pi j}{2n}$, $j = 0, 1, \ldots 2n-1$ mit gleichem Abstand und suchen Koeffizienten c_k, so dass

$$f(x_j) = \sum_{k=-n+1}^{n} c_k \exp(ikx_j) = \sum_{k=-n+1}^{n} c_k \left(\exp(ix_j)\right)^k = \sum_{k=-n+1}^{n} c_k (z_{2n}^j)^k,$$

wobei $z_{2n}^j = \exp(ix_j) = \exp\left(i\frac{2\pi j}{2n}\right)$ die komplexen Einheitswurzeln sind. Wir erhalten also eine Polynominterpolation in $\mathbb{C}$ zu den (reellen) Werten $f(x_j)$ an den (komplexen) Knoten z_{2n}^j.

Offensichtlich gilt für die Einheitswurzeln

$$z_n^j = z_n^{j+n},$$
$$(z_n^j)^k = z_n^{jk} \quad \text{und}$$
$$\sum_{j=0}^{2n-1} z_{2n}^{jk} = \begin{cases} 2n & \text{falls } k=0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Inabesondere gilt also für die Summanden mit negativem Index

$$c_{-k}(z_{2n}^j)^{-k} = c_{-k}z_{2n}^{-jk} = c_{-k}z_{2n}^{-jk+j\cdot 2n} = c_{-k}(z_{2n}^j)^{2n-k},$$

also können wir die Summe statt von $-n+1$ bis n auch von 0 bis $2n-1$ laufen lassen, die Rolle von c_{-k} übernimmt dann der Koeffizient c_{2n-k}:

$$f(x_j) = \sum_{k=-n+1}^{n} c_k(z_{2n}^j)^k = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k(z_{2n}^j)^k \text{ mit } c_{-k} = c_{2n-k}.$$

Achtung: Die Koeffizienten und die Funktionswerte an den Interpolationsknoten stimmen überein, für andere Werte von x haben die beiden Interpolierenden jedoch unterschiedliche Funktionswerte. Da die Koeffizienten gleich sind, ist es für die Berechnung der a_k, b_k aber egal, welche Variante wir benutzen.

Multiplizieren wir nun in dieser Darstellung $f(x_j)$ mit der Einheitswurzel z_{2n}^{-jl} und summieren über j, so erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j)z_{2n}^{-jl} = \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} c_k z_{2n}^{jk} z_{2n}^{-jl} = \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} c_k z_{2n}^{j(k-l)} = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \left(\sum_{j=0}^{2n-1} z_{2n}^{j(k-l)}\right) = c_l \cdot 2n.$$

Die Summe in der Klammer hat nämlich den Wert $2n$, falls $k=l$ ist, und Null sonst. Also bleibt von der Summe über k nur der Summand l übrig.

Insgesamt gilt also, dass die Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j)z_{2n}^{-jk} \quad \text{das Interpolationsproblem} \quad f(x_j) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k(z_{2n}^{jk}) \text{ lösen.}$$

Diese Überlegungen verliefen analog zur Herleitung der Koeffizienten a_k, b_k oben. In der Tat kann man die Summe zur Berechnung der c_k als Approximation der Integrale zur Berechnung der entsprechenden a_k und b_k interpretieren.
Nun gilt für komplexe Einheitswurzeln die Kürzungsregel $z_{2n}^{2j} = z_n^j$, außerdem ist $z_n^j = z_n^{j+n}$ und $z_{2n}^j = -z_{2n}^{j+n}$. Für $k = 2l$ ergibt sich also die Formel

$$\begin{aligned}
2n \cdot c_{2l} &= \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) z_{2n}^{-2jl} = \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) z_n^{-jl} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) z_n^{-jl} + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+n}) z_n^{-(j+n)l} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(x_j) + f(x_{j+n}) \big) z_n^{-jl} \qquad \text{sowie} \\
2n \cdot c_{2l+1} &= \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) z_{2n}^{-j(2l+1)} = \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) z_n^{-jl} z_{2n}^{-j} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) z_n^{-jl} z_{2n}^{-j} + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+n}) z_n^{-(j+n)l} z_{2n}^{-(j+n)} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(x_j) - f(x_{j+n}) \big) z_{2n}^{-j} z_n^{-jl}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten einer Fourier-Interpolation mit $2n$ Punkten entsprechen also den Koeffizienten zweier Fourier-Interpolationen mit jeweils n Punkten. Sind dabei $f(x_j)$ die Knotenwerte an den $2n$ Punkten, so sind $f(x_j) + f(x_{j+n})$ und $\big(f(x_j) - f(x_{j+n})\big) z_{2n}^{-j}$ die Knotenwerte der beiden n-Punkte-Interpolationen. Wenn n eine Zweierpotenz ist, kann man diese Zerlegung wiederholen, bis man bei Fourier-Interpolationen mit einem Knoten angekommen ist. Dort entsprechen die Knotenwerte den Koeffizienten.
Durch eine solche rekursive Zerlegung lassen sich die Koeffizienten (für sehr große n) deutlich effizienter berechnen. Diese Verfahren bezeichnet man als schnelle Fouriertransformation (fast Fourier transform, FFT).

Beispiel 12.31 *Wir betrachten die Funktion f aus Beispiel 12.27 und berechnen die Koeffizienten zu acht Knoten. Dazu beginnen wir mit den gegebenen Funktionswerten $f(x_j)$ an acht Knoten, und teilen diese durch die obigen Formeln in zwei Interpolationen mit ja vier Knoten auf. Die ersten vier Werte sind jeweils die Summe zweier Knotenwerte $f(x_j) + f(x_{j+4})$ und gehören zu den Koeffizienten mit gerader Nummer. Die zweite Vierergruppe gehört zu den ungeraden Koeffizienten. Dort sind die neuen Werte die Differenz zweier Knotenwerte $f(x_j) - f(x_{j+4})$, zusätzlich mit den Einheitswurzeln z_8^0, z_8^{-1}, z_8^{-2} bzw. z_8^{-3} multipliziert.*
In einem zweiten Schritt wird jede Vierergruppe in zwei Zweiergruppen (wiederum eine mit Summen, eine mit Differenzen der Knotenwerte) zerlegt. Jetzt müssen die Differenzen mit

den vierten Einheitswurzeln z_4^0 und z_4^{-1} multipliziert werden. Als drittes werden schließlich die Zweiergruppen jeweils in eine Summe und eine Differenz zerlegt.
Es ergeben sich also acht Interpolationen mit nur einem Knoten, für die also der Knotenwert gleich dem Koeffizienten ist. Aufgrund der Zerlegungseigenschaft sind das aber (bis auf den Faktor 8) die Koeffizienten der ursprünglichen Zerlegung.
Man kann die Rechnung bequem wie folgt in einem Tableau notieren:

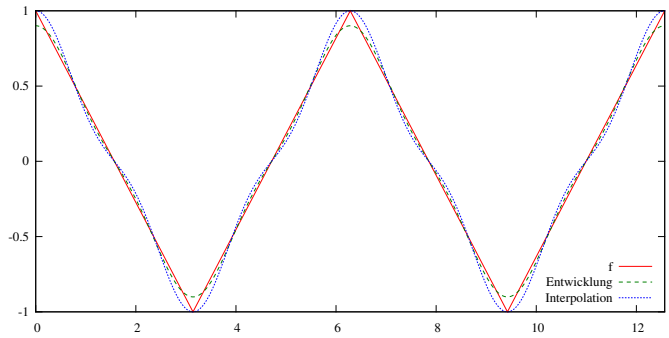
Index	*8 Knoten*	$2\cdot 4$ *Knoten*	$4\cdot 2$ *Knoten*	$8\cdot 1$ *Knoten*		*Index*
000	$f(0\frac{\pi}{4}) = 1$	$\oplus\ 0$	$\oplus\ 0$	$\oplus\ 0$	$= 8c_0$	*000*
001	$f(1\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$	$\oplus\ 0$	$\oplus\ 0$	$\ominus\ 0$	$= 8c_4$	*100*
010	$f(2\frac{\pi}{4}) = 0$	0	$\ominus\ 0$	$\oplus\ 0$	$= 8c_2$	*010*
011	$f(3\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$	0	$\ominus\ 0 \quad \cdot z^2$	$\ominus\ 0$	$= 8c_6$	*110*
100	$f(4\frac{\pi}{4}) = -1$	$\ominus\ 2$	2	$2+\sqrt{2}$	$= 8c_1$	*001*
101	$f(5\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$	$\ominus\ 1 \cdot z$	$(z-z^3) \quad = \sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$= 8c_5$	*101*
110	$f(6\frac{\pi}{4}) = 0$	$0 \cdot z^2$	2	$2-\sqrt{2}$	$= 8c_3$	*011*
111	$f(7\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$	$-1\cdot z^3$	$(z+z^3)\cdot z^2 = -\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$= 8c_7$	*111*

Dabei ist $z = z_8^{-1} = \exp(-\frac{2\pi i}{8}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ die der ersten Zerlegung zugrunde liegende Einheitswurzel, d.h. die Faktoren bei den Funktionswert-Differenzen sind z^0, z^1, z^2, z^3. In der zweiten Zerlegung ergeben sich daher $(z^2)^0, (z^2)^1$, etc.
Dabei notieren wir in jedem Zerlegungsschritt erst die geraden, dann die ungeraden Koeffizienten. Dadurch stehen die Summe und die Differenz genau in der selben Zeile wie ihre beiden Summanden. Bei der Implementierung im Rechner können wir also stets genau die beiden gerade verwendeten Werte überschreiben.
Allerdings verändert sich dadurch die Reihenfolge der Einträge. Die Nummern der Koeffizienten in der letzten Spalte (nachdem wir die rekursive Zerlegung bis zum Ende durchgeführt haben) erhalten wir durch Spiegeln der Binärdarstellung der Indizes (ganz links und ganz rechts im Tableau).
Für die gegebene Funktion f erhalten wir

$$a_1 = c_1 + c_7 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}), \qquad a_3 = c_3 + c_5 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}),$$

alle anderen a_k und b_k sind Null.
Die folgende Grafik vergleicht die Fourierentwicklung der Funktion f mit der Interpolation durch schnelle Fouriertransformation, jeweils bis zum Term $\cos(3x)$. Die Koeffizienten der Fourierentwicklung sind $a_1 \approx 0{,}811$ und $a_3 \approx 0{,}090$, die der Interpolation $a_1 \approx 0{,}854$ und

$a_3 \approx 0{,}146$. Beim Erhöhen der Ordnung wird der Unterschied zwischen den Koeffizienten der Reihe und der Interpolierenden geringer. Bei einer Interpolation mit 16 Knoten ergibt sich z.B. $a_1 \approx 0{,}821$ und $a_3 \approx 0{,}101$, mit 32 Knoten $a_1 \approx 0{,}813$ und $a_3 \approx 0{,}093$.



Mit dem selben Ansatz kann man auch die Summe $f(x_j) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k(z_{2n}^{jk})$ zur Auswertung der Interpolation an den Knoten bei gegeben Koeffizienten (Fourier-Synthese) berechnen.

12.7 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 12.1 Betrachten Sie die folgenden Rotationen einer Sphäre S : Man drehe S um die y-Achse um den Winkel $\pi/2$, anschließend macht man dieselbe Operation um die z-Achse und rotiert zum Schluss nocheinmal um $\pi/2$ um die x-Achse.

a) Schreiben Sie die Matrix zu jeder Operation auf.

b) Geben Sie die Matrix von der gesamten Operation an.

c) Was hat man eigentlich getan?

Anwesenheitsaufgabe 12.2 Betrachte die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie sie in der Form

$$\dot{P} = AP + b \tag{17}$$

wobei A eine 3×3 Matrix ist, und

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Interpretieren Sie die Form (17) der Differentialgleichung und die Lösung.

c) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung.

Anwesenheitsaufgabe 12.3 Betrachten Sie die fünf Punkte

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	1	0	1	2

und bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige quadratische Polynom p, das diese Punkte am besten approximiert. Verwenden Sie hierzu die Normalengleichung.

Anwesenheitsaufgabe 12.4 Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an.

Anwesenheitsaufgabe 12.5 Orthonormalisieren Sie die Polynome

$$p_0 : t \mapsto 1 \quad p_1 : t \mapsto t \quad p_2 : t \mapsto t^2$$

bezüglich des Skalarprodukte $g(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ auf den Interval $[0,1]$.

Anwesenheitsaufgabe 12.6 Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine orthogonale Matrix handelt.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante.

c) Handelt es sich um eine Drehung oder um eine Spiegelung?

Anwesenheitsaufgabe 12.7 Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ so, daß

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

Berechnen Sie den Wert der Funktion f an dieser Stelle.

Anwesenheitsaufgabe 12.8

a) Geben Sie die Matrix A an, die eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$ in der xy-Ebene beschreibt.

b) Geben Sie die Matrix B an, die eine Rotation um π in der yz-Ebene beschreibt.

c) Berechnen Sie AB.

d) Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert der Matrix AB ist. Geben Sie einen zugehörigen normierten Eigenvektor an.

e) Ergänzen Sie diesen zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

f) Berechnen Sie die darstellende Matrix zu der Abbildung $x \mapsto ABx$ bezüglich dieser Basis.

g) Um welche Art von Matrix handelt es sich?

Anwesenheitsaufgabe 12.9 Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$a_1 = (1,1,0,0)^T, \quad a_2 = (1,0,1,0)^T \quad a_3 = (0,0,1,0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 12.10 Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja □ nein □

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja □ nein □

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja □ nein □

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja □ nein □

e) Jede Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja □ nein □

Aufgabe 12.11 Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

Aufgabe 12.12 Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

Aufgabe 12.13

a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\varphi := \angle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\varphi := \frac{x \cdot y}{||x|| \; ||y||}$, gleich dem Winkel $\psi := \angle(Ax,Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$\angle(Ax,Ay) = \angle(x,y)$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil $a)$ kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

Aufgabe 12.14 Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 12.15 Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

Aufgabe 12.16 Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja □ nein □

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja □ nein □

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja □ nein □

Aufgabe 12.17 Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, dass für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad \text{und} \quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.18 Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen mit Hilfe von Spiegelungen. Berechnen Sie dabei nur die Matrix R und die Matrizen $Q^{(k)}$. Die Matrizen $Q^{(k)}$ können sie entweder explizit oder in der Form $Q^{(k)} = \mathbb{1} - cvv^T$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ angeben.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie den Rang der Matrizen A und B an.

d) Verwenden Sie die QR-Zerlegung, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = d$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Aufgabe 12.19

a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

b) Lösen Sie deshalb das Approximationsproblem

$$\|Ax - b\|^2 \to \min!$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung von A.

Aufgabe 12.20

a) Schreiben Sie eine Matlab Funktion *QRSolve(A,b)*, die unter Verwendung der Funktion *QRDecomposition* aus der Vorlesung das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

b) Testen sie diese Funktion anhand der Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c) Erweitern Sie die Funktion *QRSolve* zu einer Funktion, die lineare Ausgleichsprobleme für nichtquadratische Matrizen A lösen kann.

d) Testen Sie diese Funktion anhand des Beispiels

$$\|Ax - b\|^2 \to \min$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.21 Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v,w) = \int_0^\pi v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \; x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \; x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot,\cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$

Aufgabe 12.22 Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen
Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja □ nein □

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja □ nein □

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja □ nein □

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja □ nein □

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$. ja □ nein □

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja □ nein □

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja □ nein □

Aufgabe 12.23 Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist $v = 0$. ja □ nein □

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i) u_i$. ja □ nein □

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$. ja □ nein □

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)^2$. ja □ nein □

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)^2$. ja □ nein □

Aufgabe 12.24 Thema: Normalengleichungssystem
Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T Ax = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung. ja □ nein □

b) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt. ja □ nein □

c) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit. ja □ nein □

d) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$. ja □ nein □

Aufgabe 12.25

a) Was ist die Definition einer orthogonalen linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

b) Wann ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal?

Aufgabe 12.26 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 12.27 Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

Aufgabe 12.28

a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von g an.

b) Angenommen die Funktion g wäre nun π periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?

c) Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

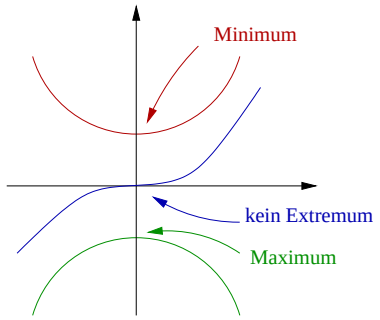
$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten b_k aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnugn von a_2: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Warum gilt dies?).

13 Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$

Betrachten wir zunächst ein paar Beispiele:



Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

$f'(x) = 0$ ist notwendige Bedingung für ein lokales Minimum oder Maximum in x.

Taylorentwicklung: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}D^2 f(x)h^2 + o(h^2)$, falls f zweimal stetig differenzierbar ist.

Satz 13.1 (hinreichende Bedingung) *Eine Funktion f sei zweimal stetig differenzierbar in x mit $f'(x) = 0, f''(x) \overset{(<)}{>} 0$, dann hat f in x ein lokales Minimum (Maximum).*

Beweis: Es gilt $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h^2} \overset{f'(x)=0}{=} \dfrac{f''(x)}{2} + \underbrace{\dfrac{o(h^2)}{h^2}}_{\substack{h\to 0 \\ \longrightarrow 0}} \overset{(<)}{>} 0$ für h klein genug,

$\Rightarrow f(x+h) \overset{(<)}{>} f(x)$ für alle $h < \overline{h} \ll 1 \Rightarrow$ Beh.

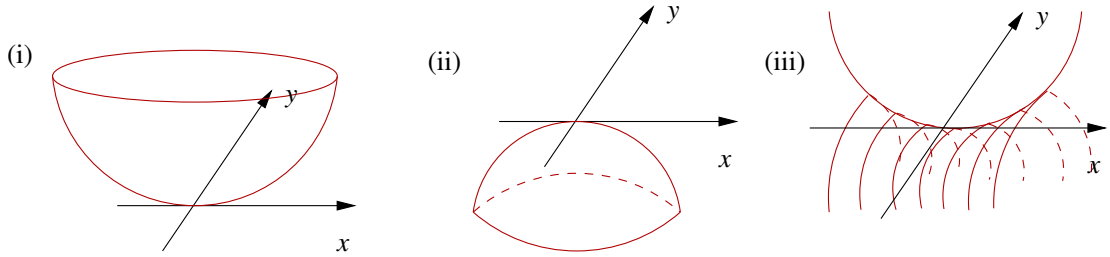
$\square$

Betrachten wir nun f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**:**

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, offensichtlich gilt $f(0,0) \leq f(x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\quad D\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Die Eigenwerte von $D\operatorname{grad} f$ sind positiv. Dies ist eine Verallgemeinerung von $f''(x) > 0$ in 1D.

(ii) $f(x,y) = -(x^2+y^2) \leftrightsquigarrow D\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Es gilt $f(0,0) \geq f(x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und die Eigenwerte von $D\operatorname{grad} f$ sind negativ.

(iii) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad D\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, d.h. die Eigenwerte haben unterschiedliches Vorzeichen. Für die Funktion gilt $f(0,0) \geq f(0,y)$ und $f(0,0) \leq f(x,0)$.

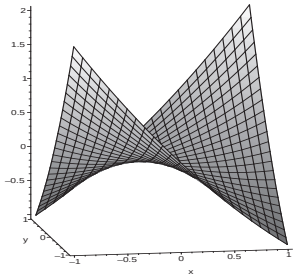


Minimum Maximum Sattelpunkt

Beispiel 13.2 $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}xy + \frac{y^2}{4}$.

Betrachten wir zunächst das Verhalten von f in bestimmten Richtungen, hierfür definieren wir $g(t) := f(tv,tw)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(v,w) = (1,0) &\rightsquigarrow g(t) = \frac{t^2}{4}, \\
(v,w) = (0,1) &\rightsquigarrow g(t) = \frac{t^2}{4}, \\
(v,w) = (1,1) &\rightsquigarrow g(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^2}{4} = 2t^2, \\
(v,w) = (1,-1) &\rightsquigarrow g(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^2}{4} = -t^2.
\end{aligned}$$



Wie vermeidet man das „Testen“ aller Richtungen? Es gilt

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}xy + \frac{3}{4}xy + \frac{y^2}{4},$$

$$D\operatorname{grad} f(x,y) = D \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}x + \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2A.$$

A ist symmetrisch, also diagonalisierbar:

$$A = QDQ^T, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei $Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *einem Wechsel des Koordinatensystems entspricht.*

$\Rightarrow$ *In Richtungen* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, *welche den Spalten von Q und damit den Zeilen von $Q^T = Q^{-1}$ entsprechen, erhalten wir*

$$f\left(t\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)=t^2,\ bzw.\ f\left(t\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)=-\frac{t^2}{2}.$$

Durch die Wahl des neuen Koordinatensystems passend zur Diagonalisierung der Matrix $A = 2D\mathrm{grad}\, f(0,0)$ ist die Form des Graphen von f leicht erkennbar.
Beachten Sie: Die Eigenvektoren von A stehen in den Spalten von Q, denn

$$A = QDQ^T \Rightarrow AQ = QD\,,$$

also spielt Q die Rolle der Matrix U in Satz 9.12.

13.1 Zweite Ableitung und Hesse-Matrix

Betrachten wir nun allgemein zweite Ableitungen von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
Die erste Ableitung von f in x definiert sich als die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+v) = f(x) + Df(x)(v) + o(v) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Wir schreiben $\nabla f(x)$ für die Matrix zu $Df(x)$ mit $\nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x), ..., \partial_{x_n} f(x))$ als Zeilenvektor, dann gilt

$$f(x+v) = f(x) + \partial_{x_1} f(x) v_1 + ... + \partial_{x_n} f(x) v_n + o(v).$$

Nun ist $\mathrm{grad}\, f : x \mapsto \mathrm{grad}\, f(x)$ eine Funktion von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $\mathrm{grad}\, f(x) = \nabla f(x)^T$. Wenn nicht nur f differenzierbar ist, sondern auch wieder $\mathrm{grad}\, f$, dann erhalten wir

$$\mathrm{grad}\, f(x+w) = \mathrm{grad}\, f(x) + D\mathrm{grad}\, f(x) w + o(w).$$

Hier ist $D\mathrm{grad}\, f(x)$ die Jacobi-Matrix zur Funktion $\mathrm{grad}\, f(x)$. Wir schreiben auch $D^2 f(x)$ und nennen die Matrix hierzu die *Hessematrix* zu f an der Stelle x:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1}\partial_{x_1}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_n}\partial_{x_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_1}\partial_{x_n}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_n}\partial_{x_n}} \end{pmatrix}.$$

Interpretation der Hesse'schen als Bilinearform:
$Df(x)(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung. Für festes $v \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(\cdot)(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Falls diese wieder differenzierbar ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} & Df(x+w)(v) = Df(x)(v) + (D(Df)(x))(v)(w) + o(w) \\ \text{wobei} \quad & D(Df)(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad (v,w) \mapsto (D(Df)(x))(v)(w). \end{aligned}$$

Für $(D(Df)(x))(v)(w)$ schreiben wir auch $D^2f(x)(v,w)$. Nach Definition von Df und $D(Df)(x)$ ist $D^2f(x)(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform, d.h. linear in v und w. In Koordinaten erhalten wir:

$$D^2f(x)(e_i,e_j) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}.$$

Die Hesse-Matrix ist die Darstellung dieser Bilinearform im euklidischen Skalarprodukt:

$$D^2f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}} v_i w_j = D^2f(x)v\cdot w\,.$$

Hierbei schreiben wir $D^2f(x)$ sowohl für die Matrix aller zweiten Richtungsableitungen $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$, als auch für die Bilinearform die hinter der zweiten Ableitung steckt. D.h. wir nutzen für die lineare Abbildung und für die sie darstellende Matrix in der quadratischen Form des Skalarprodukts das selbe Symbol.
Notationskonvention: $\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}$ bedeutet, dass f zuerst in Richtung e_i, dann ich Richtung e_j abgeleitet wird. Demzufolge bezieht sich in D^2f der Zeilenindex auf die erste, der Spaltenindex auf die zweite Ableitung. In der Schreibweise $D^2f(x)(v,w)$ wird zuerst in Richtung v, dann in Richtung w abgeleitet.
Der folgende Satz sagt jedoch, dass diese Unterscheidung in den meisten Fällen nicht von Bedeutung ist:

Satz 13.3 (Schwarz) *Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt für alle $v,w\in\mathbb{R}^n$:*

$$D^2f(x)(v,w) = D^2f(x)(w,v).$$

D.h. die Bilinearform $D^2f(x)$ ist symmetrisch und damit ist dann auch $D^2f(x)$ eine symmetrische Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}(x).$$

Beweis: Wir beweisen dies ohne Beschränkung der Annahmen für den Fall $n=2$ und eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $(x,y)\mapsto f(x,y)$. Auf der einen Seite erhalten wir mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet auf die Funktion $x\mapsto f(x,y+w)-f(x,y)$ für eine Zwischenstelle $\xi\in(0,v)$ und dann auf $y\mapsto f(x+\xi,y)$ für eine Zwischenstelle $\eta\in(0,w)$

$$\begin{aligned}
& ((f(x+v,y+w)-f(x,y+w))-(f(x+v,y)-f(x,y))) \\
= \;& (\partial_x f(x+\xi,y+w)-\partial_x f(x+\xi,y))\,v \\
= \;& \partial_y\partial_x f(x+\xi,y+\eta)\,v\,w
\end{aligned}$$

Anderseits können wir den gleichen Term mit dem Mittelwertsatz angewendet auf die Funktion $y\mapsto f(x+v,y)-f(x,y)$ für eine Zwischenstelle $\tilde{\eta}\in(0,w)$ und dann auf $x\mapsto$

$f(x,y+\tilde{\eta})$ für eine Zwischenstelle $\tilde{\xi} \in (0,v)$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} & ((f(x+v,y+w)-f(x,y+w))-(f(x+v,y)-f(x,y))) \\ = \; & (\partial_y f(x+v,y+\tilde{\eta})-\partial_x f(x,y+\tilde{\eta}))\,v \\ = \; & \partial_x \partial y f(x+\tilde{\xi},y+\tilde{\eta})\,vw \end{aligned}$$

Da dies für alle v,w hinreichend klein gilt, folgt

$$\partial_x \partial_y f(x+\tilde{\xi},y+\tilde{\eta}) = \partial_y \partial_x f(x+\xi,y+\eta)\,.$$

Nun lassen wir v,w gegen 0 gehen und erhalten mit der Stetigkeit der zweiten Ableitungen $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)$.

□

13.2 Lokales Verhalten in der Nähe von Extremstellen

Definition 13.4 *Eine symmetrische Matrix A, bzw. die dazugehörige quadratische Form* $(v,w) \mapsto Av \cdot w$*, heißt*

- positiv-(semi)-definit, *falls die Eigenwerte von A alle positiv (nicht-negativ) sind.*
- negativ-(semi)-definit, *falls die Eigenwerte von A alle negativ (nicht-positiv) sind.*
- indefinit, *falls es positive und negative Eigenwerte gibt.*

Definition 13.5 (kritischer Punkt) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sei differenzierbar, dann heißt ein Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\operatorname{grad} f(x) = 0$ kritischer Punkt.

Satz 13.6 (Hinreichende Bedingung für Extrema) *Die Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sei zweimal stetig differenzierbar und x sei ein kritischer Punkt, dann ist*

- *x lokale Minimalstelle von f (d.h.* $f(y) \geq f(x)$ *für alle y mit* $\|y-x\| < \varepsilon$ *für ein* $\varepsilon > 0$*), falls* $D^2 f(x)$ *positiv definit ist.*
- *x lokale Maximalstelle von f, falls* $D^2 f(x)$ *negativ definit ist,*
- *x keine Extremstelle (*Sattelpunkt*), falls* $D^2 f(x)$ *indefinit ist,*
- *im allgemeinen Fall keine Aussage möglich, falls* $D^2 f(x)$ *positiv oder negativ semi-definit ist.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x+v) &= f(x)+\int_0^1 \frac{d}{dt}f(x+tv)\,dt \\
&= f(x)+\int_0^1 Df(x+tv)(v)\,dt \\
&= f(x)+\int_0^1 Df(x)(v)+D^2f(x)(v,tv)+r(x,tv)\|v\|\,dt \\
&= f(x)+Df(x)(v)+D^2f(x)(v,v)\int_0^1 t\,dt+\underbrace{\int_0^1 r(x,tv)\|v\|\,dt}_{=:R(x,v)\|v\|^2}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \tfrac{r(x,tv)}{\|v\|}, R(x,v) \overset{\|v\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$\Rightarrow \qquad f(x+v)=f(x)+Df(x)(v)+\frac{1}{2}D^2f(x)(v,v)+R(x,v)\|v\|^2$$

(vgl. Taylorentwicklung in 1D)

$$\overset{Df(x)=0}{\Rightarrow} \quad \|v\|^{-2}\left(f(x+v)-f(x)\right)=\frac{1}{2}\underbrace{D^2f(x)\left(\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right)}_{D^2f(x)\frac{v}{\|v\|}\cdot\frac{v}{\|v\|}}+R(x,v).$$

(i) Falls $D^2f(x)$ positiv definit ist, so gilt (siehe Wiederholung weiter unter):

$$D^2f(x)v\cdot v \geq \underbrace{\min_{i=1,\dots,n}\lambda_i}_{>0}\|v\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad D^2f(x)\frac{v}{\|v\|}\frac{v}{\|v\|}\geq \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i$$

$$\Rightarrow \quad \|v\|^{-2}\left(f(x+v)-f(x)\right)\geq \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i+\underbrace{R(x,v)}_{\overset{\|v\|\to 0}{\longrightarrow} 0}>0 \quad \text{falls } \|v\| \text{ klein genug,}$$

$$\Rightarrow \quad f(x+v)\geq f(x) \text{ für alle } \|v\| \text{ klein genug.}$$

(ii) Analog gilt für eine negativ definite Hesse-Matrix $D^2f(x)$:

$$D^2f(x)v\cdot v\leq \max_{i=1,\dots,n}\lambda_i\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x+v)\leq f(x) \text{ für alle } \|v\| \text{ klein genug.}$$

(iii) Ist $D^2f(x)$ indefinit, so gibt es eine Eigenrichtung $v^\pm$ zu einem Eigenwert $\lambda^\pm \overset{(<)}{>} 0$ mit

$$D^2f(x)\left(v^\pm,v^\pm\right)=\lambda^\pm\|v^\pm\|^2$$

$$\Rightarrow \quad f\left(x+v^\pm\right)=f(x)+\underbrace{\frac{\lambda^\pm}{2}\|v^\pm\|^2+R(x,v^\pm)\|v^\pm\|^2}_{\substack{>0 \text{ für genügend kleines } v^+,\\ <0 \text{ für genügend kleines } v^-.}}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Wiederholung zur Diagonalisierung symmetrischer Matrixen (siehe Folgerung 9.9)

Es gilt: $\min\limits_{i=1,\dots,n} \lambda_i \|v\|^2 \leq D^2 f v \cdot v \leq \max\limits_{i=1,\dots,n} \lambda_i \|v\|^2$.

$$\text{Hierzu:} \qquad D^2 f = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^T, \quad Q = Q^{-T} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D^2 f Q \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_i v_i = D^2 f v_i. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} D^2 f v \cdot v &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^T v \cdot Q^T v \\ &= \lambda_1 \left(Q^T v\right)_1^2 + \dots + \lambda_n \left(Q^T v\right)_n^2 \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i \|Q^T v\|^2 \overset{Q^T \text{ orthogonal}}{=} \left(\max_{i=1,\dots,n} \lambda_i\right) \|v\|^2 \\ \Big(&\geq \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i \|Q^T v\|^2 = \left(\min_{i=1,\dots,n} \lambda_i\right) \|v\|^2 \Big). \end{aligned}$$

Beispiel 13.7 *Betrachte $f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$, dann ist*

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(6y - 6x^2, 6x - 6y\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = y,\ 6(x - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \, oder \, x = 0, \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ sind kritische Punkte}, \\ D^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} -12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} D^2 f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \quad \textit{mit Eigenwerten } -3 \pm \sqrt{45} \quad \textit{(indefinit) und} \\ D^2 f(1,1) &= \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \quad \textit{mit Eigenwerten } -9 \pm \sqrt{45} \quad \textit{(negativ definit).} \end{aligned}$$

Die Funktion f hat also in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Sattelpunkt und in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein lokales Maximum.

Im Folgenden betrachten wir zwei geometrische Probleme:

(i) Zu Punkten $a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^3$ ist der Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ gesucht, für den die Summe $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \|x - a^k\|^2$ minimal wird.

Hierzu: Die notwendige Bedingung ist:

$$\nabla f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i}(x - a^k) \cdot (x - a^k) \right)_{i=1,2,3} = \left(\sum_{k=1}^{n} 2(x_i - a_i^k) \right)_{i=1,2,3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2nx_i = 2 \sum_{k=1}^{n} a_i^k$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_i^k$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a^k \quad \text{(Schwerpunkt).}$$

Es gilt $D^2 f(x) = (2n\delta_{ij})_{ij} = 2n\mathbb{1}$ (positiv definit), daher ist der Schwerpunkt ein eindeutiges Minimum.

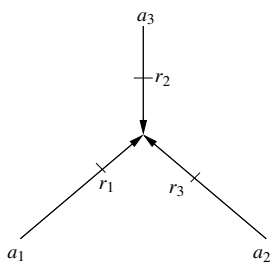
(ii) Nun betrachten wir zu drei Punkten $a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}^2$ den Punkt $x \in \mathbb{R}^2$, für den

$$f(x) = \|x - a^1\| + \|x - a^2\| + \|x - a^3\|$$

minimal wird.

Hierzu: Betrachte zunächst eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

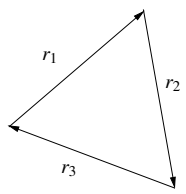
$$g(x) = \|x - a\| \;\Rightarrow\; \partial_{x_i} g(x) = \frac{2(x_i - a)}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - a_i)^2}} = \frac{x_i - a}{\|x - a\|},$$



$$\Rightarrow \quad \text{grad } g(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|}$$

$$\Rightarrow \quad \text{grad } f(x) = \underbrace{\frac{x - a^1}{\|x - a^1\|}}_{=:r_1} + \underbrace{\frac{x - a^2}{\|x - a^2\|}}_{=:r_2} + \underbrace{\frac{x - a^3}{\|x - a^3\|}}_{=:r_3}.$$

für $x \neq a^i$



Notwendige Bedingung:

$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \qquad (*)$

$\rightsquigarrow$ Wegen $\|r_i\| = 1$ für alle i, bilden die Vektoren ein gleichseitiges Dreieck,

$\Rightarrow$ Der Winkel zwischen r_i, r_j für $i \neq j$ ist $\frac{\pi}{3}$.

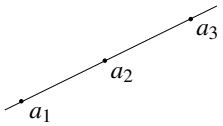
Die drei Winkel im Punkt x in der oberen Skizze sind also alle drei gleich $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Für eine hinreichende Bedingung betrachte die zweiten Ableitungen von g und f:

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_j}\partial_{x_i} g(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i-a}{\|x-a\|}\frac{x_j-a}{\|x-a\|}\right)_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i=j \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Rightarrow\ & D^2 g(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\mathbb{1} - rr^T\right), \quad r = \frac{x-a}{\|x-a\|}, \\
\Rightarrow\ & D^2 f(x) = \frac{\mathbb{1} - r_1 r_1^T}{\|x-a^1\|} + \frac{\mathbb{1} - r_2 r_2^T}{\|x-a^2\|} + \frac{\mathbb{1} - r_3 r_3^T}{\|x-a^3\|}, \\
& D^2 f(x) v\cdot v = \frac{\|v\|^2 - (v\cdot r_1)^2}{\|x-a^1\|} + \frac{\|v\|^2 - (v\cdot r_2)^2}{\|x-a^2\|} + \frac{\|v\|^2 - (v\cdot r_3)^2}{\|x-a^3\|}.
\end{aligned}$$

Nun ist stets $|v\cdot r_i| \le \|v\|$ (Cauchy-Schwarz); Gleichheit gilt dabei nur, wenn $v \in \operatorname{span}\{r_i\}$. Damit sind alle drei Summanden nicht negativ, und falls $\operatorname{span}\{r_1, r_2, r_3\} = \mathbb{R}^2$ ist, so gibt es zu jedem $v \in \mathbb{R}^2$ ein r_i, das nicht in dieselbe Richtung zeigt (und dessen zugehöriger Summand daher positiv ist). Also ist $\Rightarrow D^2 f(x)$ positiv definit.

Bemerkung 13.8



Falls $\operatorname{span}\{r_1, r_2, r_3\}$ *eine Gerade ist, so ist* $x = a_2$ *eine Lösung. Ebenso, falls der Winkel des von* a_1, a_2, a_3 *aufgespannten Dreiecks in der Ecke* a_2 *größer als* $120°$ *ist. In diesen Fällen gibt es keinen Punkt* x*, für den* $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ *ist, also keinen kritischen Punkt.*
In diesem Fall ist die Funktion f *an der Minimalstelle nicht differenzierbar (s.o.), daher muss die obige notwendige Bedingung hier nicht erfüllt sein.*

Bei nur zwei Punkten ist jeder Punkt auf der Verbindungsgeraden Minimalstelle.

13.3 Lineare Gleichungssystem und Minimierungsaufgaben

Nun untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem Lösen linearer Gleichungssysteme und Minimierungsaufgaben:
$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei positiv definit und symmetrisch, definiere nun $f(x) = \frac{1}{2}Ax\cdot x - b\cdot x$ ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j}\frac{1}{2}A_{ij}x_i x_j - \sum_i b_i x_i\right) = \frac{1}{2}\sum_j A_{kj}x_j + \frac{1}{2}\sum_i A_{ik}x_i - b_k \\
\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) &= \frac{1}{2}\left(Ax + A^T x\right) - b = Ax - b. \qquad (\text{wegen } A^T = A)
\end{aligned}$$

D.h. der Minimierer x^* der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}Ax\cdot x - b\cdot x$$

ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

Bemerkung 13.9 *Ist $D^2 f(x) = D_x(Ax-b) = A$ positiv definit, dann ist x tatsächlich das Minimum von $f(\cdot)$.*

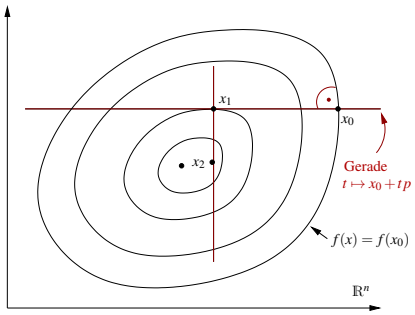
Diese Beobachtung kann man verwenden, um ein approximatives Lösungsverfahren für ein Gleichungssystem mit positiv definiter, symmetrischer Matrix zu definieren:

Schema 13.10 (Gradientenverfahren)

$x = x_0 \in \mathbb{R}^n$ `(Anfangswert);`
`Berechne iterativ:` $p = \operatorname{grad} f(x)$;
`Bestimme das Minimum` t^* `von` $g(t) = f(x-tp)$;
`Berechne neuen Punkt` $x = x - t^* p$;

Zum obigen 1D Minimierungsproblem: Es gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= -(\nabla f)(x-tp)p = -\operatorname{grad} f(x-tp)\cdot p \\ &= -(A(x-tp)-b)\cdot p, \\ \text{notwendige Bedingung:}\quad g'(t^*) &= 0 \Leftrightarrow (Ax-b)\cdot p = t^* Ap\cdot p, \end{aligned}$$



D.h. solange $p \neq 0$ $(Ax \neq b)$ ist, gilt

$$t^* = \frac{(Ax-b)\cdot p}{Ap\cdot p} = \frac{p\cdot p}{Ap\cdot p}.$$

(Es war $p = Ax - b = \operatorname{grad} f(x)$.)

Das daraus resultierende Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssystem, mit einer Matrix die positiv definit und symmetrisch ist, nennt man Gradientenverfahren.

13.4 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k+1)$ mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + Df(x)\xi + \frac{D^2 f(x)}{2}\xi^2 + \frac{D^3 f(x)}{3!}\xi^3 + \ldots + \frac{D^k f(x)}{k!}\xi^k \\ &\quad + \underbrace{\frac{D^{k+1} f(x+\vartheta\xi)}{(k+1)!}\xi^{k+1}}_{=O(\xi^{k+1})}. \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{D^i f(x)}{i!}\xi^i + O(\xi^{k+1}) \end{aligned}$$

Zunächst benötigen wir eine etwas erweiterte Notation:

Wir nennen $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, ..., n$ einen *Multiindex* mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!.$$

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzen wir

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x), \qquad \text{wobei } \partial_{x_i}^{\alpha_i} = \underbrace{\partial_{x_i} ... \partial_{x_i}}_{\alpha_i \text{ Ableitungen}}.$$

Zum Beispiel für $x \in \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$x^{(3,0,0)} = x_1^3, \qquad \partial^{(3,0,0)} f(x) = \partial_{x_1}^3 f(x),$$
$$x^{(2,1,0)} = x_1^2 x_2^1, \qquad \partial^{(2,1,0)} f(x) = \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(x).$$

Satz 13.11 (Kettenregel) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar und $g(t) := f(x + t\xi)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ (fest), dann gilt*

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t\xi) \xi^\alpha.$$

(Die Summe ist dabei über alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ zu bilden.)

Beweis: Zunächst zeigen wir durch Induktion:

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n ... \sum_{i_k=1}^n \partial_{x_{ik}} \partial_{x_{ik-1}} ... \partial_{x_{i1}} f(x + t\xi) \xi_{i1} ... \xi_{ik}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Hierzu:} \boxed{k = 1} \frac{d}{dt} g(t) &= \frac{d}{dt} f(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, ..., x_n + t\xi_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(x + t\xi) \xi_i \qquad \checkmark \\
\boxed{k \rightsquigarrow k+1} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) &= \sum_{i_{k+1}=1}^n \partial_{x_{ik+1}} \left(\frac{d^k}{dt^k} f(x + t\xi) \right) \xi_{ik+1} \\
&= \sum_{i_{k+1}=1}^n \sum_{i_k=1}^n ... \sum_{i_1=1}^n \partial_{x_{ik+1}} \partial_{x_{ik}} ... \partial_{x_{i1}} f(x + t\xi) \xi_{i1} ... \xi_{ik} \xi_{ik+1}
\end{aligned}$$

Nun definieren wir $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ als die Anzahl der Indizes i_k mit $i_k = j$. Dann gilt $\xi_{i1} ... \xi_{ik} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} ... \xi_n^{\alpha_n} = \xi^\alpha$. Nach dem Satz von Schwarz kann man die Ableitungen vertauschen, also gilt

$$\partial_{x_{ik}} ... \partial_{x_{i1}} f(x + t\xi) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x + t\xi) = \partial^\alpha f(x + t\xi).$$

Es gibt aber $\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$ k-Tupel $(i_1,\ldots,i_k)$ bei denen der Index 1 α_1-mal, der Index 2 α_2-mal, ..., der Index n α_n-mal auftaucht. All diese Tupel können wir also zusammenfassen und erhalten eine Summe über alle solchen Tupel-Mengen. Daraus folgt

$$\frac{d^k}{dt^k}g(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha.$$

□

Satz 13.12 (Taylorsche Formel) *Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, dann gilt*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$ abhängig von x und ξ.

Beweis: Definiere $g(t) := f(x+t\xi)$. Nach Voraussetzung ist g $(k+1)$-mal stetig differenzierbar und mit der Taylorschen Formel für Funktionen einer Veränderlichen gilt:

$$\begin{aligned}
f(x+\xi) &= \\
g(1) &= g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)+\ldots+\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\vartheta) \\
&= \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{g^{(m)}(0)}{m!}} + \underbrace{\frac{g^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!}} \\
&\overset{\text{obiger Satz}}{=} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{m!}\frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{(k+1)!\alpha!}\xi^\alpha \\
&= \sum_{m=0}^{k}\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha
\end{aligned}$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$. Daraus folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 13.13 *Für $x \in B_R(0)$ und $\|\xi\| < \delta$ gilt*

$$\underbrace{\Big|\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha\Big|}_{\textit{Restglied}} \le C(f,n,k)\|\xi\|^{k+1}.$$

Hierzu: *Es gilt* $|\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)| \overset{x+\vartheta\xi\in B_{R+\delta}(0)}{\le} C(f)$,
$\#\{\alpha \,|\, |\alpha| = k+1\} \le C(n,k)$ *und*
$|\xi^\alpha| \overset{|\alpha|=k+1}{\le} \|\xi\|^{k+1}$.

Beispiele 13.14

(i) Betrachte das quadratische Polynom auf dem $\mathbb{R}^2$

$$p(x,y) = 2+3x-2y+xy+x^2-y^2.$$

Taylorentwicklung bei $(x,y)=(0,0)$ *ergibt:*

$$\begin{aligned} p(v,w) &= \underbrace{p(0,0)}_{\substack{=2\\(|\alpha|=0)}} + \underbrace{\underbrace{\partial_x p(0,0)v}_{=3v} + \underbrace{\partial_y p(0,0)w}_{=-2w}}_{|\alpha|=1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2!}\partial_x^2 p(0,0)v^2}_{=\frac{2}{2!}v^2} + \underbrace{\frac{1}{1!}\partial_{xy} p(0,0)vw}_{=1\,vw} + \underbrace{\frac{1}{2!}\partial_y^2 p(0,0)w^2}_{=-w^2} + 0 \\ &= 2+3v-2w+v^2+vw-w^2. \end{aligned}$$

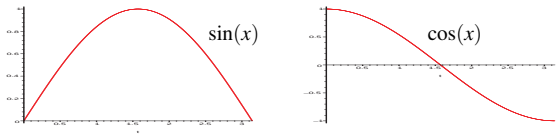
(ii) Allgemeiner gilt für $p \in \mathscr{P}_2$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *im Entwicklungspunkt* 0*:*

$$\begin{aligned} P(\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^n}) &= c+b\cdot x+\frac{1}{2}Ax\cdot x, \quad c\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^n,\ A=(a_{ij})_{i,j}\in\mathbb{R}^{n,n}, \\ \operatorname{grad} P(x) &= b+\frac{1}{2}(A^T+A)x, \quad D^2P(x)=\frac{1}{2}(A^T+A) \\ p(\xi) &= \underbrace{p(0)}_{=c} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=1}\partial^\alpha p(0)\xi^\alpha}_{=\underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i p(0)\xi_i}_{=b\cdot\xi}} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha p(0)}{\alpha!}\xi^\alpha}_{=\underbrace{\frac{1}{2}\sum_i^n \frac{2a_{ii}}{2}\xi_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\dots n\\ i<j}}(a_{ij}+a_{ji})\xi_i\xi_j}_{=\frac{1}{2}A\xi\cdot\xi}} + 0. \\ &= c+b\cdot\xi+\frac{1}{2}A\xi\cdot\xi. \end{aligned}$$

(iii) Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$*, dann ist die Taylor-Entwicklung*

$$\begin{aligned} f(x+\xi,y+\zeta) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\cos(y)\xi-\sin(x)\sin(y)\zeta \\ &\quad -\frac{\sin(x)\cos(y)}{2!}\xi^2-\cos(x)\sin(y)\xi\zeta-\frac{\sin(x)\cos(y)}{2!}\zeta^2 \\ &\quad +O\left(\|(\xi,\zeta)\|^3\right). \end{aligned}$$

Entwickeln wir nun bei $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *und bei* $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2},0\right)$*:*



$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}+\xi,\frac{\pi}{2}+\zeta\right) &= +\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}+0+O\left(\|(\xi,\zeta)\|^3\right) \\
&= -\zeta+O\left(\left(\xi^2+\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}\right), \\
f\left(\frac{\pi}{2}+\xi,\zeta\right) &= 1+0+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}+O\left(\|(\xi,\zeta)\|^3\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(\xi^2+\zeta^2\right)+O\left(\|(\xi,\zeta)\|^3\right).
\end{aligned}$$

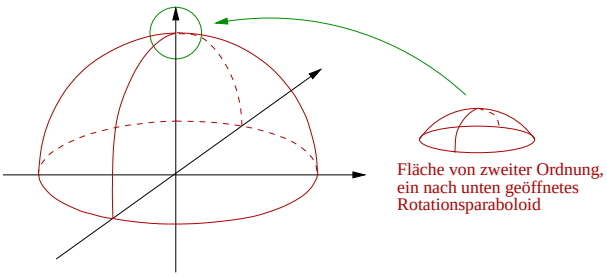
(iv) Betrachte $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$*, dann ist*

$$\begin{aligned}
f(x+\xi,y+\zeta) &= f(x,y)+\operatorname{grad} f(x,y)\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}+\frac{1}{2}D^2 f(x,y)\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \\
&\quad +O\left(\left\|\begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix}\right\|^3\right)
\end{aligned}$$

mit $\operatorname{grad} f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

und $D^2 f(x,y) = \dfrac{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \dfrac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(x\,y)}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

es ergibt sich für $(x,y) = (0,0)$*:* $\Rightarrow f(\xi,\zeta) = 1+0-\frac{1}{2}\left(\xi^2+\zeta^2\right)+O\left(\|(\xi,\zeta)\|^3\right)$.



Allgemein sehen wir für $x,\xi \in \mathbb{R}^n$:

Folgerung 13.15 *Sei* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dreimal stetig differenzierbar, dann gilt*

$$f(x+\xi) = f(x)+\operatorname{grad} f(x)\cdot\xi+\frac{1}{2}D^2 f(x)\xi\cdot\xi+O\left(\|\xi\|^3\right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x+\xi) &= \sum_{|\alpha|=0} \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + O\left(\|\xi\|^3\right) \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x)\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)\xi_i^2 + \sum_{i<j} \partial_i\partial_j f(x)\xi_i\xi_j + O\left(\|\xi\|^3\right) \\
&= f(x) + \operatorname{grad} f(x)\cdot\xi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \partial_i\partial_j f(x)\xi_i\xi_j + O\left(\|\xi\|^3\right) \\
&= f(x) + \operatorname{grad} f(x)\cdot\xi + \frac{1}{2}D^2 f(x)\xi\cdot\xi + O\left(\|\xi\|^3\right)
\end{aligned}$$

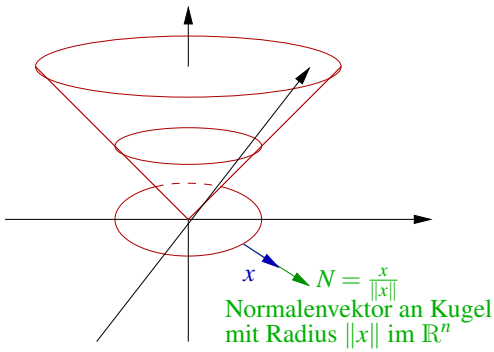
Hierbei folgt aus $|\alpha| = 2$ entweder $\alpha = 2e_i$ $((2e_i)! = 2)$ oder $\alpha = e_i + e_j$ $\left((e_i+e_j)! = 1\cdot 1 = 1\right)$ für $i \neq j$.

□

Beispiel 13.16 *Betrachte*

$$f(x) = \|x\|,\ \operatorname{grad} f(x) = \frac{x}{\|x\|},\ D^2 f(x) = \frac{1}{\|x\|}\underbrace{\left(\mathbb{1} - \frac{x}{\|x\|}\frac{x^T}{\|x\|}\right)}_{P(x)}$$

$$\Rightarrow\ f(x+\xi) = \|x\| + \frac{x}{\|x\|}\cdot\xi + \frac{P(x)}{2\|x\|}\xi\cdot\xi + O\left(\|\xi\|^3\right).$$

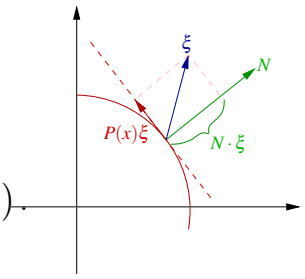


$$P(x)v = v - \left(\frac{x}{\|x\|}\cdot v\right)\frac{x}{\|x\|}$$

$\Rightarrow$ *$P(x)$ ist Projektion auf die Tangentialebene an $B_{\|x\|}$ in x.*

Verwenden wir. dass für die Projektion $P(x)$ gilt $P(x)\xi\cdot\xi = P(x)\xi\cdot P(x)\xi$, so erhalten wir

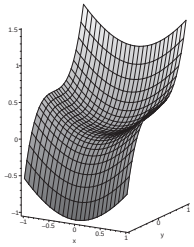
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|x+\xi\| &= \|x\| + N\cdot\xi + \frac{P(x)\xi\cdot P(x)\xi}{2\|x\|} + O\left(\|\xi\|^3\right) \\
&= \|x\| + \underbrace{N\cdot\xi}_{\substack{\text{linear in Richtung}\\ \text{der Normalen}}} + \underbrace{\frac{\|P(x)\xi\|^2}{2\|x\|}}_{\substack{\text{quadratisch in}\\ \text{tangentialen Richtungen}}} + O\left(\|\xi\|^3\right).
\end{aligned}$$



Beispiel 13.17 (zu Taylorentwicklungen höherer Ordnung:)

Betrachte die Entwicklung um $(0,0)$ *der Funktion*

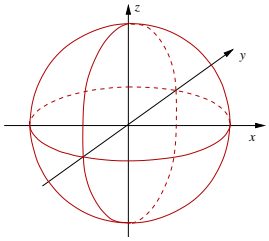
$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1-\cos(x)+y^3, \\ f(\xi,\zeta) &= \frac{\cos(0)}{2!}\xi^2 - \frac{\sin(0)}{3!}\xi^3 + \\ &\quad \frac{2\cdot 3}{3!}\zeta^3 + O\left(|\xi|^4\right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \zeta^3 + O\left(|\xi|^4\right). \end{aligned}$$



13.5 Der Satz über implizite Funktionen

Beispiele 13.18 (Hinführung)

(i) *Betrachten wir die Funktion* $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ *und die Menge* $B = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$.
B ist die Kugel mit Radius 1 *um den Nullpunkt. Die Kugel ist keine Graphenfläche, aber lokal kann sie als Graphenfläche geschrieben werden:*



$$\begin{aligned} B\cap\{z>0\} &= \left\{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \,\middle|\, x^2+y^2<1\right\}, \\ B\cap\{z<0\} &= \left\{(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}) \,\middle|\, x^2+y^2<1\right\}, \\ B\cap\{x>0\} &= \left\{(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z) \,\middle|\, y^2+z^2<1\right\}. \end{aligned}$$

Wir machen die Beobachtung:

B kann dort nicht als Graph über der x,y*-Ebene geschrieben werden, wo* $z=0$ *ist, dort gilt* $\partial_z f(x,y,z) = 2z = 0$.

(ii) *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ *(z.Bsp.* $f(x,y) = x^2+y^2-1$ *) gegeben, ferner gebe es ein* $g : (a,b) \to \mathbb{R}; x \mapsto g(x)$ *mit*

$$f(x,g(x)) = 0$$

$\big($*im Beispiel:* $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a=-1$, $b=1\big)$.
Mit der Kettenregel berechnen wir:

$$\frac{d}{dx}f(x,g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\frac{d}{dx}g(x) = 0$$

Falls $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,g(x)) \neq 0$ *ist, folgt*
$\dfrac{d}{dx}g(x) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))$.
$\Big($ *Für das Beispiel erhalten wir:* $\frac{d}{dx}g(x) \overset{y=g(x)}{=} -\frac{1}{2y}2x = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$

(iii) *Betrachten wir die Matrix* $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ *mit* $n > m$ *und* $M = (A,B)$, *wobei* $A \in \mathbb{R}^{m,k}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ *ist für* $k = n-m$. *Nun definieren wir*

$$E := \{z \in \mathbb{R}^n \mid Mz = 0\}.$$

Mit $z = (x,y)$ *für* $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$ *erhalten wir*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid Ax + By = 0\}.$$

Falls nun B invertierbar ist, so können wir nach y auflösen:

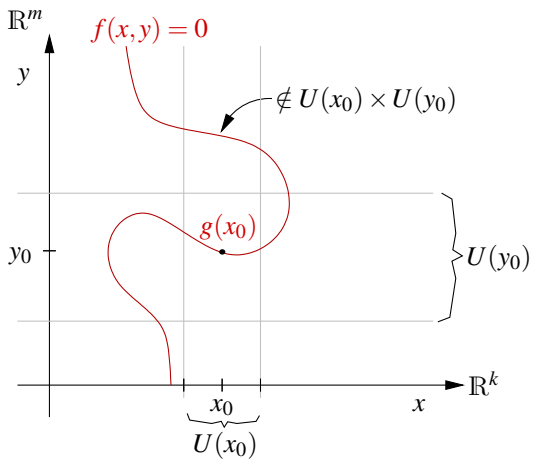
$$y(x) = -B^{-1}Ax \quad \textit{und} \quad E = \left\{ (x, y(x)) \,\middle|\, y(x) = -B^{-1}Ax,\, x \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

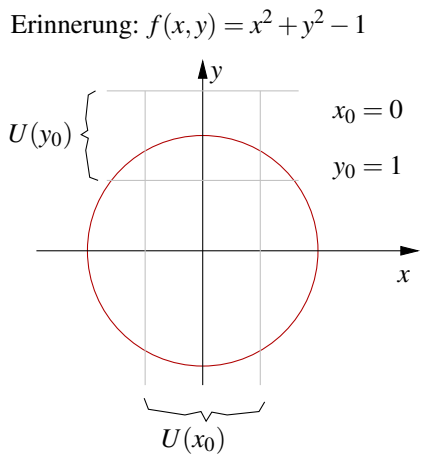
Nun formulieren wir das implizite Funktionentheorem:

Satz 13.19 (Implizites Funktionentheorem) *Sei $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m; (x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $f(x_0, y_0) = 0$.*
Ist die $m \times m$-Matrix $\partial_y f(x_0, y_0)$ invertierbar, dann gibt es Umgebungen $U(x_0)$ von x_0 und $U(y_0)$ von y_0 und eine differenzierbare Abbildung $g : U(x_0) \to U(y_0), x \mapsto g(x)$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U(x_0)$, und es gilt

$$\partial_x g(x) = -\partial_y f(x, g(x))^{-1} \partial_x f(x, g(x)).$$

Falls $(x,y) \in U(x_0) \times U(y_0)$ und $f(x,y) = 0$ ist, so folgt ferner $y = g(x)$.





Wir benötigen für den Beweis den Begriff der Operatornorm einer Matrix:

Definition 13.20 *Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, dann definieren wir die Operatornorm von A:*

$$|||A||| := \max \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n,\, \|x\| = 1 \} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Hierbei ist $\|Ax\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^m$ und $\|x\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$.

Lemma 13.21 *Es gilt*

(i) $|||\cdot|||$ *ist wohldefiniert und eine Norm auf dem* $\mathbb{R}^{m,n}$,

(ii) $|||A||| = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$,

(iii) $\|Ax\| \leq |||A|||\,\|x\|$,

(iv) Ist $B \in \mathbb{R}^{n,k}$, *so gilt* $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

Beweis:

zu (i) $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist eine abgeschlossene Menge, $x \mapsto \|Ax\|$ ist eine stetige Funktion, also nimmt diese Funktion ihr Maximum an, und $|||A|||$ ist damit wohldefiniert. Wir überprüfen die Normeigenschaften:

$$\begin{aligned}
|||A||| = 0 \quad &\Rightarrow \quad Ax = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| = 1 \\
&\Rightarrow \quad A\frac{x}{\|x\|} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| \neq 0 \\
&\overset{A0=0}{\Rightarrow} \quad Ax = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow \quad A = 0, \\
|||\lambda A||| \quad &= \quad \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\,|||A|||, \\
|||A+C||| \quad &= \quad \max_{\|x\|=1} \|Ax+Cx\| \leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Cx\|) \\
&\leq \quad \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Cx\| = |||A||| + |||C|||\,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |||\cdot|||$ ist eine Norm.

zu (ii) $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\dfrac{x}{\|x\|} \right\| \Rightarrow$ Behauptung.

zu (iii) $x = 0$ ✓

$x \neq 0$: $\|Ax\| = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\| \leq \max\limits_{x'\neq 0} \dfrac{\|Ax'\|}{\|x'\|}\|x\| \overset{(ii)}{=} |||A|||\,\|x\|$.

zu (iv) Sind $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,k}$, dann ist $AB \in \mathbb{R}^{m,k}$. Damit folgt

$$|||AB||| \quad = \quad \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \overset{(iii)}{\leq} \max_{\|x\|=1} |||A|||\,\|Bx\| = |||A|||\,|||B|||\,.$$

□

Beweis: [des Impliziten Funktionentheorems] O.B.d.A. seien $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

$\boxed{\text{Schritt 1}}$ (Umformulierung)
$B := \partial_y f(0,0) \in GL(m)$, $h(x,y) := y - B^{-1} f(x,y)$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt} \quad \partial_y h(x,y) &= \mathbb{1} - B^{-1}\partial_y f(x,y) \\ \Rightarrow \partial_y h(0,0) &= \mathbb{1} - B^{-1}B = 0. \end{aligned}$$

Da h stetig differenzierbar ist, gibt es eine Umgebung $W_1 \times W_2$ der 0 im $\mathbb{R}^{k+m}$, so dass

$$|||\, \partial_y h(x,y) ||| \leq \frac{1}{2} \text{ für } (x,y) \in W_1 \times W_2. \tag{*}$$

Wähle $r > 0$, so dass $V_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| < r\} \subset W_2$. Da $h(0,0) = 0$ und h stetig ist, gibt es ein $s > 0$, so dass $V_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < s\right\} \subset W_1$ mit

$$\sup_{x \in V_1} |||h(x,0)||| =: \varepsilon < \frac{r}{2}.$$

Aus der Definition von $h(x,y)$ folgt, dass $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow h(x,y) = y$.

$\boxed{\text{Schritt 2}}$ (Eindeutigkeit von $y \in V_2$ zu $x \in V_1$ mit $f(x,y) = 0$)
Angenommen es gelte $f(x,y_1) = f(x,y_2)$ für $x \in V_1$, $y_1, y_2 \in V_2$, dann folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= h(x,y_2) - h(x,y_1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(y_1 + t(y_2 - y_1))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \partial_y h(y_1 + t(y_2 - y_1))\mathrm{d}t \; (y_2 - y_1) \quad \Rightarrow \\ \|y_2 - y_1\| &\leq \max_{t \in [0,1]} |||\partial_y h(y_1 + t(y_2 - y_1))|||\, \|y_2 - y_1\| \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

Damit folgt dann aber, dass $y_2 = y_1$.

$\boxed{\text{Schritt 3}}$ (Existenz einer Funktion g)
Wir definieren eine Folge von Funktionen $(g_k)_{k=0,\ldots}$ mittels

$$\begin{aligned} g_0(x) &:= 0 \quad \text{für } x \in V_1, \\ g_{k+1}(x) &:= h(x, g_k(x)). \end{aligned} \tag{**}$$

Im Folgenden beweisen wir, dass g_k gegen eine Funktion g konvergiert. Hierzu:

$$\begin{aligned} \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\| &= \|h(x,g_k(x)) - h(x,g_{k-1}(x))\| \\ &\overset{\text{Hauptsatz (s.o.)}}{\leq} \frac{1}{2}\|g_k(x) - g_{k-1}(x)\| \\ &\leq \ldots \leq \frac{1}{2^k}\|g_1(x) - g_0(x)\| = \frac{1}{2^k}\|h(x,0) - 0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}$$

Nun definieren wir eine Teleskopsumme:

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \big(g_{j+1}(x) - g_j(x)\big) \Rightarrow \|g_k(x)\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j}\varepsilon \leq 2\varepsilon < r$$

(geometrische Reihe: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2$)

D.h. $g_k(V_1) \subset V_2$ und damit ist die Definition (**) sinnvoll. Ferner konvergiert die Folge $g_k(x)$ für alle $x \in V_1$, da sie durch die geometrische Reihe dominiert wird. D.h. wir definieren einen Funktion

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

als den punktweisen Grenzwert. Weiterhin folgt aus $g_{k+1}(x) = h(x, g_k(x))$:

$$g(x) = h(x, g(x)) \Leftrightarrow f(x, g(x)) = 0.$$

$\boxed{\text{Schritt 4}}$ (Differenzierbarkeit von g)
Es genügt zu zeigen, dass $Dg(x_0) = Dg(0) = -B^{-1}A$, wobei $A = \partial_x f(0,0), B = \partial_y f(0,0)$. Für ein allgemeines $x \in V_1$ mit $y = g(x)$ folgt die Aussage, dann durch Ersetzen von (x_0, y_0) durch (x, y). Da $f \in C^1$ ist B invertierbar und $f(x,y) = f(0,0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
& 0 = f(x,y) = f(0,0) + Ax + By + o((x,y)) \\
\Rightarrow\quad & 0 = Ax + By + o((x,y)) \\
\overset{y=g(x)}{\Rightarrow}\quad & g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\underbrace{o((x,g(x)))}_{\substack{\leq c(r,s)\,(\|x\| + \|g(x)\|) \\ \text{mit } c(r,s)\to 0 \text{ für } r,\, s\to 0}} \\
\Rightarrow\quad & (1 - c(r,s))\|g(x)\| \leq \|B^{-1}Ax\| + |||B^{-1}|||\, c(r,s)\|x\| \\
\Rightarrow\quad & \|g(x)\| \leq C\|x\| \quad \text{falls } \|x\| < s \text{ und } r,\, s \text{ klein genug} \\
\overset{g(0)=0}{\Rightarrow}\quad & g(x) = g(0) - B^{-1}Ax + B^{-1}o(x) \\
\Rightarrow\quad & Dg(0) = -B^{-1}A.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Definition der Differenzierbarkeit verwendet.

□

Bemerkung 13.22 *Aus dem Beweis ergibt sich ein konstruktives Approximationsverfahren für die Funktion $g(\cdot)$ aus dem Impliziten Funktionentheorem:*

Schema 13.23 (Approximationsverfahren) *Für x aus der Umgebung $U(x_0)$ berechne die Folge:*

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= y_0\,; \\
g_{k+1}(x) &= g_k(x) - \partial_y f(x_0, y_0)^{-1} f(x, g_k(x))
\end{aligned}$$

Im Beweis haben wir gezeigt, dass $g_k \to g = g(x)$ konvergiert.
Für die Sphäre mit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ und $(x_0, y_0) = (0,1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= 1, \\
g_1(x) &= g_0(x) - \frac{1}{2} f(x, g_0(x)) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\
g_2(x) &= g_1(x) - \frac{1}{2} f(x, g_1(x)) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^2 - 1\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4.
\end{aligned}$$

D.h. $g_2(x)$ entspricht der Taylorentwicklung vierter Ordnung von $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

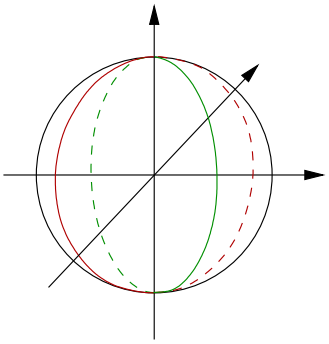
Beispiele 13.24

(i) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x - y \end{pmatrix}, \quad Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\partial_{(x,y)} f &= \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ invertierbar, falls } y \neq -x.
\end{aligned}$$

D.h. es gibt Funktionen $z \mapsto x(z), y(z)$ mit $f(x(z), y(z), z) = 0$.

Berechnung von $\mathbf{x}(\mathbf{z}), \mathbf{y}(\mathbf{z})$: *Aus der zweiten Gleichung von f erhält man $y(z) = x(z)$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, folgt $2x(z)^2 = 1 - z^2 \Rightarrow x(z) = \pm\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2}}$.*

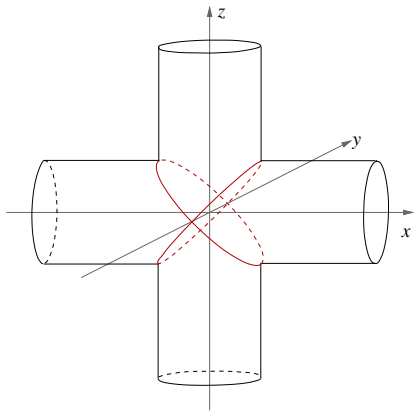


D.h. es ist

$$\begin{aligned}
&\{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0, y \neq -x\} \\
&= \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2}}, z \right) \middle| \, z \in (-1,1) \right\} \\
&\quad \cup \left\{ \left(-\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2}}, z \right) \middle| \, z \in (-1,1) \right\}.
\end{aligned}$$

(ii) Gegeben sei folgende Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ z^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$



Parametrisierbar über y:

Es ist $\partial_{(x,z)} f = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$ *invertierbar, falls* $x \neq 0$ *und* $z \neq 0$*;*
$x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow z = 0$.

Parametrisierbar über x:

Es ist $\partial_{(y,z)} f = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}$ *invertierbar, falls* $y \neq 0$ *und* $z \neq 0$*;*
$y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1$,
$z = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Parametrisierbar über z:

Es ist $\partial_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$ *invertierbar, falls* $y \neq 0$ *und* $x \neq 0$*;*

Es gilt $x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow z = 0$, *ferner* $y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1$

D.h. $\{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$ *ist weder über x, noch über y und z darstellbar bei* $(0,1,0)$ *und* $(0,-1,0)$.

Folgerung aus dem Impliziten Funktionentheorem: Der Umkehrsatz

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Umkehrsatz im $\mathbb{R}^n$ zu: Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x).$$

Falls es eine Umkehrabbildung $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in U$ und g differenzierbar ist, dann haben wir bereits aus der Kettenregel abgeleitet:

$$\underbrace{D(f \circ g)(y)}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} = \underbrace{Df(g(y))}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} \underbrace{Dg(y)}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}.$$

Die Differenzierbarkeit von g und die Existenz einer Umkehrabbildung (zumindestens lokal) folgt allerdings bereits aus der Invertierbarkeit von $Df(x)$. Dies ist die Aussage des Umkehrsatzes:

Satz 13.25 (Umkehrsatz) *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist die Matrix* $Df(x_0)$ *für ein* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *invertierbar, dann gibt es eine offene Umgebungen* U *von* x_0*, so dass für* $V = f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$ *gilt:*

- $f : U \to V$ *ist invertierbar, d.h. es gibt eine Abbildung* $g : V \to U$ *mit* $(f \circ g)(y) = y$,
- g *ist stetig differenzierbar,*
- $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ *mit* $x = g(y)$.

Beweis: [mittels des Impliziten Funktionen Theorems] Definiere $h(x,y) = y - f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$, insbesondere gilt dann $h(x_0,y_0) = 0$ und $\partial_x h(x_0,y_0) = -Df(x_0)$ ist invertierbar.
Nach dem Impliziten Funktionen Theorem gibt es die Umgebungen U,V und eine Abbildunge g, so dass

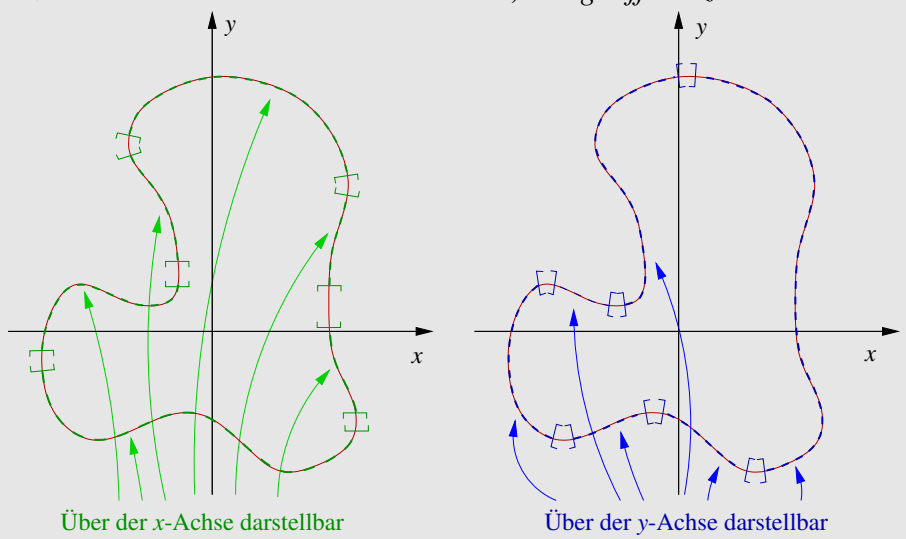
$$0 = h(g(y),y) = y - f(g(y)),$$

d.h. es gilt $y = f(g(y))$, womit g die lokale Umkehrabbildung ist.

$$\begin{aligned} \text{Ferner gilt} \quad \partial_y g(y) &= -\partial_x h(g(y),y)^{-1} \partial_y h(g(y),y) \\ &= (Df(g(y)))^{-1}\,\mathbb{1} = (Df(g(y)))^{-1}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 13.26 (aus dem Impliziten Funktionentheorem)
Sei $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $\mathscr{M} = \{z \in \mathbb{R}^{k+m} \mid f(z) = 0\}$, und es gelte $\operatorname{Rang}(Df(z)) = m$ *für alle $z \in \mathscr{M}$. Dann lässt sich $\mathscr{M}$ überall lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion über einer k-dimensionalen Ebene darstellen. Die Ebenen sind als durch Koordinatenachsen aufgespannt wählbar.*
Man nennt $\mathscr{M}$ in diesem Fall eine k-dimensionale, stetig differenzierbare Fläche im $\mathbb{R}^{k+m}$.



Beweis: Aus $\operatorname{Rang}(Df(z)) = m$ folgt: Es gibt eine Aufteilung der Variablen

$$x = (z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k}) \in \mathbb{R}^k,\ y = (z_{i_{k+1}}, \ldots, z_{i_{k+m}}) \in \mathbb{R}^m,$$

so dass $\partial_y f(z) \in \mathbb{R}^{m,m}$ invertierbar ist $\big(\partial_y f(z)$ besteht aus den Spalten $i_{k+1}, \ldots, i_{k+m}$ von $Df(z)\big)$. Aus dem Impliziten Funktionentheorem folgt dann, dass $\mathscr{M}$ lokal als Graph einer

stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$; $(z_{i_1}, ..., z_{i_k}) \mapsto \begin{pmatrix} g_1(z_{i_1}, ..., z_{i_k}) \\ \vdots \\ g_m(z_{i_1}, ..., z_{i_k}) \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

□

Beispiele 13.27

(i) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $Df(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ *hat Rang* 1, *außer für* $(x,y,z) = 0$. *Da aber* $0 \notin \mathscr{M} = \{(x,y,z) \,|\, f(x,y,z) = 0\}$ *ist, ist* $\mathscr{M}$ *eine Fläche der Dimension* 2 *im* $\mathbb{R}^3$ *(eine Hyperfläche), nämlich die Kugel mit Radius* 1 *und Mittelpunkt* 0.

(ii) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x-y \end{pmatrix}$, $\quad Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Df hat Rang 2 *auf ganz* $\mathscr{M} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, *denn es gilt*

$$(x,y,z) \in \mathscr{M} \Rightarrow x = y \Rightarrow Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2x & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nur dann nicht maximalen Rang, wenn x und z beide 0 sind. Dann wäre jedoch auch $y = x = 0$, *der Ursprung liegt aber nicht auf* $\mathscr{M}$. *Damit ist* $\mathscr{M}$ *eine* 1*-dimensionale Fläche (Kurve) im* $\mathbb{R}^3$. *Setzt man* $x = y$ *in die erste Gleichung ein, so erhält man* $2x^2 + z^2 = 1$, *d.h.* $\mathscr{M}$ *ist ein Kreis gegeben durch die Parametrisierung*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Definition 13.28 *Eine* Hyperfläche *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Fläche der Dimension* $(n-1)$.

Bemerkung 13.29 *Es gelten die Voraussetzungen der Folgerung 13.26, dann ist* $\mathscr{M}$ *der Schnitt von m Hyperflächen im* $\mathbb{R}^{m+k}$.
Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Nicht jeder Schnitt von m Hyperflächen im $\mathbb{R}^{m+k}$ *ist eine k-dimensionale Fläche, siehe etwa Beispiel 13.24 (ii).*

Beweis: Definiere $\mathscr{M}_i := \left\{ z \in \mathbb{R}^{m+k} \,\middle|\, f_i(z) = 0 \right\}$, $\nabla f_i(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathscr{M}$ (sonst wäre $\operatorname{Rang}(Df(z)) \leq m-1$). Dann gilt $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 \cap ... \cap \mathscr{M}_m$ per Definition.

□

Beispiel 13.30 $\mathscr{M} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ (x-1)^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *ist der Schnitt der Einheitssphäre und der um* 1 *in x-Richtung verschobenen Einheitssphäre.*

Graphenflächen: Jede Graphenfläche läßt sich natürlich trivial als implizite Fläche schreiben:

$$\begin{aligned} & \{(x,y) \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\, y = g(x) \text{ mit } g \text{ stetig differenzierbar}\} \\ = \; & \{(x,y) \,|\, f(x,y) = 0\}, \text{ wobei } f(x,y) = y - g(x). \end{aligned}$$

Tatsächlich ist $\nabla f(x,y) = (-\nabla g(x), 1) \neq 0$, wie für die zweite Darstellung gefordert.

13.6 Geometrie impliziter Flächen

Betrachten wir nun die Tangentialräume und Normalräume an implizite Flächen.
Gegeben sei

$$\mathscr{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k,\, y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, f(x,y) = 0 \right\},$$

wobei $D_y f(x,y)$ invertierbar sei für ein $(x,y) \in \mathscr{M}$. Dann gibt es lokal eine Abbildung $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x,g(x)) = 0$, d.h. $\mathscr{M}$ ist lokal als Graph über $x \in \mathbb{R}^k$ darstellbar. Betrachten wir eine Kurve $\gamma(t) = (x + te_i, g(x+te_i))^T$ auf $\mathscr{M}$ so gilt mit der Kettenregel

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} e_i \\ Dg(x)e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i \\ \partial_{x_i} g(x) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Basis des Tangentialraums $T_{(x,y)}\mathscr{M}$, der aus allen Tangentenvektoren solcher Kurven besteht

$$\left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ Dg(x)e_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} e_k \\ Dg(x)e_k \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{k+m}, \quad \text{dann ist}$$

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}\mathscr{M} &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ \partial_{x_1} g(x) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} e_k \\ \partial_{x_k} g(x) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ Dg(x) \end{pmatrix} \xi \,\middle|\, \xi \in \mathbb{R}^k \right\}, \quad Dg(x) \in \mathbb{R}^{m,k} \quad \text{der } \textit{Tangentialraum}, \\ T^{aff}_{(x,y)}\mathscr{M} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ Dg(x) \end{pmatrix} \xi \,\middle|\, \xi \in \mathbb{R}^k \right\} \quad \text{der } \textit{affine Tangentialraum} \text{ und} \\ N_{(x,y)}\mathscr{M} &= T_{(x,y)}\mathscr{M}^{\perp} = \left\{ v \in \mathbb{R}^{k+m} \,\middle|\, v \perp T_{(x,y)}\mathscr{M} \right\} \quad \text{der } \textit{Normalraum.} \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass

$$N_{(x,y)}\mathscr{M} = \operatorname{span}\{\operatorname{grad} f_i(x,y)\}_{i=1,\ldots,m}.$$

Tatsächlich ist
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla f_1- \\ \vdots \\ -\nabla f_m- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ Dg(x) \end{pmatrix}}\xi \overset{!}{=} 0$$
$$= \begin{pmatrix} D_x f(x,y) & D_y f(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -D_y f(x,y)^{-1} D_x f(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= D_x f(x,y) - D_y f(x,y) D_y f(x,y)^{-1} D_x f(x,y) = 0.$$

Beispiele 13.31 *(i)* $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$\begin{aligned}
\textit{Normale } n &= \frac{(2x,2y,2z)^T}{\|(2x,2y,2z)\|} = \frac{(x,y,z)^T}{\|(x,y,z)\|}, \\
N_{(x,y,z)}\mathscr{M} &= \operatorname{span}\{n\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \\
T_{(x,y,z)}\mathscr{M} &= n^{\perp}. \\
&= \left\{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\}
\end{aligned}$$

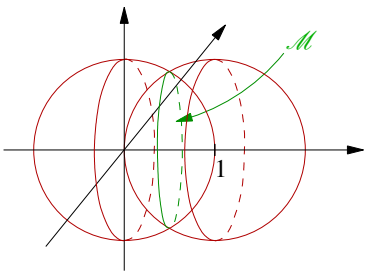
Für einen konkreten Punkt (x,y,z) kann man daraus auch die Basivektoren des Tangentialraumes berechnen.

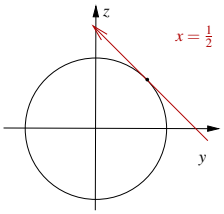
Mittels des Satzes über implizite Funktionen kann man die Fläche auch lokal als Graph einer Funktion schreiben und dort Definition 5.18 verwenden. Für $z>0$ können wir z.B. nach z auflösen und erhalten:

$$\begin{aligned}
z = g(x,y) &:= \sqrt{1-x^2-y^2}, \\
Dg(x,y) &= \nabla g(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \textit{ und damit ist} \\
T_{(x,y,z)}\mathscr{M} &= \left\{\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ \frac{-\xi x-\zeta y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \,\middle|\, \xi,\zeta \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

(ii) Betrachte

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ (x-1)^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}, \\
Df &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 2z \end{pmatrix}, \\
N_{(x,y,z)}\mathscr{M} &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \\
T_{(x,y,z)}\mathscr{M} &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$





Aus $(x,y,z) \in \mathscr{M}$ folgt $x = \frac{1}{2}$, die Schnittfläche ist also gegeben durch $y^2+z^2 = \frac{3}{4}$, d.h. durch einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2},0,0)$ und Radius $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

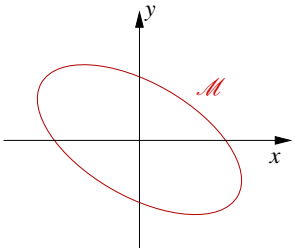
13.7 Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen

Nun betrachten wir die Minimierung oder Maximierung einer Funktion unter Gleichungsnebenbedingungen.

Beispiel 13.32 *Betrachte die Funktion*

$$
g(x,y) = \underbrace{ax^2+2bxy+cy^2-1}_{\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-1} = 0,
$$

mit einer positiv definiten Matrix A.
Dann ist $\mathscr{M} = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ eine Ellipse.



Aufgabe: *Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ auf $\mathscr{M}$.*

Bemerkung 13.33

- *Dies entspricht der Suche nach Punkten mit minimalem oder maximalem Abstand vom Ursprung*
$$\|(x,y)-0\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{f(x,y)}.$$
- *Auf ganz $\mathbb{R}^2$ hat $f(\cdot,\cdot)$ genau in $(0,0)$ ein Minimum. Hier fragen wir aber nach Minima und Maxima auf $\mathscr{M}$.*

Falls wir eine Parametrisierung $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ der Kurve $\mathscr{M}$ kennen, so können wir nach Minima und Maxima von $t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$ fragen, d.h. eine notwendige Bedingung wäre dann

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \Leftrightarrow \partial_x f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \partial_y f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) = 0 \quad (\mathbf{1})$$

Aus $g(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ folgt

$$\frac{d}{dt} g(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \Leftrightarrow \partial_x g(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \partial_y g(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) = 0 \quad (\mathbf{2})$$

Da $\mathscr{M}$ differenzierbare Kurve im Sinne von Folgerung 13.26, ist $\operatorname{grad} g \neq 0$ *auf $\mathscr{M}$. Damit können wir uns überlegen:*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}) + (\mathbf{2}): \quad & \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_x g \end{pmatrix} \varphi'(t) + \begin{pmatrix} \partial_y f \\ \partial_y g \end{pmatrix} \psi'(t) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_x g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_y f \\ \partial_y g \end{pmatrix} \textit{ sind linear abhängig} \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{grad} f(\varphi(t), \psi(t)) = \lambda \operatorname{grad} g(\varphi(t), \psi(t)) \textit{ für ein geeignetes } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir: Ist (x, y) Extremalstelle von f auf $\mathscr{M}$, dann gilt unabhängig von der Parametrisierung $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$:
Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(x, y) - \lambda \operatorname{grad} g(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad g(x, y) = 0.$$

In obigem Beispiel erhalten wir: $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2ax + 2by \\ 2bx + 2cy \end{pmatrix} = 0$
Dies ist ein lineares Gleichungssystem in x, y:

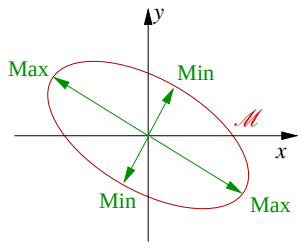
$$\underbrace{\begin{pmatrix} (1 - \lambda a) & -\lambda b \\ -\lambda b & (1 - \lambda c) \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Mit anderen Worten, wir suchen nach einem Eigenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und einem Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ der Matrix A.

Wir fragen nur nach nichttrivialen Lösungen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ und erhalten damit:

$$\begin{aligned}
& \det B = (1-\lambda a)(1-\lambda c) - \lambda^2 b^2 = 0 \\
& (\text{sonst wäre } B \text{ invertierbar} \Rightarrow (x,y) = (0,0)) \\
\Rightarrow\ & (ac-b^2)\lambda^2 - (a+c)\lambda + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda^2 - \frac{a+c}{ac-b^2}\lambda + \frac{1}{ac-b^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2(ac-b^2)} \pm \frac{\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2(ac-b^2)} \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2(ac-b^2)}.
\end{aligned}$$

Da A positiv definit ist, konnten wir dabei durch $\det A = ac - b^2$ dividieren. Nun gibt es zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1, λ_2, sofern $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$ ist, d.h. sofern nicht $a = c$ und $b = 0$ sind (dann wäre die Ellipse ein Kreis und f auf $\mathscr{M}$ konstant, d.h. alle Punkte auf $\mathscr{M}$ sind gleichzeitig Minimal- und Maximalstellen).
Zu $\lambda_{1,2}$ gibt es Lösungsvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Diese können auf zwei Arten so normiert werden, dass $g(x_i, y_i) = 0$ für $i = 1,2$ gilt. Es gibt somit vier Extremalstellen. Diese sind als Minimum, Maximum, Minimum, Maximum angeordnet und liegen in Richtung der Eigenvektoren von A, d.h. der Hauptachsen der Ellipse.



Allgemein gilt der folgende Satz:

Satz 13.34 (Extrema unter Nebenbedingungen) *Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $m < n$, $\mathscr{M} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid g(z) = 0\}$ und $Dg(z)$ habe Rang m für alle $z \in \mathscr{M}$. Falls f auf $\mathscr{M}$ an der Stelle z^* ein lokales Extremum hat, so gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ derart, dass der Punkt z^* kritischer Punkt der Funktion*

$$h(z) = f(z) - \lambda_1 g_1(z) - \lambda_2 g_2(z) - \ldots - \lambda_m g_m(z)$$

ist, d.h. $\nabla f(z^*) - \lambda_1 \nabla g_1(z^*) - \ldots - \lambda_m \nabla g_m(z^*) = 0$.

Beweis:

$\boxed{\text{Schritt 1:}}$ Betrachten wir eine Kurve $\gamma\colon [-1,1] \to \mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ auf $\mathscr{M}$, $\gamma(0) = z^*$, γ differenzierbar, z^* sei lokales Extremum von f auf $\mathscr{M}$, dann hat $f \circ \gamma$ ein lokales Extremum in 0, d.h.

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \nabla f(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = \nabla f(z^*)\dot{\gamma}(0).$$

Ferner gilt $\nabla g_i(z^*)\dot{\gamma}(0) = 0$, da $\dot{\gamma} \in T_{z^*}\mathscr{M}$ und $\nabla g(z^*) \in N_{z^*}\mathscr{M}$
$\Big($oder direkt: $g \circ \gamma = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t) = 0 \Rightarrow Dg\,(\gamma(0))\,\dot{\gamma}(0) = 0 \Rightarrow \nabla g_i \dot{\gamma} = 0$, wobei
$Dg = \begin{pmatrix} -\nabla g_1- \\ \dots \\ -\nabla g_m- \end{pmatrix}\Big)$,
D.h. für alle $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Big[\underbrace{\nabla f(z^*) - \lambda_1 \nabla g_1(z^*) - \lambda_2 \nabla g_2(z^*) - ... - \lambda_m \nabla g_m(z^*)}_{=:L(z^*,\lambda_1,...,\lambda_m)}\Big]\dot{\gamma}(0) = 0.$$

Nun gilt aber $T_{z^*}\mathscr{M} = \{\dot{\gamma}(0) \,|\, \gamma\colon [-1,1] \to \mathscr{M}, \gamma(0) = z^*\}$. D.h. es gilt $L(z^*, \lambda_1, ..., \lambda_m)v = 0$ für alle $v \in T_{z^*}\mathscr{M}$. Betonen wir noch einmal, dass hier die Wahl der $\lambda_1, ..., \lambda_m$ noch keine Rolle spielt, im nächsten Schritt dagegen werden wir sie speziell wählen.

$\boxed{\text{Schritt 2:}}$ Es gilt $\mathbb{R}^n = \{v + n \,|\, v \in T_{z^*}\mathscr{M}, n \in N_{z^*}\mathscr{M}\}$. Es genügt also zu zeigen, dass man $\lambda_1, ..., \lambda_m$ finden kann, so dass $L(z^*, \lambda_1, ..., \lambda_m)n = 0$ ist für alle $n \in N_{z^*}\mathscr{M}$ oder gleichwertig $L(z^*, \lambda_1, ..., \lambda_m)n_k = 0$, $k = 1, ..., m$ für eine Basis $\{n_1, ..., n_m\}$ von $N_{z^*}\mathscr{M}$. Nun wissen wir aber, dass $n_i = \operatorname{grad} g_i(z^*)$ eine Basis von $N_{z^*}\mathscr{M}$ definiert, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} L(z^*, \lambda_1, ..., \lambda_m)n &= 0 \quad \text{für alle } n \in N_{z^*}\mathscr{M} \quad \Leftrightarrow \\ \nabla f(z^*)\operatorname{grad} g_i(z^*) &= \lambda_1 \nabla g_1(z^*)\operatorname{grad} g_i(z^*) + ... + \lambda_m \nabla g_m(z^*)\operatorname{grad} g_i(z^*) \\ &= \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(z^*) \cdot \operatorname{grad} g_i(z^*) + ... + \lambda_m \operatorname{grad} g_m(z^*) \cdot \operatorname{grad} g_i(z^*) \\ &\quad \text{für } i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem im $\mathbb{R}^m$ mit m Variablen $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Zu zeigen bleibt, dass die Matrix $G \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit $G_{ij} = \operatorname{grad} g_i(z^*) \cdot \operatorname{grad} g_j(z^*)$ invertierbar ist.

Hierbei verwenden wir, dass G invertierbar ist, wenn G symmetrisch und positiv definit:

$$\begin{aligned} Gv \cdot v &= \Big(Dg(z^*)\Big)\Big(Dg(z^*)^T\Big)v \cdot v = Dg(z^*)^T v \cdot Dg(z^*)^T v \\ &= \left\|Dg(z^*)^T v\right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Im Fall der Gleichheit gilt $\quad Dg(z^*)^T v = 0 \overset{\text{Rang}\,(Dg(z^*)) = m}{\Rightarrow} v = 0. \qquad \checkmark$

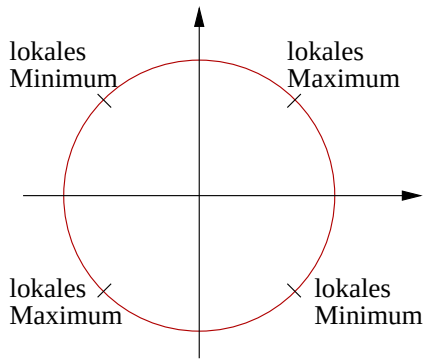
Somit gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_m$, so dass $L(z^*, \lambda_1, ..., \lambda_m) = 0$ ist.

$\square$

Bemerkung 13.35 *Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen* Lagrangemultiplikatoren.

Beispiele 13.36 *(i)* $f(x,y) = x \cdot y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$
Die Funktion f hat unter der Nebenbedinung $g(x,y) = 0$ ein lokales Extremum $\Leftrightarrow$
$\operatorname{grad} f(x,y) - \lambda \operatorname{grad} g(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \\
&\qquad\quad \textit{und}\, x^2 + y^2 = 1 \\
&\overset{\cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}}{\Rightarrow} \quad y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \\
&\overset{x^2+y^2=1}{\Rightarrow} \quad 2x^2 = 1 \textit{ und } 2y^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$



(ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = Ax \cdot x$ *(A sei symmetrisch),*
$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|x\|^2 - 1 = x \cdot x - 1.$
Hat f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ein lokales Extremum, so gilt

$$\operatorname{grad} f(x) - \lambda \operatorname{grad} g(x) = 0 \Leftrightarrow 2Ax - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x.$$

D.h. an einem lokalen Extremum gilt

x ist Eigenvektor von A,
λ ist Eigenwert von A.

Tatsächlich wissen wir bereits:

$$\begin{aligned}
\lambda_{max} &= \max_{x \neq 0} \frac{Ax \cdot x}{x \cdot x} = \max_{\|x\|^2 = 1} Ax \cdot x, \\
\lambda_{min} &= \min_{x \neq 0} \frac{Ax \cdot x}{x \cdot x} = \min_{\|x\|^2 = 1} Ax \cdot x.
\end{aligned}$$

13.8 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 13.1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja □ nein □

b) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Extremum. ja □ nein □

c) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja □ nein □

d) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum. ja □ nein □

e) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein globales Minimum. ja □ nein □

Anwesenheitsaufgabe 13.2 Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) := (y^3 - y) \cdot (e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Anwesenheitsaufgabe 13.3 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt $(0,0)$ mit Restglied der Ordnung 4.

Anwesenheitsaufgabe 13.4 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1 x_2.$$

a) Berechnen Sie den kritischen Punkt x^* der Funktion $f(x)$.

b) Berechnen Sie die Hessesche $D^2 f(x^*)$ der Funktion f an der Stelle x^*.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i und zugehörige Eigenvektoren v_i der Matrix $D^2 f(x^*)$.

d) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Funktion

$$g_i(t) = f(x^* + t v_i).$$

Bemerkung: Gilt $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ so folgt daraus, dass g_1 in $t = 0$ ein Maximum und g_2 in $t = 0$ ein Minimum hat. Daraus folgt, dass die Funktion f an der Stelle x^* einen Sattelpunkt besitzt.

Anwesenheitsaufgabe 13.5 Sei K ein Doppelkegel mit einem Öffnungswinkel von $90°$, vom Ursprung aus in z-Richtung geöffnet.

a) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zur impliziten Darstellung von K an:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

b) Wo ist K eine stetig differenzierbare Fläche?

c) Wo lässt sich K lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen?

d) Wo lässt sich K lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen?

Anwesenheitsaufgabe 13.6 Sei K ein Doppelkegel mit einem Öffnungswinkel von $90°$, vom Ursprung aus in z-Richtung geöffnet, gegeben durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

und P eine Ebene gegeben durch

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\},$$

wobei $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Die Mengen $P \cap K$ bezeichnet man als Kegelschnitte.
Welches Objekt ergibt sich für den Kegelschnitt in den folgenden Fällen?

a) $a = b = 0$, $c = 1$, $d = 1$

b) $a = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 0$, $d = 1$

c) $a = \frac{3}{5}$, $b = 0$, $c = \frac{4}{5}$, $d = 1$

Anwesenheitsaufgabe 13.7 Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 7xy + 2x^2y$$

im Punkt $(1,1)$ mit Restglied der Ordnung 4. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

Anwesenheitsaufgabe 13.8 Entwicklen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2}$$

nach Taylor an der Stelle $x = x_0$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

Anwesenheitsaufgabe 13.9 Entwicklen Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = -\sqrt{1 - x^2 + y^2 + z^2}$$

nach Taylor an der Stelle $(0,0,0)$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

Aufgabe 13.10 Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x,y) = xy \quad \text{und} \quad w(u,v) = u^2 - v^2.$$

a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u,v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 4, 16$.

b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinen von z ab und umgekehrt?

c) Welche 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \mapsto \mathbf{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x,y) = D\mathbf{g}(u,v) \cdot \mathbf{A} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u,v) = D\mathbf{f}(x,y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.11 Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 13.12 Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$. ja □ nein □

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann ist die Hesse-Matrix $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit. ja □ nein □

c) Gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ und hat $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum. ja □ nein □

Aufgabe 13.13

a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

Aufgabe 13.14 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0,2\pi) \times [0,2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

Aufgabe 13.15 Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

Aufgabe 13.16 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x + b \cdot x + c$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_0 + t\xi)$$

mit x_0, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 2$, $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $g'(t)$ und $g''(t)$.

b) Zeigen Sie für beliebige A, b, c, x_0 und ξ

$$g'(t) = A\,(x_0 + t\xi) \cdot \xi + b \cdot \xi.$$

Tipp: $g = f \circ h$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $h(t) = x_0 + t\xi$.
Verwenden Sie die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$.

c) Zeigen Sie für beliebige A, b, c, x_0 und ξ:

$$g''(t) = A\xi \cdot \xi.$$

Tipp: Erinnern Sie sich an die Regel zum Ableiten von Skalarprodukten.

Aufgabe 13.17

a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit Restglied $O(|x - x_0|^{2n})$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x,y) \mapsto g(x,y) = \cos(x)\cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ mit Restglied der Ordnung 3.

Aufgabe 13.18 Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = \|x - a\|$ nach Taylor an der Stelle x_0 bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

Aufgabe 13.19 Sei A eine $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\det A \neq 0$. Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) := \|Ax\|^2 - 2Ax \cdot b$$

genau einen Minimierer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hat.

Aufgabe 13.20 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechne Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(0,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,0)$ mit Hilfe von Differenzenquotienten. Berechnen Sie anschließend $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$.

Aufgabe 13.21 Geben Sie die Formel der Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bis zur Ordnung 2 an.

Aufgabe 13.22 Gesucht ist die Schnittmenge der beiden Zylinder

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1, \\ x^2+z^2 &= 1. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Schnittmenge aus zwei geschlossenen Kurven besteht und jede der beiden Kurven durch einen Schnitt einer Ebene mit einem Zylinder beschrieben werden kann.

(ii) Finden Sie eine Parameterdarstellung für beide Schnittkurven.

(iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.
Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 13.23 Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= (x-2)^2+y^2+z^2-4=0\,, \\ g(x,y,z) &:= x-1=0\,, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 13.24 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.

a) Bestimmen Sie für die durch $f(x,y,z) = 0$ gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der xy-Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche in Normalenform berechnen (Tipp: Ohne Normierung der Normalen ist die Rechnung einfacher). Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekannten Funktion durch partielle Ableitungen von f auszudrücken.

b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$?

Aufgabe 13.25

a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x,y,z) := \frac{mG}{||x-a||} = \frac{mG}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}}$$

eines Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m > 0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathscr{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von U für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ $(a \neq b)$ der Massen $m_1 = m_2 = m > 0$ lautet

$$V(x) = V(x,y,z) := \frac{m_1 G}{||x-a||} + \frac{m_2 G}{||x-b||}$$

Sind die Niveauflächen $\mathscr{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$ von V wiederum für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen?

Aufgabe 13.26 Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2-1=0\}$, der vom Punkt $(1,-1,0)$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 13.27

a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2=1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 13.28 Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.

Aufgabe 13.29 Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an?

Aufgabe 13.30 Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$g(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^3$$

im Punkt $(1,1,0)$ mit Restglied der Ordnung 5. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

Aufgabe 13.31 Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(R,0)$ mit Restglied der Ordnung 3.
Tipp: Finden Sie eine Funktion $h(\cdot)$, so dass $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

14 Ein kurzer Ausflug in die Differentialgeometrie

14.1 Krümmung von Kurven

Wir betrachten zunächst Kurven im $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$.
Zur Erinnerung: $I := (a,b)$ sei der Parameterbereich einer Kurve

$$x : I \to \mathbb{R}^n; \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Mit $x(I) := \{x(t) \,|\, t \in I\}$ bezeichnen wir die *Spur* der Kurve x. Falls x differenzierbar ist, so bezeichnet

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

den *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve zur Zeit t an der Stelle $x(t)$, $\|\dot{x}(t)\|$ die *Geschwindigkeit*.

Beispiele 14.1

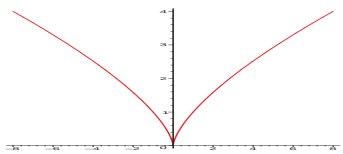
(i) $x : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^2$; $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, *auch beschrieben durch das gewöhnliche Anfangswertproblem* $\dot{x}(t) = D(\frac{\pi}{2})x(t)$ *und* $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *wobei* $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *eine Drehung um den Winkel* α *ist.*
(vgl. Kapitel 10: Gewöhnliche Differentialgleichungen)
Die Kurve $\tilde{x}$ *mit* $\tilde{x}(t) := x(2t)$ *hat die gleiche Spur wie* x.

(ii) $x : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3$; $x(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}$ *ist eine Spiralkurve (Schraubenlinie) mit Radius* r *und Geschwindigkeit* $\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{r^2 + c^2}$.

(iii) $x : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^2$; $x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ *ist offensichtlich eine differenzierbare Kurve*

mit $(x_2(t))^3 = (x_1(t))^2 \Rightarrow x_2(t) = (x_1(t))^{\frac{2}{3}}$.

Es gilt aber $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *dies erlaubt hier, dass die Spur der Kurve trotzdem nicht „glatt“ ist, sie hat einen „Knick“.*



(iv) *„Nicht glatte“ Projektion auf die x_1, x_3-Ebene:*

$$x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3;\ x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix};$$

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{9t^4 + 1 + 4t^2} \neq 0.$$

Definition 14.2 (Bogenlänge) *Es sei $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, dann heißt*

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot{x}(\xi)\|\, d\xi$$

die Bogenlänge *der Kurve x von t_0 bis t_1. Eine Kurve $x : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{x}(t)\| = 1$ heißt* bogenlängenparametrisierte *Kurve.*

Satz 14.3 *Eine Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{x}(t)\| \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ besitzt eine Bogenlängenparametrisierung, d.h. es gibt eine Funktion $\gamma : [0, L] \to [a, b]$, so dass $\tilde{x} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{x}(t) = (x \circ \gamma)(t)$ eine Bogenlängenparametrisierung der gleichen Spur ist.*

Beweis: Definiere $s(t) := \int_a^t \|\dot{x}(\xi)\|\, d\xi$, $\dot{s}(t) = \|\dot{x}(t)\|$, d.h. $s : [a, b] \to [0, L]$ mit $L = s(b)$ ist strikt monoton. Damit gibt es nach dem Umkehrsatz für skalare Funktionen eine Umkehrabbildung $\gamma = s^{-1} : [0, L] \to [a, b]$. Nun definieren wir $\tilde{x}(t) = (x \circ \gamma)(t)$ und rechnen nach:

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{x}}(t)\| &= \|\dot{x}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\| = |\dot{\gamma}(t)|\, \|\dot{x} \circ \gamma\| \\ &= \left| \frac{1}{\dot{s} \circ \gamma(t)} \right| \|\dot{x} \circ \gamma\| = \frac{\|\dot{x} \circ \gamma(t)\|}{\|\dot{x} \circ \gamma(t)\|} = 1. \end{aligned}$$

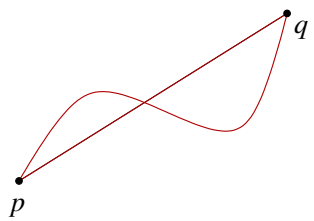
hierzu:

$$\gamma = s^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad s(\gamma(t)) = t \ \Rightarrow\ \dot{s}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 1 \Leftrightarrow \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\dot{s}(\gamma(t))}$$

□

Satz 14.4 (Kürzeste Kurven (Geodätische) im $\mathbb{R}^n$) *Die (differenzierbare) Kurve kürzester Länge zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^n$ ist die Verbindungsgerade.*

Beweis:



Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige (differenzierbare) Kurve mit $x(a) = p$ und $x(b) = q$. Weiterhin sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ ein beliebiger Vektor der Länge 1. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(q-p)\cdot v &= (x(b)-x(a))\cdot v = \left(\int_a^b \dot{x}(t)\,dt\right)\cdot v \\ &= \int_a^b \underbrace{v\cdot\dot{x}(t)}_{\leq\|\dot{x}(t)\|}\,dt \overset{(*)}{\leq} \int_a^b \|\dot{x}(t)\|\,dt.\end{aligned}$$

Speziell für $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ gilt dann $\|q-p\| \leq s(b)$, wobei $s(b)$ die Länge der Kurve x ist, d.h. die Verbindungsgerade mit Länge $\|q-p\|$ ist eine Kürzeste. Ferner gilt Gleichheit bei $(*)$ nur, falls für alle $t \in (a,b)$ gilt $(q-p)\|\dot{x}(t)$. D.h. die Richtung der Geschwindigkeit ist konstant gleich $v = (q-p)$.

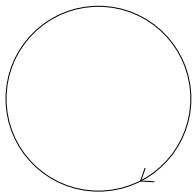
□

Bemerkung 14.5 *x sei eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann gilt $\ddot{x} \perp \dot{x}$.*

Hierzu: Es gilt $0 = \frac{d}{dt}\underbrace{\|\dot{x}\|^2}_{=1} = 2\ddot{x}\cdot\dot{x}$.

Beispiel 14.6 *Betrachte die Parametrisierung eines Kreises mit Radius R:*

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ -R\sin\left(\frac{t}{R}\right)\end{pmatrix}, \\ \|\dot{x}(t)\| &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{t}{R}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{R}\right)} = 1, \\ \ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{R^2}\cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ \frac{R}{R^2}\sin\left(\frac{t}{R}\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -\cos\left(\frac{t}{R}\right)\end{pmatrix} = 0, \\ \|\ddot{x}(t)\| &= \frac{1}{R}\sqrt{\cos^2\left(\frac{t}{R}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{R}\right)} = \frac{1}{R}.\end{aligned}$$



Definition 14.7 *Es sei x eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann nennen wir $\kappa(t) = \|\ddot{x}(t)\|$ die* Absolutkrümmung *oder einfach* Krümmung *der Kurve im Punkt $x(t)$.*

Zurück zum Beispiel: Ein Kreis mit Radius R hat die Krümmung $\frac{1}{R}$. Eine Gerade hat die Krümmung 0.

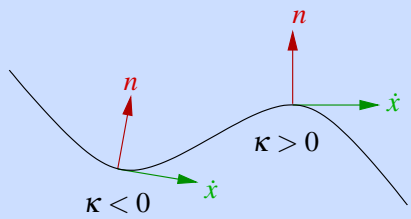
Bemerkung 14.8 *Wenn man eine Normalenrichtung auf einer Kurve $x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ festlegt, z.B. so, dass $(\dot{x}, n)$ positiv orientiert ist, d.h.* $\det(\dot{x}, n) > 0$ *(in Richtung von $\dot{x}$ betrachtet zeigt die Normale nach links), so kann man der Krümmung auch ein Vorzeichen geben:*

Definition 14.9 (Krümmung) *Wir definieren für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve x im $\mathbb{R}^2$*

$$\kappa(t) := -\ddot{x}(t)\cdot n(t),$$

$$\text{mit } n(t) = \frac{1}{\|\dot{x}\|}\begin{pmatrix} -\dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h. } \boxed{\kappa(t) = \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \ddot{x}_2(t)\dot{x}_1(t).}$$



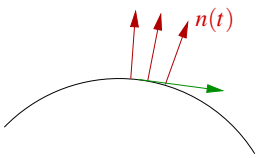
Erneut zurück zum Beispiel des Kreises aus Beispiel 14.6:

$$\kappa(t) = \frac{1}{R}\left(-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right)\left(-\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right) - \frac{1}{R}\left(\sin\left(\frac{t}{R}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{t}{R}\right)\right) = \frac{1}{R}.$$

Der Kreis wird (in diesem Fall) im Uhrzeigersinn durchlaufen, die Normale zeigt also (entsprechend obiger Konvention) nach außen. In diesem Fall ist die Krümmung positiv, bei einer nach innen gerichteten Normalen wäre sie negativ.

Bemerkung 14.10

Für bogenlängenparametrisierte Kurven gilt $\kappa(t) = \dot{n}(t)\cdot\dot{x}(t)$ (Variation der Normalen in Richtung der Geschwindigkeit).



$$\begin{aligned} \textit{Hierzu:} \qquad & 0 = n(t)\cdot\dot{x}(t) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} 0 = \dot{n}(t)\cdot\dot{x}(t) + n(t)\cdot\ddot{x}(t) \\ \Rightarrow \quad & \kappa(t) = -\ddot{x}(t)\cdot n(t) = \dot{n}(t)\cdot\dot{x}(t). \end{aligned}$$

Satz 14.11 (Krümmung ebener Kurven) *$x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sei eine zweimal differenzierbare Kurve mit $\dot{x}(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, dann gilt*

$$\kappa(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-3}\left(\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \ddot{x}_2(t)\dot{x}_1(t)\right) \quad \textit{für alle } t \in (a,b).$$

Beweis: Es sei $\tilde{x}(t) = (x\circ\gamma)(t)$, wobei $\gamma(t) = s^{-1}(t)$ ist, mit $s(t) = \int_a^t \|\dot{x}(s)\|\,ds$ (d.h. γ ist die Reparametrisierungsfunktion zur Bogenlängenparametrisierung von x, $\tilde{x}$ ist die Bogen-

längenparametrisierung). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \circ \gamma(t) \\ \dot{x}_2 \circ \gamma(t) \end{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \quad \text{(nach der Kettenregel)}, \\
\tilde{n}(t) &= \dot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} -\dot{x}_2 \circ \gamma(t) \\ \dot{x}_1 \circ \gamma(t) \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \dot{\tilde{n}}(t) &= \ddot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} -\dot{x}_2 \circ \gamma(t) \\ \dot{x}_1 \circ \gamma(t) \end{pmatrix} + \dot{\gamma}^2(t) \begin{pmatrix} -\ddot{x}_2 \circ \gamma(t) \\ \ddot{x}_1 \circ \gamma(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\kappa \circ \gamma(t) &= \dot{\tilde{n}}(t) \cdot \dot{\tilde{x}}(t) = 0 + \dot{\gamma}(t)^3 \begin{pmatrix} -\ddot{x}_2 \circ \gamma(t) \\ \ddot{x}_1 \circ \gamma(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \circ \gamma(t) \\ \dot{x}_2 \circ \gamma(t) \end{pmatrix}, \\
\text{wobei } \dot{\gamma}(t) &= (s^{-\dot{1}}(t)) \overset{\substack{\text{Umkehrsatz für} \\ \text{skalare Funktionen}}}{=} (\dot{s} \circ \gamma(t))^{-1} = \|\dot{x} \circ \gamma(t)\|^{-1}.
\end{aligned}$$

Mit $s = \gamma(t)$ ergibt sich schließlich

$$\kappa(s) = \|\dot{x}(s)\|^{-3} \big(\ddot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \ddot{x}_2(s)\dot{x}_1(s)\big) \quad \text{für alle } s \in (a,b).$$

□

Satz 14.12 (Absolutkrümmung) *Für eine zweimal differenzierbare Kurve $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{x}(t) \neq 0$ für alle t gilt*

$$\kappa(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-4} \left\| \|\dot{x}(t)\|^2 \ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t))\, \dot{x}(t) \right\|.$$

Beweis: Definiere $\tilde{x}(t)$ wie im Beweis zu Satz 14.11, dann folgt

$$\ddot{\tilde{x}}(t) = \ddot{\gamma}(t)(\dot{x} \circ \gamma(t)) + \dot{\gamma}^2(t)(\ddot{x} \circ \gamma(t)).$$

Mit $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{x} \circ \gamma(t)\|^{-1} = (\dot{x} \circ \gamma(t) \cdot \dot{x} \circ \gamma(t))^{-\frac{1}{2}}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}(t) &= -\frac{(\ddot{x} \circ \gamma) \cdot (\dot{x} \circ \gamma)\dot{\gamma}}{\|\dot{x} \circ \gamma\|^3} = -\|\dot{x} \circ \gamma\|^{-4} (\ddot{x} \circ \gamma) \cdot (\dot{x} \circ \gamma) \\
\overset{s=\gamma(t)}{\Rightarrow} \quad \kappa(s) &= \left\|\ddot{\tilde{x}}(t)\right\| = \left\| -(\ddot{x}(s) \cdot \dot{x}(s))\, \dot{x}(s) + \|\dot{x}(s)\|^2 \ddot{x}(s) \right\| \|\dot{x}(s)\|^{-4}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 14.13 *Definiere $v(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}$ (Tangentialvektoren an die Kurve mit Länge 1), dann ist*

$$\kappa(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-2} \|\ddot{x}(t) - (v(t) \cdot \ddot{x}(t))\, v(t)\| = \|\dot{x}(t)\|^{-2} \|P_{N_t x} \ddot{x}(t)\|,$$

wobei $P_{N_t x} = \mathbb{1} - v(t)v(t)^T$ die orthogonale Projektion auf den Normalraum $N_t x$ (die Hyperebene senkrecht zu $v(t)$) an die Kurve x im Punkt t ist.

Zum physikalischen Hintergrund: Es ist

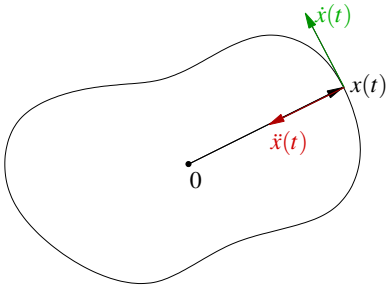
$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) & \text{die Geschwindigkeit eines Massepunktes } x, \\ \ddot{x}(t) & \text{die Beschleunigung eines Massepunktes } x. \end{array}$$

Die Bewegung eines solchen Massepunktes in einem Kraftfeld wird beschrieben durch

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)).$$

Wir nehmen an: $F(x(t)) = -f(x(t))x(t)$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dies gilt zum Beispiel für die Bewegung eines Massepunktes um eine feste Masse im Ursprung.

Schauen wir uns nun den Fall ebener Kurven:



Betrachte die Abbildung $x(s,t) = sx(t)$ mit der Jacobi-Matrix $D_{(s,t)}x = \begin{pmatrix} x_1(t) & s\dot{x}_1(t) \\ x_2(t) & s\dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$, dann gilt für die durch den Strahl $x(t)$ in der Zeit t_0 bis t_1 überstrichene Fläche $\mathscr{A}(t_0,t_1)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(t_0,t_1) &= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 |\det D_{s,t}x(s,t)|\,ds\,dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 s\,ds}_{=\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t_1} |x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)|\,dt \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathscr{A}(t_0,t) &= \frac{1}{2}|x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)|. \end{aligned}$$

Satz 14.14 (Zweites Keplersches Gesetz) *Falls die Bahn eines Massepunktes x durch das Kraftgesetz $\ddot{x}(t) = -f(x(t))x(t)$ beschrieben wird, so gilt*

$$\frac{d}{dt}\mathscr{A}(t_0,t) \equiv konstant.$$

(D.h. der Strahl $x(t)$ überstreicht in gleichen Zeitintervallen stets die gleiche Fläche.)

Beweis: Nehmen wir an $x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) > 0$ (andernfalls muss man die Kurve gemäss dem Vorzeichen in Intervalle zerlegen und dann die Terme nachher wieder aufaddieren), dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(t_0,t) &= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_2\dot{x}_1}_{=0} + \underbrace{x_1\ddot{x}_2 - x_2\ddot{x}_1}_{=-(x_1 f(x)x_2 - x_2 f(x)x_1)=0}\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

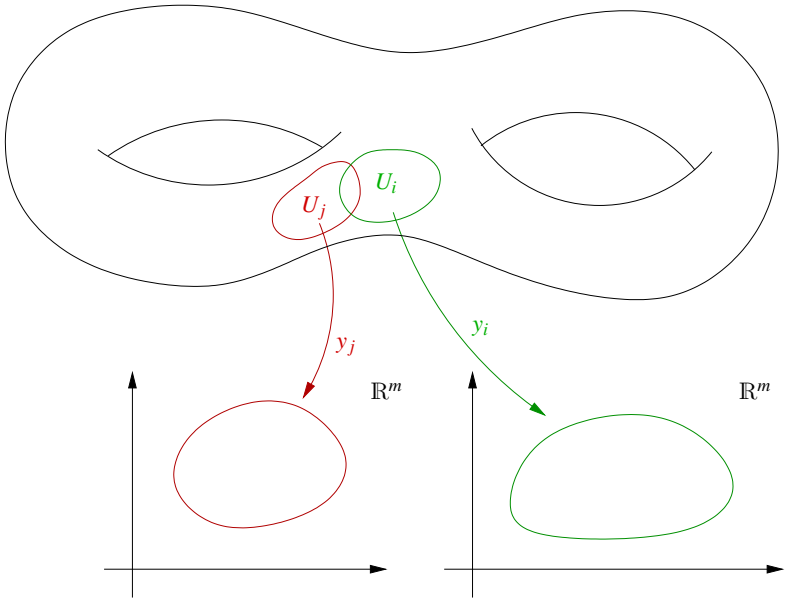
14.2 Mannigfaltigkeiten, Karten und Atlanten

Nun wenden wir uns der Betrachtung allgemeiner Flächen zu:

Definition 14.15 (Mannigfaltigkeit) *Eine Menge $\mathscr{M}$ heißt m-dimensionale C^k-*Mannigfaltigkeit*, falls gilt:*

- *Für $p,q \in \mathscr{M}$ mit $p \neq q$ gibt es Umgebungen $U(p) \cap U(q) = \emptyset$.*
- *Es gibt eine Überdeckung von $\mathscr{M}$ mit (bezogen relativ auf $\mathscr{M}$) offenen Mengen $\{U_i\}_{i=1,\dots,I}$ (d.h. der Begriff "offen" ist wohldefiniert auf $\mathscr{M}$) $(I \leq \infty)$ und dazu gehörige Abbildungen $y_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ für die gilt:*
  - *$y_i : U_i \to y_i(U_i)$ ist eine stetige Abildung mit stetiger Inverser.*
  - *$y_j \circ y_i^{-1} : y_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist k-mal stetig differenzierbar.*

Die Abbildungen y_i heißen Karten*, die Gesamtheit aller Karten* Atlas*. Die inverse Abbildung $x_i = y_i^{-1}$ nennen wir* Parametrisierung *zur Karte y_i, die Abbildungen $y_j \circ y_i^{-1}$ heißen* Kartenwechsel.



Bemerkung 14.16 *Es wird nicht vorausgesetzt, dass $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist.*

Beispiele 14.17 *(i)* **Kurven (vgl. Abschnitte 5.2 und 14.1):** *Es sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, dann ist $\mathscr{M} = \gamma((a,b))$ (Spur der Kurve) eine 1-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist $(\gamma \circ \beta)^{-1}$ für jedes invertierbare, stetig differenzierbare β eine Karte.*

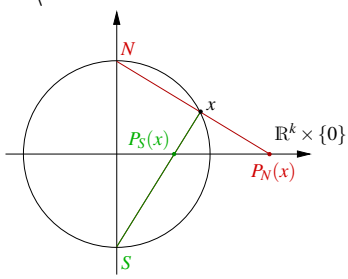
(ii) **Graphenflächen (vgl. Abschnitte 5.4 und 11.6 ab Seite 371):** *Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, dann ist $\mathscr{M} = \{(\xi, f(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}^m\}$ eine m-dimensionale*

C^k-Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ mit $x(\xi) = (\xi, f(\xi))$ ist eine Parametrisierung.

(iii) **Implizite Flächen (vgl. Folgerung 13.26):** *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\operatorname{Rang}(Df) = m$ auf $\mathscr{M} = \{z \,|\, f(z) = 0\}$. Dann folgt mit dem Impliziten Funktionentheorem, dass $\mathscr{M}$ eine $(n-m)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist.*

(iv) **parametrisierte Hyperflächen (vgl. Abschnitt 11.6 ab Seite 371):** *Wenn $x : \omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung mit $\operatorname{Rang}(Dx) = n-1$, dann ist $x(\omega)$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit.*

(v) **Sphäre $\mathbf{S^k}$ im $\mathbf{R^{k+1}}$:**
Es ist $S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \,|\, \|x\| = 1\}$, dann ist S^k nach (iii) eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Betrachten wir nun zwei Karten (stereographische Projektion): $P_N : S^k \backslash N \to \mathbb{R}^n$, $P_S : S^k \backslash S \to \mathbb{R}^n$



$$\begin{aligned} P_N(x) &= \textit{Schnittpunkt des Strahls von N (Nordpol)} \\ &\quad \textit{durch x mit der Ebene } \mathbb{R}^k \times \{0\}, \\ P_S(x) &= \textit{Schnittpunkt des Strahls von S (Südpol)} \\ &\quad \textit{durch x mit der Ebene } \mathbb{R}^k \times \{0\}. \end{aligned}$$

Zu $\mathbf{P_N(x)}$: *Es sei $x = (x_{1\ldots k}, x_{k+1})$ mit $x_{1\ldots k} = (x_1, \ldots, x_k)$, dann ist die Gerade des Strahls gegeben durch $\{N + t(x-N) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.*
Im Schnittpunkt der Geraden mit $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ gilt in der $(k+1)$-ten Komponente:

$$\begin{aligned} 1 + t(x_{k+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow t &= \frac{1}{1 - x_{k+1}}, \\ \Rightarrow \quad P_N(x) = 0 + \frac{1}{1 - x_{k+1}}(x_{1\ldots k} - 0) &= \frac{x_{1\ldots k}}{1 - x_{k+1}}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir: $P_S(x) = \dfrac{x_{1\ldots k}}{1 + x_{k+1}}$.

$$\left(\textit{es gilt hierbei:} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Nun zum Kartenwechsel:

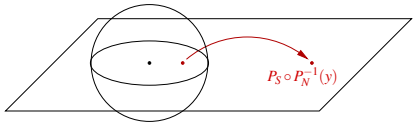
$$\begin{aligned}
\textit{Zu } P_N^{-1}: \qquad & \textit{Für } y = P_N(x) \textit{ gilt } \|P_N(x)\|^2 = \|y\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2 + \ldots + x_k^2}{(1-x_{k+1})^2} \overset{\|x\|^2=1}{=} \frac{1-x_{k+1}^2}{(1-x_{k+1})^2} = \frac{1+x_{k+1}}{1-x_{k+1}} = \|y\|^2 \\
\Rightarrow \quad & 1 + x_{k+1} = \|y\|^2 - x_{k+1}\|y\|^2 \Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{1+\|y\|^2}.
\end{aligned}$$

Ferner folgt aus $(P_N(x))_i = y_i = \dfrac{x_i}{1-x_{k+1}}$*:*

$$\begin{aligned}
& x_i = y_i(1-x_{k+1}) = y_i\left(1 - \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right) = y_i\left(\frac{2+0}{1+\|y\|^2}\right) = \frac{2y_i}{1+\|y\|^2} \\
\Rightarrow \quad & P_N^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Kartenwechsel $P_S \circ P_N^{-1}$*:*

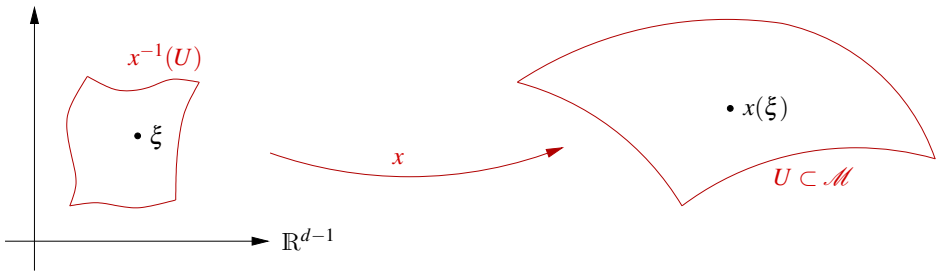
$$(P_S \circ P_N^{-1})(y) = \frac{\frac{2y}{1+\|y\|^2}}{1 + \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}} = \frac{y}{\|y\|^2}.$$



Diese Abbildung bezeichnet man als Spiegelung (Inversion) an der S^{k-1}. *Da* $s \mapsto \frac{1}{s}$ *Umkehrabbildung zu sich selber ist, folgt auch* $P_N \circ P_S^{-1} = \frac{y}{\|y\|^2}$.

Nun betrachten wir eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^d$ (z.B. 2-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$), d.h. eine Hyperfläche:

Wir nehmen an, dass die Fläche beliebig oft differenzierbar ist.



Wir definieren den *Tangentialraum* an $\mathscr{M}$ in $x = x(\xi)$ (vgl. Definition 11.45 und Bemerkung 11.46):

$$\begin{aligned} T_x\mathscr{M} &= \left\{\dot\gamma(0) \,|\, \gamma(t) = x(\xi + tv),\, v \in \mathbb{R}^{d-1}\right\}, \\ \text{mit } \dot\gamma(0) &= Dx(\xi)v = v \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,d-1}}}_{\in \mathbb{R}^{d,d-1}} = \sum_{j=1}^{d-1} v_j \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \\ \Rightarrow T_x\mathscr{M} &= \left\{Dx(\xi)v \,|\, v \in \mathbb{R}^{d-1}\right\}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $\left\{\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi_{d-1}}\right\}$ bilden eine Basis des Tangentialraums.

Wir erinnern uns an die Längenmessung auf einer Fläche: (vgl. Definition 11.50)
Gegeben sei eine Kurve $c : [0,1] \to x^{-1}(U)$, dann ist die Länge von c im $\mathbb{R}^{d-1}$ gegeben durch Länge(c) $= \int_0^1 \|\dot c(t)\|\, dt$. Auf $\mathscr{M}$ ergibt sich die Länge dann durch

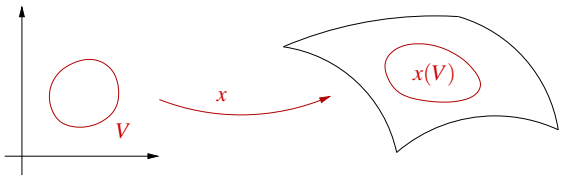
$$\begin{aligned} \text{Länge}(x \circ c) &= \int_0^1 \|\frac{d}{dt} x \circ c(t)\|\, dt = \int_0^1 \|Dx\dot c(t)\|\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{Dx(c(t))\dot c(t) \cdot Dx(c(t))\dot c(t)}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{Dx^T Dx\dot c \cdot \dot c}\, dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wir definieren} \quad G(\xi) &:= Dx(\xi)^T Dx(\xi) \quad \textit{(Metrischer Tensor)}, \\ g(v,w) &:= G(\xi)v \cdot w \quad \textit{(Metrik)}. \end{aligned}$$

Der Term $g(\cdot,\cdot)$ kontrolliert Längenänderung unter der Parametrisierung x.

Zur Erinnerung sei bemerkt, dass wir G bereits im Kapitel über die Flächenintegration (Satz 11.52) kennengelernt haben:

$$\text{Fläche}(x(V)) = \int_V \sqrt{\det G(\xi)}\, d\xi.$$



Zur Vereinfachung schreiben wir auch:

$g = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,d-1}$ für G.
Die Komponenten der Inversen g^{-1} von $g(= G)$ bezeichnen wir mit g^{ij}:

$$g^{-1} = (g^{ij})_{i,j=1,\dots,d-1}.$$

Man nennt g bzw. $g(\cdot,\cdot)$ auch die *1. Fundamentalform* von $\mathscr{M}$. Diese stellt ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum in Kartenkoordinaten dar. Man vergleiche hier das Kapitel für Skalarprodukte.

14.3 Geodätische Kurven auf Flächen

Im Folgenden werden wir uns mit kürzesten Kurven auf Flächen beschäftigen. Hierzu definieren wir zunächst eine bestimme Mengen von speziellen Kurven, die nachher kürzeste Kurven als Untermenge enthalten werden.

Definition 14.18 (Geodätische Kurven) *Eine zweimal stetig differenzierbare Kurve* $x : [0,1] \to \mathscr{M}$ *auf einer glatten Hyperfläche* $\mathscr{M}$ *heißt* geodätische Kurve*, falls*

$$\dot{x}(t) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \ddot{x}(t) - [\ddot{x}(t) \cdot n(x(t))]\, n(x(t)) - \left[\ddot{x}(t) \cdot \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}\right] \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = 0.$$

Hierbei ist $n(x(t))$ *die Flächennormale auf* $\mathscr{M}$*. D.h. falls* x *bogenlängenparametrisiert ist* $(\ddot{x} \perp \dot{x})$*, so steht die Beschleunigung senkrecht auf der Fläche:* $\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t) \cdot n(x(t))\, n(x(t))$*.*

Satz 14.19 *Sei* $x : [0,1] \to \mathscr{M}$ *kürzeste Kurve unter* C^2*-Kurven auf* $\mathscr{M}$*, die* $x(0)$ *und* $x(1)$ *verbinden, so ist* x *eine geodätische Kurve.*

Beweis: Wir zeigen, dass eine Kurve, die nicht geodätische Kurve ist, auch nicht die kürzeste Verbindung der Endpunkte sein kann. Nehmen wir an, dass x nach Bogenlänge parametrisiert, d.h.

$$\|\dot{x}(t)\| = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in (0,1).$$

Wenn x nicht geodätische Kurve ist, dann gilt (wegen $\ddot{x} \perp \dot{x}$)

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t) \cdot n(x(t)) n(x(t)) + v(t),$$

wobei v eine stetige, nicht verschwindende vektorwertige Abbildung längs $x(t)$ mit $v(t) \in T_{x(t)}\mathscr{M}$ und $v(t) \perp \dot{x}(t)$ ist. Nun konstruieren wir eine Schar von Kurven

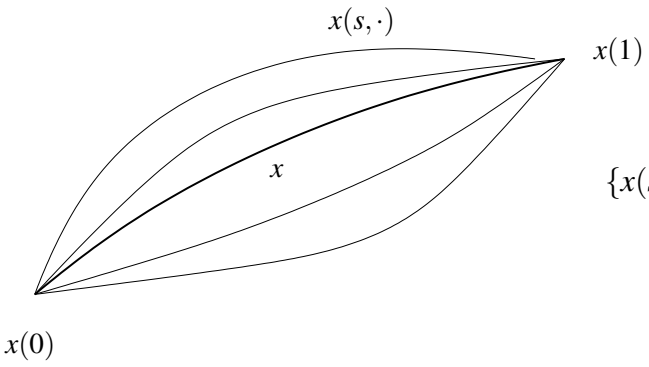
$$x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \mathscr{M}$$

mit

$$x(0,t) = x(t), \quad \partial_t x(0,t) = \dot{x}(t), \quad \partial_s x(0,t) = \eta(t) v(t),$$

wobei $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion sei mit $\eta(0) = \eta(1) = 0$, die auf $(0,1)$ echt positiv ist. Dies macht man z.B. durch das Fortsetzen von $v \circ x$ zu einem Vektorfeld V definiert auf einer Umgebung der Kurve x auf $\mathscr{M}$ und dem Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung $\partial_s x(s,t) = V(x(s,t))\eta(t)$ mit Anfangswerten

$$x(0,t) = x(t).$$



$\{x(s,\cdot),\ s \in (-\varepsilon,\varepsilon)\}$ Schar von Kurven

Nun betrachten wir die Länge

$$L(s) = \int_0^1 \|\partial_t x(s,t)\|\, dt$$

der Kurven $x(s,\cdot)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}L(s)|_{s=0} &= \int_0^1 \frac{\partial_s\partial_t x(s,t)\cdot\partial_t x(s,t)}{\|\partial_t x(s,t)\|}\,dt\Big|_{s=0} = \int_0^1 \frac{\partial_t\partial_s x(s,t)\cdot\partial_t x(s,t)}{\|\partial_t x(s,t)\|}\Big|_{s=0}dt \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[\partial_s x(0,t)\cdot\frac{\partial_t x(0,t)}{\|\partial_t x(0,t)\|}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \partial_s x(s,t)\cdot\partial_t\left(\frac{\partial_t x(s,t)}{\|\partial_t x(s,t)\|}\right)\Big|_{s=0}dt \\
&= 0 - \int_0^1 \eta(t)v(t)\cdot\frac{\partial_t^2 x(0,t)\,\|\partial_t x(0,t)\|^2 - \partial_t x(0,t)\Big(\partial_t x(0,t)\cdot\partial_t^2 x(0,t)\Big)}{\|\partial_t x(0,t)\|^3}\,dt \\
&= -\int_0^1 \eta(t)v(t)\cdot\Big(\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)(\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\Big)\,dt \\
&= -\int_0^1 \eta(t)v(t)\cdot\Big(n(x(t))\Big(\ddot{x}(t)\cdot n(x(t))\Big) + v(t)\Big)\,dt \\
&= -\int_0^1 \eta(t)\|v(t)\|^2\,dt < 0,
\end{aligned}$$

da v nicht identisch Null ist, und $\eta(t) > 0$ auf ganz $(0,1)$. Bei den Umformungen haben wir zunächst verwendet, dass $\|\partial_t x(0,t)\| = \|\dot{x}(t)\| = 1$, anschließend $\ddot{x}(t) \perp \dot{x}(t)$ und den Zusammenhang zwischen $\ddot{x}$ und v. Im letzten Schritt benutzen wir die Tatsache, dass v tangential ist, also $v(t) \perp n(t)$. Aus $L'(0) < 0$ folgt aber schließlich, dass es ein positives s gibt, so dass

$$L(s) < L(0) = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|\, dt.$$

Somit kann x nicht die kürzeste Verbindung sein, da $x(s,\cdot)$ kürzer ist.

□

Beispiele 14.20 *Betrachte den Zylinder*

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}.$$

(i) Mantellinien $x(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ t \end{pmatrix}$ *mit konstantem* $\xi \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\|\xi\| = 1$*:*

Man berechnet $\ddot{x}(t) = 0$*, also sind alle Mantellinien geodätische Kurven (wie grundsätzlich alle Geraden, die auf der jeweiligen Fläche liegen).*

(ii) Schraubenlinien $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ct + b \end{pmatrix}$ *mit Konstanten* $c, b \in \mathbb{R}$ *(für* $h = 0$ Breitenkreise*): Aus der Kurventangente* $v(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}$ *und der Flächennormalen* $n(x)$ *erh alt man mittels* $w(t) = v(t) \times n(x(t))$ *eine Orthonormalbasis* $\{v(t), n(x(t)), w(t)\}$ *des* $\mathbb{R}^3$*. Man kann nun* $\ddot{x}(t)$ *in dieser Basis darstellen:*

$$\ddot{x}(t) = \big(\ddot{x}(t) \cdot v(t)\big)v(t) + \big(\ddot{x}(t) \cdot n(x(t))\big)n(x(t)) + \big(\ddot{x}(t) \cdot w(t)\big)w(t)$$

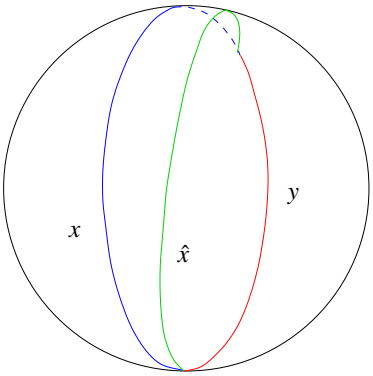
Falls x eine geodätische Kurve ist, ist nach Definition $\ddot{x} - (\ddot{x} \cdot n)n - (\ddot{x} \cdot v)v = 0$*, also muss* $\big(\ddot{x}(t) \cdot w(t)\big)w(t) = 0$ *sein. Daraus ergibt sich nach Skalierung die Bedingung*

$$\ddot{x}(t) \cdot (\dot{x}(t) \times \tilde{n}(x(t))) = 0$$

für eine beliebige Flächennormale $\tilde{n}$ *an der Stelle* $x(t)$*. Dies verifiziert man für Schraubenlinien leicht durch Nachrechnen:*

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ c \end{pmatrix}, \\
n(x(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot{x}(t) \times n(x(t)) &= \begin{pmatrix} -c\sin t \\ c\cos t \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\ddot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\ddot{x}(t) \cdot \Big(\dot{x}(t) \times n(x(t))\Big) &= c\cos t \sin t - c\sin t \cos t = 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung 14.21 *Nicht jede geodätische Kurve ist Kürzeste. Vergleiche dazu die Abschnitte auf Großkreisen auf der Sphäre mit Radius 1, die länger sind als* π*.*



Länge (x) $>$ *Länge* (y)

Länge (x) $>$ *Länge* $(\hat{x})$

14.4 Krümmung auf Flächen

Nun betrachten wir ähnlich wie bei Kurven die 2. Ableitung der Parametrisierung, bzw. die Variation der Normalen:

Definition 14.22 (2. Fundamentalform) *Die Abbildung* $h = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,d-1}$ *mit*

$$h_{ij} := -n(x(\xi)) \cdot \frac{\partial^2 x(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

heißt 2. Fundamentalform *von* $\mathscr{M}$. *Hierbei ist* $n(x)$ *die Normale an* $\mathscr{M}$ *in* $x(\xi)$.

Bemerkung 14.23 *Wir wissen bereits, dass* $n(x) = \frac{\tilde{n}(x)}{\|\tilde{n}(x)\|}$ *mit*

$$\tilde{n}(x) = ((-1)^{i+1} \det A_i)_i\,,$$

wobei $A_i = \left(\frac{\partial x_k(\xi)}{\partial \xi_l}\right)_{\substack{k=1,\dots,d,k\neq i\\ l=1,\dots,d-1}}$ *(d.h., i-te Zeile von Dx gestrichen).*

Für $d = 3$ *ergibt sich die bekannte Formel:* $\tilde{n}(x(\xi)) = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi_2}$.

Es folgt aus $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \perp \mathbf{T_x}\mathscr{M}$**:**

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((n \circ x) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_j}\right) = \underbrace{(n \circ x) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_i \partial \xi_j}}_{-h_{ij}} + \frac{\partial (n \circ x)}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_j}$$

$$\Rightarrow h_{ij} = h_{ji} = \frac{\partial (n \circ x)}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_i}.$$

(Vgl. den Kurvenfall: $\kappa = -n \cdot \ddot{x} = \dot{n} \cdot \dot{x}$ für bogenlängenparametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^2$. Hier ist $h = (h_{ij})_{ij}$ noch mit der Karte verknüpft.)

D.h. die 2. Fundamentalform beschreibt Variationen der Normalen bezogen auf die Parametrisierung, in dem Sinn, dass sie $D(n \circ x)$ in allen tangentialen Richtungen $\frac{\partial x}{\partial \xi_j}, i = 1, .., d-1$ identifiziert. Weiterhin gilt

$$\|n(x)\|^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \|n \circ x\|^2 = 2 \frac{\partial (n \circ x)}{\partial \xi_j} \cdot (n \circ x),$$

d.h. die Normalkomponente der Variation der Normalen verschwindet. Die Variation der Normalen kann somit als Abbildung des Tangentialraums in sich selbst verstanden werden. In diesem Sinn definieren wir die lineare Abbildung $S_{T_x\mathscr{M}} : T_x\mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$ implizit über

$$\left(S_{T_x\mathscr{M}} \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = \frac{\partial (n \circ x)}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = h_{jk}. \tag{18}$$

Die Abbildung $S_{T_x\mathscr{M}}$ ist eindeutig durch diese Gleichung bestimmt, denn für jede lineare Abbildung $A : T_x\mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$ (hier $A = S_{T_x\mathscr{M}}$) gilt $Av \in T_x\mathscr{M}$ falls $v \in T_x\mathscr{M}$. D.h. $S_{T_x\mathscr{M}} v$ ist eindeutig bestimmt, wenn wir $S_{T_x\mathscr{M}} v_i$ bestimmen für $\{v_i\}_i$ Basis von $T_x\mathscr{M}$. $S_{T_x\mathscr{M}} v_i$ ist eindeutig bestimmt wenn wir $S_{T_x\mathscr{M}} v_i \cdot v_j$ angeben. Hier wählen wir $v_j = \frac{\partial x}{\partial \xi_j}$.

Basis-Darstellung von $\mathbf{S_{T_x\mathscr{M}}}$: Die Matrix $S = (S_{ij})_{i,j=1,\dots,d-1}$ sei die Basis-Darstellung von $S_{T_x\mathscr{M}}$ bezüglich der Basis $\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi_{d-1}}$, d.h.

$$\left(S_{T_x\mathscr{M}} \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \right) = \sum_i S_{ij} \frac{\partial x}{\partial \xi_i}.$$

Hier steht in den Spalten der Matrix das Bild eines Basisvektors dargestellt in der Basis. Wir nennen $S_{T_x\mathscr{M}}$ die *Weingarten-Abbildung* zu $\mathscr{M}$ im Punkt x und schreiben auch

$$S_{T_x\mathscr{M}} = Dn.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left(S_{T_x\mathscr{M}} \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = h_{jk} && \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{d-1} S_{ij} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_k}}_{g_{ik}} = h_{jk} && \Leftrightarrow \qquad S^T g = h \\
& && \overset{g,h \text{ symmetrisch}}{\Leftrightarrow} \quad gS = h \Leftrightarrow S = g^{-1} h.
\end{aligned}$$

Zusammenfassen folgt damit: $g(Sv, w) = gSv \cdot w = hv \cdot w = h(v, w)$. Dies entspricht der Gleichung (18) für $S_{T_x\mathscr{M}}$.
D.h. S ist die Darstellung der 2. Fundamentalform in der 1. Fundamentalform.

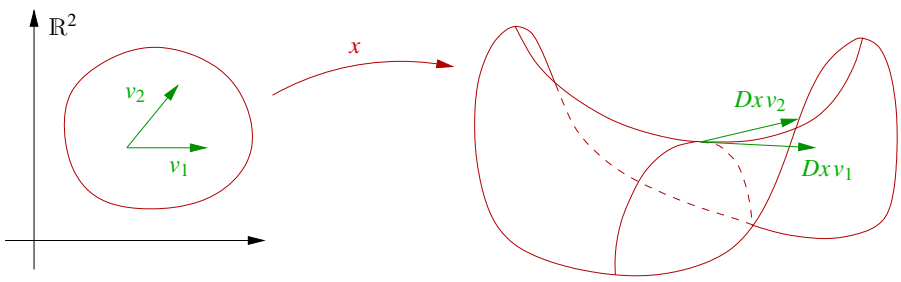
Lemma 14.24 *S ist symmetrisch bzgl. der Metrik $g(\cdot,\cdot)$, d.h. es gilt $g(Sv, w) = g(v, Sw)$.*

Beweis: Es gilt $g(Sv, w) = gSv \cdot w = hv \cdot w = hw \cdot v = gSw \cdot v = gv \cdot Sw = g(v, Sw)$.

□

Damit kann man S diagonalisieren und wir definieren:

Definition 14.25 (Hauptkrümmungen) *Die Eigenwerte $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1}$ von S heißen* Hauptkrümmungen. *Die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{d-1}$ mit $Sv_i = \kappa_i v_i$ heißen* Hauptkrümmungsrichtungen. *Diese sind g-orthogonal, d.h. $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Hier ist δ_{ij} wieder das Kroneckersymbol mit $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ sonst. Die Vektoren $Dx\,v_i$ für $i = 1, \ldots, d-1$ nennt man* eingebettete Hauptkrümmungsrichtungen *in $T_x\mathscr{M}$.*



Bemerkung 14.26 *Die Hauptkrümmungen sind per Definition Eigenwerte der Weingartenabbildung $Dn = S_{T_x\mathscr{M}} : T_x\mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$. Für die eingebetteten Hauptkrümmungsrichtungen rechnen wir wie folgt die Eigenvektor-Eigenschaft nach: Für alle $v \in \mathbb{R}^{d-1}$ gilt*

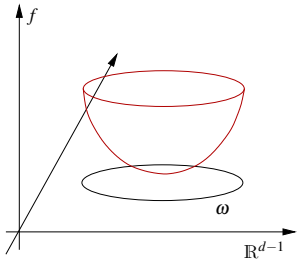
$$\begin{aligned} \kappa_i Dx\,v_i \cdot Dx\,v &= \kappa_i Dx^T Dx\,v_i \cdot v = g\,\kappa_i v_i \cdot v = g(\kappa_i v_i, v) \\ &= g(S v_i, v) = g\,S v_i \cdot v = h\,v_i \cdot v = S_{T_x\mathscr{M}} Dx\,v_i \cdot Dx\,v\,. \end{aligned}$$

Dies heisst aber, dass $\kappa_i Dx\,v_i = S_{T_x\mathscr{M}} Dx\,v_i$ da $S_{T_x\mathscr{M}}$ eine Abbildung von $T_x\mathscr{M}$ nach $T_x\mathscr{M}$ ist. Damit ist dann $Dx\,v_i$ Eigenvektor von $S_{T_x\mathscr{M}}$ zum Eigenwert κ_i.
Diese Eigenvektoreigenschaft der Hauptkrümmungsrichtungen impliziert, dass die Flächennormale n längs Kurven, die tangential zu einer solchen Richtung im Punkt x verlaufen genau in dieser Richtung variieren. Für andere Richtungen weiss man nur, dass die Variation der Normalen im Tangentialraum liegt.

Definition 14.27 (Mittlere Krümmung, Gauß-Krümmung) *Sind $\kappa_i, i = 1, \ldots, d-1$ die oben definierten Hauptkrümmungen, dann definieren wir*

$$\begin{aligned} \textit{die } \text{mittlere Krümmung } \textit{durch} \quad H &:= \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i, \\ \textit{und die } \text{Gauß-Krümmung } \textit{durch} \quad K &:= \prod_{i=1}^{d-1} \kappa_i. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun Graphenflächen



Es sei $\mathscr{M} = \{(\xi, f(\xi)) \,|\, \xi \in \omega\}$ mit der Parametrisierung $x : \omega \to \mathscr{M}, \quad \xi \mapsto x(\xi) = (\xi, f(\xi))$, dann sind

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{(-\nabla f(\xi), 1)^T}{\|(-\nabla f(\xi), 1)\|}, \\ T_x\mathscr{M} &= \operatorname{span}\left\{ \left(e_i, \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right) \,\middle|\, i = 1, \ldots, d-1 \right\}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir einen kritischen Punkt von f:

$$\begin{aligned} & \xi^0 \in \omega \text{ mit } \nabla f(\xi^0) = 0 \\ \Rightarrow\ & g_{ij} = e_i \cdot e_j + 0 = \delta_{ij} \Leftrightarrow g = \mathbb{1} \quad \text{(allgemein gilt für Graphen: } g = \mathbb{1} + \nabla f^T \nabla f) \\ \Rightarrow\ & S(\xi^0) = h(\xi^0)\mathbb{1} = h(\xi^0) \overset{(*)}{=} -D^2 f(\xi^0) \quad \text{(Hesse-Matrix).} \end{aligned}$$

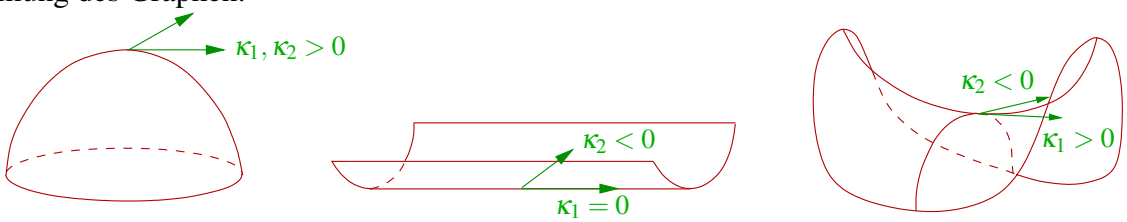
(*) Hierzu:

$$n(\xi^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, h_{ij} = -n(\xi^0) \cdot \frac{\partial^2 x(\xi^0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = -\frac{\partial^2 f(\xi^0)}{\partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j}}$$

Taylorentwicklung:

$$f(\xi) = f(\xi^0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} (\xi_i - \xi_i^0)(\xi_j - \xi_j^0) + O(\|\xi - \xi^0\|^3)$$

Interpretation dieser Formel: Die zweiten Ableitungen charakterisieren lokal die Krümmung des Graphen.



Beispiele 14.28

(i) Betrachte die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| = 1\}$. Die Sphäre ist rotationsinvariant, wir können für die Berechnung der Hauptkrümmungen daher einen beliebigen Punkt betrachten. Hier wählen wir $x = (0,0,1)$ und $f(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}$. Damit folgt

dann

$$\begin{aligned}
\nabla f(\xi_1,\xi_2) &= \frac{-(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}},\\
D^2 f(\xi_1,\xi_2) &= \frac{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}} + \frac{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}(\xi_1\,,\,\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
D^2 f(0,0) &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa_1,\kappa_2 = 1.
\end{aligned}$$

Hier sind alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen und es gilt $H = 2$, $K = 1$.

(ii) Wir betrachten den durch

$$x(\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisierten Zylinder mit Radius r. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
Dx(\varphi,z) &= \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
g_{x(\varphi,z)} = Dx^T(\varphi,z)Dx(\varphi,z) &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
\tilde{n}(x(\varphi,z)) &= \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\\
n(x(\varphi,z)) &= \frac{\tilde{n}(x(\varphi,z))}{\|\tilde{n}(x(\varphi,z))\|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\\
\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}x(\varphi,z) &= \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\\
\frac{\partial^2}{\partial h^2}x(\varphi,z) &= \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial h}x(\varphi,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\
-n(x(\varphi,z))\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}x(\varphi,z) &= r,\\
h &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternativ berechnet man die zweite Fundamentalform mittels

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(n\circ x)}{\partial\varphi}(\varphi,z) &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial(n\circ x)}{\partial h}(\varphi,z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
h_{11} &= \frac{\partial(n\circ x)}{\partial\varphi}(\varphi,z)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}x(\varphi,z) = r, \\
h &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In jedem Fall erhält man

$$S = g^{-1}h = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

Hauptkrümmung	*eingebettete Hauptkrümmungsrichtung*	
$\frac{1}{r}$	$Dxe_1 = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	*(entlang Breitenkreisen)*
0	$Dxe_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	*(entlang Mantellinien)*

sowie $H = \frac{1}{r}$ und $K = 0$. Die eingebetteten Hauptkrümmungrichtungen stehen in der Tat senkrecht aufeinander.

14.5 Übungen

Anwesenheitsaufgabe 14.1 Betrachten Sie eine Ellipse (in der Ebene) mit den Halbachsen a und b und bestimmen Sie die Krümmung in den Scheitelpunkten.

Anwesenheitsaufgabe 14.2 Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf einer Fläche M. An den Stellen $y \in M$ sei $n(y)$ eine Normale an M.
Falls x bogenlängenparametrisiert ist, so gilt:

$$x \text{ ist geodätische Kurve } \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = (\ddot{x}(t) \cdot n(x(t)))\, n(x(t)).$$

a) Zeigen Sie, daß der Äquator auf der Einheitssphäre eine geodätische Kurve ist.

b) Zeigen Sie, daß alle Schraubenlinien geodätische Kurven auf den jeweiligen Zylindern sind.

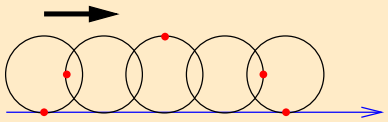
Anwesenheitsaufgabe 14.3 Betrachten Sie für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1^2 + r_2^2 = 1$ Kurven

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} tr_1 \\ tr_2 \\ f(tr_1, tr_2) \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $\{(x,y,f(x,y)) \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}$ mit $f(x,y) = xy$. Bestimmen Sie die Krümmung dieser Kurven im Ursprung.

Aufgabe 14.4 Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

Aufgabe 14.5 Berechnen Sie die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 14.6 Zeigen Sie:
Für eine zweimal differenzierbare Kurve $x(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ lässt sich die Absolutkrümmung mittels

$$k(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-3}\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|$$

berechnen.

Tipp: Zeigen Sie $k(t) = \kappa(t)$, wobei $\kappa(t)$ durch die Formel in der Vorlesung gegeben ist. Verwenden Sie eine geeignete Eigenschaft des Kreuzproduktes.

Aufgabe 14.7 Betrachten Sie die durch $X : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s,v) \mapsto X(s,v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s,v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0,v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0,2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Aufgabe 14.8 Betrachten Sie die durch $X : [0,2\pi) \times [0,100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_2(t) := X(t,10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_3(t) := X(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_i(t)$, $\ddot{\gamma}_i(t)$ und $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1,2,3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0,2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1,2,3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1,2,3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.

Index

1. Fundamentalform, 498
2. Fundamentalform, 502

Abbildung, 49
    identische, 325
    längentreue, 401
    langenerhaltende, 408
    orthogonale, 401
    winkeltreue, 401
abgeschlossene Menge, 338
Ableitung, 60, 62, 132, 137, 138, 178
    Interpolation, 241
    numerische Berechnung, 228
    partielle, 68, 177
    zweite, 229, 449
Abschluss, 381
Absolutkrümmung, 491, 493
Abstand
    Punkt von Ebene, 106
    Punkt von Gerade, 106
Addition, 23
    Assoziativgesetz, 23
    Kommutativgesetz, 23
    Matrizen, 150
    Monotonie, 29
    Vektoren, 93
adjungierte Matrix, 270, 403
affine Funktion, 60, 61, 67, 69, 177, 198
affiner Unterraum, 96, 141
Anfangswertproblem, 310, 317, 324
Anordnung, 29
arcsin, 212, 216
arctan, 213
Assoziativgesetz
    Addition, 23
    Addition komplexer Zahlen, 262
    Addition von Vektoren, 94, 95
    Matrizenprodukt, 136
    Multiplikation, 24
    Multiplikation komplexer Zahlen, 262
    Multiplikation Vektor mit Skalaren, 95
    Multiplikation von Matrizen, 151
Atlas, 495
Ausgleichsproblem, 417
Axiome, 23, 29, 40, 95, 261

Bahnkurve, 310
baryzentrische Koordinaten, 239, 245
Basis, 26, 112–116, 127, 129, 134, 149, 151, 219, 262
Basisergänzungssatz, 115
Bernoulli-Ungleichung, 31
Beschleunigung, 494
beschränkte Menge, 338
Betrag, 30, 49, 64
    komplexer Zahlen, 263
Bild, 138, 140–142, 147, 296
bilinear, 101, 449
Binomische Formel, 25
Bogenlänge, 490
bogenlängenparametrisiert, 490
Bolzano-Weierstrass, 40, 41, 339

Cauchy-Euler-Verfahren, 328, 330
Cauchy-Kriterium, 54
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 103, 269
Cauchyfolge, 40
Cavalierisches Prinzip, 165, 352
Charakteristisches Polynom, 275
cos, 72, 75, 264, 266
Cramersche Regel, 163

definit
    negativ, 451
    positiv, 451, 456
Determinante, 154, 155, 158, 275, 352, 375, 405
    Entwicklung, 159
    geometrische Bedeutung, 165
    Produktregel, 164

Rechenregeln, 162
Dezimalzahlentwicklungen, 40
diagonalisierbar, 280
allgemein, 289
Diagonalisierung, 273, 280, 293, 318, 403, 453, 504
Diagonalmatrix, 289
Differentialgleichung
autonome, 325
gewöhnliche, 307, 499
höherer Ordnung, 308
lineare, 321
lineare homogene, 321
lineare inhomogene, 321
System, 308, 409
Differentialgleichungen
numerische Lösung, 324
Differentiation
bei variablen Intervallgrenzen, 341
unter dem Integral, 339
Zusammenhang zur Integration, 210
Differentiationsregel, 62, 67
Differenzenquotient, 211, 228
Rückwärtsdifferenzenquotient, 228
von Differenzenquotienten, 229
Vorwärtsdifferenzenquotient, 228
zentraler, 229
differenzierbar, 60, 61, 65, 66, 177, 195, 196, 249
auf dem $\mathbb{R}^n$, 178
richtungs-, 179
total, 178, 179
Differenzierbarkeit, 60, 61, 64, 195, 196
Potenzreihen, 76
Dimension, 114–116, 142, 147, 151
direkte Summe, 116
disjunkt, 30
Distributivgesetz, 24
komplexe Zahlen, 262
Matrizen, 151
Vektor und Skalare, 94, 95
Vektoren und Skalar, 94, 95
Divergenz, 381
Drehung, 130, 133, 134, 136, 138, 150, 274, 404
infinitesimale, 410
Dreieck, 238
Dreiecksungleichung, 31
Durchmesser, 245

Ebene, 93, 97, 99, 106, 108, 112, 117, 140
Eigenraum, 275
Eigenvektor, 273, 276, 290, 407, 475
orthonormierter, 277
Eigenwert, 273, 276, 277, 284, 289, 290, 403, 407, 475
Eigenwerte
einer symmetrischen Matrix, 277
eingebettete Hauptkrümmungsrichtungen, 504
Einheitskreis, 184
Einheitsmatrix, 133, 149, 154
Einheitsvektor, 111
Einsetzen
rückwärts, 143, 147, 153
vorwärts, 153
Ellipse, 181, 474
Hauptachsen, 283
Ellipsoid, 182
ε-Ball, 196
ε-Kugel, 196
ε-Umgebung, 32, 54
Euler-Verfahren, 330
Eulersche Zahl, 79
Eulersches Polygonzugverfahren, 325
Existenz
der Eins, 24, 262
der Null, 23, 262
des Inversen, 24, 262
des Negativen, 23, 262
des negativen Vektors, 94, 95
des Nullvektors, 94, 95
exp, 75, 78, 212, 224, 264
Exponent, 26
Exponentialfunktion, 71, 75, 212
Eigenschaften, 78

komplexe, 264

Faktorisierung, 51
Fakultät, 71
Fassregel
Keplersche, 251
Fassregel, Keplersche, 251
Feder, 309
Fehler
Interpolation, 233, 250
numerische Integration, 250
Fibonacci-Zahlen, 291
Fixpunkt, 319
Fixpunktaufgabe, 319
Fläche
des Halbkreises, 215
differenzierbare, 470
Graphenfläche, 190, 372, 373, 378, 495, 505
implizite, 463, 470, 496
parametrisierte Hyperfläche, 371, 496
Fluss
konvergenter, 327
numerischer, 325, 327
stabiler, 327
Flussformulierung, 324
Folge, 32, 40, 72
beschränkte, 36, 40, 42
divergente, 36
konvergente, 32, 37, 38, 40
monotone, 42
Fortsetzungsprinzip, 324, 325
Fubini, 347
Fundamentalform
erste, 498
zweite, 502
Fundamentalsatz der Algebra, 267
Funktion, 49
von mehreren Variablen, 68

ganze Zahlen, 23
Gauß, 28
-Quadratur, 252
Satz von, 382
Satz von, für eine partielle Ableitung, 386
Satz von, für Funktionen mit Nullrandwerten, 382
Gauß-Klammer, 33
Gauß-Krümmung, 504
Gaußsche Flächenformel, 27, 385
Gaußsches Eliminationsverfahren, 144, 146, 157, 158, 411
Geodätische Kurve, 490, 499
geometrische Reihe, 35, 72, 75
geordnetes Paar, 49
Gerade, 95–97, 99, 106, 140
Geschwindigkeitsvektor, 184, 489, 494
Gewichte, 249
Gleichung
homogene, 324
quadratische, 267
Gleichungssystem
lineares, 143, 231, 455
Glieder einer Reihe, 72
Gradient, 180, 193, 455
geometrische Bedeutung, 180
Gradientenabstieg, 456
Gradientenverfahren, 456
Gram–Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren, 423
Graph einer Funktion, 49, 190
Graphenabbildung, 190, 372, 373
Graphenfläche, 190, 372, 373, 378, 463, 472, 495, 505
Graphenkurve, 371
Grenzwert, 32, 37, 40, 42, 72, 74
Rechenregeln, 38
Gruppe, 406
orthogonale, 405, 406
spezielle orthogonale, 405

Hülle
lineare, 112
Halbkreis
Fläche, 215

harmonische Reihe, 73, 213
Hauptachsen der Ellipse, 283
Hauptachsentransformation, 282
Hauptkrümmungen, 504
Hauptkrümmungsrichtungen, 504
    eingebettete, 504
Hauptsatz
    der Differential- und Integralrechnung, 212
Hauptunterdeterminante, 284
Hermite
    Basis, 242
    Interpolation, 241
    Polynome, 242
Hessematrix, 449
Hookesches Gesetz, 309
Hornerschema, 50
Hyperebene, 181
Hyperfläche, 371, 471, 497
    parametrisierte, 371, 496

Imaginärteil, 263
implizite Fläche, 463, 470, 496
implizites Funktionentheorem, 463, 464
indefinit, 451
Indexverschiebung, 28
Induktion vollständige, 160
Induktion, vollständige, 32
Infimum, 57
inkompressibel
    Strömung, 386
Inkugeldurchmesser, 245
Inneres, 381
Integral, 206, 286, 343
    Kurven-, 368
    Mittelwert, 210, 348
    stetiger Funktionen mit kompaktem Träger, 345
    Streifen um eine Kurve, 368
    unbestimmtes, 211
Integralmittelwert, 210
Integration, 310
    über Flächen, 378
    über Hyperflächen, 371
    über Kurven, 367, 378
    auf Flächen, 377
    im $\mathbb{R}^n$, 344
    längs Graphenkurven, 371
    numerische, 223, 249, 252
    partielle, 216, 387
    rationaler Funktionen, 217
    unbeschränkter Funktionen, 363
    von Funktionen, 205
    von Funktionen auf eingeschränkten Mengen, 346
    Zusammenhang zur Differentiation, 210
Integrationsfehler, 250
Integrationsformel
    numerische, 250
Integrationsregeln, 208, 212, 213, 216, 217, 347
integrierbar, 206, 346
Interpolation, 223
    Hermite, 241
    in mehreren Dimensionen, 242
    Lagrange, 230, 241
    simpliziale, 238
    Tensorproduktansatz, 242
Interpolationsaufgabe, 230
Interpolationsfehler, 233, 250
Interpolationsproblem, 230
Intervall, 41
    abgeschlossenes, 41
    halboffenes, 41
    offenes, 41
inverse Matrix, 149, 150
Inversion an S^n, 497
invertierbar
    Matrix, 150, 151

Jacobi-Matrix, 178, 186

Körper, 23, 24, 261
    angeordneter, 29
    vollständiger, 40
Körperaxiome, *siehe* Axiome

Karte, 495
Kartenwechsel, 495, 497
kartesisches Produkt, 49
Keplersche Fassregel, 251
Keplersches Gesetz, zweites, 494
Ker, 138, 140–142, 147
Kern, 138, 140–142, 147, 149, 297
Kettenregel, 62, 187, 457
kleinste Quadrate, Problem der, 417
Knoten
    Integration, 249
    Interpolation, 230
Kommutativgesetz
    Addition, 23
    Addition komplexer Zahlen, 262
    Addition von Vektoren, 94, 95
    Multiplikation, 24
    Multiplikation komplexer Zahlen, 262
komplexe Zahlen, 261
Komponenten, 93
Komposition, 52, 54
konjugiert komplexe Zahl, 263
konsistent, 327
Konsistenz, 327
Konvergenz, 40, 327
    absolute, 72
    Folgen im $\mathbb{R}^n$, 195
    Newton-Verfahren, 83
    Potenzreihen, 75, 76
Konvergenzradius, 76
Konvexkombination, 239, 245
Koordinaten, 93, 112, 129
    baryzentrische, 239, 245
    Transformation, 105
Kosinus, 72, 75, 102
Kosinussatz, 266
Krümmung, 491–493
    Gauß-, 504
    mittlere, 504
Kreis, 308, 491
    Fläche, 215
Kreuzprodukt, 108, 166, 410
kritischer Punkt, 451
Kugel, 181, 463
Kugelkoordinaten, 360
Kugeloberfläche, 379
Kurve, 183, 367, 372, 489, 495
    Abstand, 185
    bogenlängenparametrisiert, 490
    geodätische, 490, 499
    Geschwindigkeit, 489
    kürzeste, 490, 499
    Länge, 490, 500
    Rechnen mit Ableitungen, 185
    Spur, 489
Kurvenabbildung, 367, 372
Kurvenintegral, 368

Länge, 100, 101, 376, 500
    von Kurven auf Hyperflächen, 375
Längenelement, 368
Lagrange
    Basis, 232, 244, 248, 250
    Interpolation, 230, 241
    Knotenmenge, 246
    Polynome, 232, 244, 248
Lagrangemultiplikatoren, 478
Landau-Symbole, 226
langenerhaltende Abbildung, 408
Lebesgue
    Integral, 346
    integrierbar, 346
Legendre-Polynom, 252
Leibniz-Formel, 341
linear, 101, 108, 127, 154, 208
linear abhängig, 98, 110
linear unabhängig, 98, 110
lineare Abbildung, 127, 134
lineare Regression, 419
linearer Unterraum, 96
lineares Gleichungssystem, 143, 199, 455
Linearkombination, 110, 112, 114
Linksnullraum, 297
Lipschitz-stetig, 311
    lokal, 312
Logarithmus, 80

natürlicher, 80, 212, 216, 227
LR–Zerlegung, 152, 153, 411

Majorantenkriterium, 72
Mannigfaltigkeit, 495
Massepunkt, 494
Matrix, 128, 129, 134, 149, 151
adjungierte, 163, 270, 403
allgemein diagonalisierbare, 289
diagonalisierbare, 280, 289–291
inverse, 149, 150
orthogonale, 280, 402
positiv definite, 281, 284
schiefsymmetrische, 409
symmetrische, 276, 280, 281, 284
transponierte, 162
unitäre, 403
Matrizenprodukt, 135, 136
Kettenregel, 187
Maximum, 57
lokales, 65, 193, 447, 451
unter Nebenbedingungen, 474, 476
Maß, 348
Membran
Flächen, 387
kurven, 387
Menge
abgeschlossene, 338
Abschluss einer, 381
beschränkte, 338
der invertierbaren Matrizen, 151
Inneres einer, 381
offene, 338
Rand einer, 381
Mengensubtraktion, 30
Meridian, 340
Metrik, 376, 378, 498
Metrischer Tensor, 376, 498
Minimum, 57, 106, 455
lokales, 65, 193, 447, 451
unter Nebenbedingungen, 474, 476
Mittelpunktsregel, 249, 251
Mittelwert
einer Funktion, 348
Integral, 210
Mittelwertsatz, 66
der Integralrechnung, 209, 225
mittlere Krümmung, 504
Monome, 111, 113, 132
monoton, 40, 42, 72, 209
strikt, 59
Monotonie
Addition, 29
Multiplikation, 29
Multiindex, 243, 457
Multiplikation, 23
Assoziativgesetz, 24
Kommutativgesetz, 24
komplexer Zahlen, 266
Matrix mit Skalar, 150
Monotonie, 29
Vektor mit Skalar, 93

Nabla, 69
natürliche Zahlen, 23
negativ definit, 451
negativ semi-definit, 451
Newton-Verfahren, 81, 198
Niveaumenge, 180, 463
Norm, 101, 104, 269
euklidische, 101, 461
Operatornorm, 464
Normale, 117, 181, 472, 491, 502
Normalengleichung, 418
Normalenvektor, 374
an Graphen, 192, 374
Normalraum, 472
Nullstelle, 51, 52, 81, 219, 268
nichtlinearer Funktionen, 197
Nullstellenmenge, 197
Nullvektor, 94, 95
numerische Integration, 223
numerische Quadratur, 355
numerischer Fluss, 325

O, 226

o, 61, 226
offene Menge, 338
$O(n)$, 405
Operatornorm, 464
orthogonal, 103, 108, 109
orthogonale Abbildung, 401
orthogonale Gruppe, 405, 406
orthogonale Matrix, 280, 402
orthogonale Projektion, 422
Orthonormalbasis, 287, 402, 423, 424
Orthonormalisierung, 422
    nach Gram–Schmidt, 423

Paar
    geordnetes, 49
parallel, 99
Parallelepiped, 166
    Volumen, 165, 352
Parallelogramm
    Flächeninhalt, 109, 165
Parameterintervall, 367
Parameterraum, 376
parametrisierte Hyperfläche, 371, 496
Parametrisierung, 371, 495, 502
    glatte, 185
Partialbruchzerlegung, 217
Partialsummen, 72
Partielle Integration, 387
Picard-Lindelöf
    Satz von, 312
Polarkoordinaten, 186, 189, 266, 359
Polygonzugverfahren
    Eulersches, 325
Polynom, 49, 53, 111, 113, 127, 132, 137, 138, 217, 224, 230, 245, 268, 286, 425
    bilinear, 237, 243
    biquadratisch, 238, 243
    Legendre-, 252
    trilinear, 243
Polynomdivision, 51, 217
Polynominterpolation
    in mehreren Dimensionen, 242
Polynomraum
    simplizialer, 245
positiv definit, 101, 281, 451, 456
positiv semi-definit, 451
Potenz, 26, 80
    Differentiation, 81
Potenzreihe, 71, 74, 227
    Differenzierbarkeit, 76
    Konvergenz, 75, 76
Prinzip von Cavalieri, 165, 352
Problem der kleinsten Quadrate, 417
Produkt
    kartesisches, 49
Produktregel, 62
    für Determinanten, 164
    Skalarprodukt, 185
Produktsymbol, 232
Projektion, 130, 139, 418
    orthogonale, 422
Projektionssatz, 422, 426
Pythagoras
    Satz von, 101

QR–Verfahren, 417
QR–Zerlegung, 411, 416, 417, 425
Quadrate, Problem der kleinsten, 417
Quadratische Form, 281, 455
Quadratur
    numerische, 355
Quotientenkriterium, 74
Quotientenregel, 62

rückwärts Einsetzen, 143, 147, 153
Rand, 381
Rang, 148, 149, 154, 231
rationale Funktion, 49, 217
rationale Zahlen, 23
Raum
    aufgespannter, 112
Rayleigh-Quotient, 278
Realteil, 263
Rechteckregel, 249, 251
reelle Zahlen, 23

Regression
lineare, 419
Reihe, 72
geometrische, 35, 72, 75
harmonische, 73, 213
Restglied
bei der Taylorentwicklung, 223, 225
Richtungsableitung, 68, 177, 179
beliebige, 189
richtungsdifferenzierbar, 68, 177, 179
Richtungsvektor, 96
Richtungsvektorfeld, 310
Riemann-Integral, 206
Riemann-integrierbar, 206
Riemann-Summe, 205
Riemannsumme, 205, 342, 355, 368
Rolle
Satz von, 66
Rotationsellipsoid, 340, 350
Rotationsfläche, 380
Rotationskörper, 348
Rundungsfehler, 231
Runge-Kutta-Verfahren, 330

Satellit, 15, 311
Sattelpunkt, 451
Satz von
Bolzano-Weierstrass, 339
Fubini, 347
Gauß, 382
Gauß für eine partielle Ableitung, 386
Gauß für Funktionen mit Nullrandwerten, 382
Picard-Lindelöf, 312
Schwarz, 450
Schachtelung, 22, 32, 41, 56
schiefsymmetrische Matrix, 409
Schnitt
Ebenen, 99
Geraden, 99
Schnittmenge, 30
Schranke
obere, 39, 57
untere, 39, 57
Schwarz
Satz von, 450
Schwerpunkt, 239, 362, 454
Schwerpunktintegration, 249, 251
Schwingung, 309
Seitenverhältnis, 105
senkrecht, 103
Separation der Variablen, 319
Simplex, 245, 354
Durchmesser, 245
simpliziale Interpolation, 238
sin, 72, 75, 264
Singulärwertzerlegung, 293, 294
Sinus, 72, 75
Skalarprodukt, 100, 105, 131, 269, 284, 286
Ableitung, 185
euklidisches, 100, 102
$SO(n)$, 405
Spaltenrang, 148
Spaltenraum, 296, 418
Span, 112
span, 116
spezielle orthogonale Gruppe, 405
Sphäre, 371, 374–376, 496, 505
Spiegelung, 136, 150, 190, 273, 405, 412
an S^n, 497
Spur, 275
einer Kurve, 489
Stabilität, 327
Stammfunktion, 211, 212
steilster Abstieg, 181, 456
steilster Anstieg, 181
stereographische Projektion, 496
stetig, 52, 54, 59, 62, 64, 195, 196, 207, 248
ergänzbar, 53, 59
fortsetzbar, 53, 59
gleichmäßig, 55, 337
Stetigkeit, 52, 62, 64, 195, 196
Strömung, 385
inkompressibel, 386

Streckung, 131
Substitutionsregel, 213
Summenzeichen, 27
Supremum, 57
symmetrisch, 101
System
    höherer Ordnung, 311
    von Differentialgleichungen, 308

Tangentialraum, 373, 376, 472, 498, 502
    affiner, 180, 192, 373, 472
    an Graphen, 192
Tangentialvektor, 192
Taylorentwicklung, 223, 456, 458, 460
Teilfolge, 40
Teilintervalle, 250
Teilmenge, 30
Tensorproduktansatz, 242
Term höherer Ordnung, 61, 177
Trägheitsmoment, 363
trace, 275
Transformationsformel, 358
Transformationssatz, 377
Transitivität, 29
Trapezregel, 249, 251
Treppenfunktion, 49, 208
Triangulierung, 355
Trichotomie, 29
trigonometrische Funktionen, 264
Träger
    kompakter, 344

Umkehrfunktion, 59, 67, 80, 189, 469
Umkehrsatz, 469
Ungleichung, 29
unitäre Matrix, 403
universelle Symbole, 226
Unterdeterminante, 284, 285
Unterraum
    affiner, 96, 141
    linearer, 96, 112, 115, 116
Untervektorraum, 96, 112, 115, 116, 141, 296, 373

Variation der Konstanten, 321
Vektor, 93
Vektorfeld, 381
Vektorprodukt, 108, 166
Vektorraum, 95, 151, 268
Vereinigungsmenge, 30
Verkettung, 52, 54
    lineare Abbildungen, 134
Vertauschung der Integrationsreihenfolge, 342
Vollständigkeitsaxiom, 40
Volumen, 342, 384
    n-dimensionales, 348
    einer Halbkugel, 343
    eines Körpers, 359
Volumentransformation
    unter linearen Abbildungen, 352
vorwärts Einsetzen, 153

Weingarten-Abbildung, 503
Winkel, 100, 102, 376
Winkeltreue, 401

Zahl
    konjugiert komplex, 263
Zahlen
    ganze, 23
    komplexe, 261
    natürliche, 23
    rationale, 23
    reelle, 23
Zeilenrang, 148
Zeilenraum, 297
Zerlegung, 248, 250
zweites Keplersches Gesetz, 494
Zwischenwertsatz, 55
Zylinderkoordinaten, 360

Symbolverzeichnis

Mengen

$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen	261
$\mathbb{N}$	natürlichen Zahlen	23
$\mathbb{N}_0$	natürlichen Zahlen einschließlich der 0	23
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen	23
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	23
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	23

Ableitungen

Df	Jacobi-Matrix	186
$\dot{\gamma}$	Ableitung bzw. Geschwindigkeitsvektor einer Kurve	184
$\frac{\partial}{\partial x_i} f$	partielle Ableitung in Richtung x_i	69, 177
$\frac{d}{dx} f$	Ableitung	60
$\operatorname{grad} f$	Spaltenvektor der partiellen Ableitungen	180
∇f	Zeilenvektor der partiellen Ableitungen	177
f'	Ableitung	60

Lösungen

0 Ein wenig Motivation vorab

Lösung 0.1

$$h(d,\alpha,l) = l + d\tan\left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ}\right)$$

Man sieht (wahlweise durch Ausprobieren oder durch eine entsprechend verallgemeinerte Darstellung des Fehlers durch die Ableitungen) dass sich der Fehler in l direkt auf den bisherigen Fehler der Höhe addiert.

Lösung 0.2 Es ist $\alpha = 0^\circ 01' = \frac{1}{60}^\circ$. Mit der Formel $d = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}R$ aus der Vorlesung erhält man $d = 1.855\,\text{km}$. (Laut ISO 31 ist die Länge einer Seemeile heute als $1.852\,\text{km}$ definiert. Wenn man anstelle der idealisierten Länge des Äquators die durchschnittliche Länge eines Meridians verwendet, so erhält man eine deutlich genauere Approximation dieses Wertes.)

Lösung 0.3

a) Steht man direkt am Turm, so ist $d = 0$ und $\alpha = 90$. Da

$$h(0,90) = 0 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty,$$

funktioniert die Formel für die Höhenfunktion in diesem Fall nicht.

b) Die Sensitivität einer Funktion wird durch den Betrag ihrer Ableitung wiedergespiegelt. Je höher der Betrag der Ableitung ist, desto höher ist die Sensitivität in diesem Punkt. Wir müssen also überprüfen, wie sich die Ableitung betragsmäßig verhält. Es gilt:

$$\frac{dh}{dd} = \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right), \qquad \frac{dh}{d\alpha} = \frac{d\pi}{180\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)}$$

Steht man nun nah am Turm, so ist α nur wenig kleiner als 90°, d.h. $\frac{dh}{dd}$ ist sehr groß, denn für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ gilt $\tan(x) \to \infty$. Mit anderen Worten, die Sensitivität bzgl. Abweichungen in d ist sehr groß. Außerdem gilt für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ $\cos(x) \to 0$, so dass die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α ebenfalls sehr groß ist.

c) Steht man sehr weit entfernt vom Turm, so ist d sehr groß und α sehr klein (fast null). Da für $x \to 0$ $\cos(x) \to 1$ gilt, d jedoch sehr groß ist, ist die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α groß.

Lösung 0.4 Die Lösung lautet:

$$p(x) = -2x^2 + x + 3\,.$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(-1) &= (-2)\cdot 1 + (-1) + 3 = -2 - 1 + 3 = 0 \quad \checkmark \\
p(1) &= -2 + 1 + 3 = -2 + 4 = 2 \quad \checkmark \\
p(-2) &= (-2)\cdot 4 + (-2) + 3 = -8 - 2 + 3 = -10 + 3 = -7 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Wie findet man die Lösung?
<u>Ansatz:</u> $p(x) = ax^2 + bx + c$
Bedingungen:

$$\begin{aligned}
1)\quad & 0 = p(-1) = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = a - b + c \\
2)\quad & 2 = p(1) \quad = a + b + c \\
3)\quad & -7 = p(-2) = 4a - 2b + c
\end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem:

I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II:	a	$+$	b	$+$	c	$=$	2
III:	$4a$	$-$	$2b$	$+$	c	$=$	-7
I'=I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II'=II+I:	$2a$			$+$	$2c$	$=$	2
III'=III+2II	$6a$			$+$	$3c$	$=$	-3
I''=I':	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II''=$\frac{1}{2}$II':	a			$+$	c	$=$	1
III''=$\frac{1}{3}$III':	$2a$			$+$	c	$=$	-1
I'''=I'':	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II'''=II'':	a			$+$	c	$=$	1
III'''=III''-II'':	a					$=$	-2

$$a = -2 \;\Rightarrow\; c = 1 - a = 1 + 2 = 3 \;\Rightarrow\; b = a + c = -2 + 3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = -2x^2 + x + 3}$$

1 Die Axiome der reellen Zahlen

Lösung 1.1

$a_0 = 1$
$a_1 = a_0 + \frac{1}{3^{0+1}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
$a_2 = a_1 + \frac{1}{3^{1+1}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$
$a_3 = 1_2 + \frac{1}{3^{2+1}} = \frac{13}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27}$
$\dots$

a_{n+1} läßt sich schreiben als:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Mit Hilfe der Geometrischen Reihe (vgl. Skript) läßt sich dies umschreiben zu

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{3^{n+2}}}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{3-\frac{1}{3^{n+1}}}{2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(3^{n+2}-1\right)}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Lösung 1.2

$$\begin{aligned}
|(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n-a|}_{\substack{<\tilde{\varepsilon} \\ \text{für } n>N'(\tilde{\varepsilon})}} + \underbrace{|b_n-b|}_{\substack{<\tilde{\varepsilon} \\ \text{für } n>N(\tilde{\varepsilon})}} \\
&< 2\tilde{\varepsilon} \quad \text{für} \quad n > \max\left(N'(\tilde{\varepsilon}), N(\tilde{\varepsilon})\right)
\end{aligned}$$

Lösung 1.3

i)

$$|a_n| = \left|1+\frac{1}{n}\right| \leq 2$$

ii)

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right) = 1+\frac{1}{2k} \to 1 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

(vgl. Grenzwertsätze)

Lösung 1.4

i) Skizzen der beiden Funktionen:

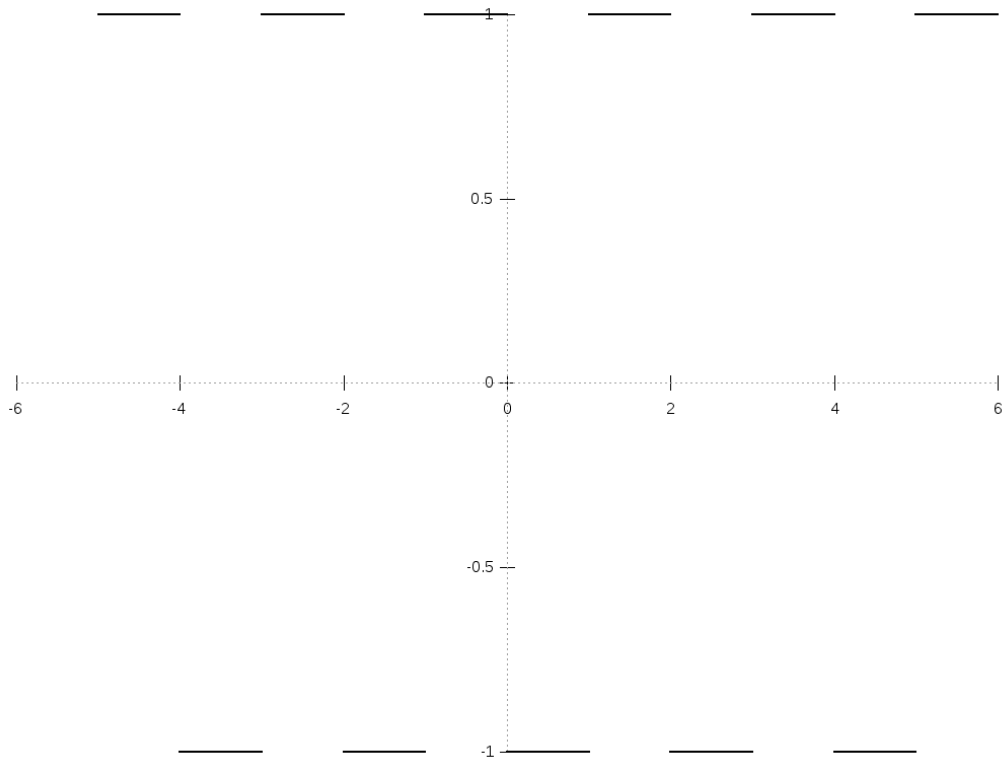


Abbildung 2: Die Funktion f.

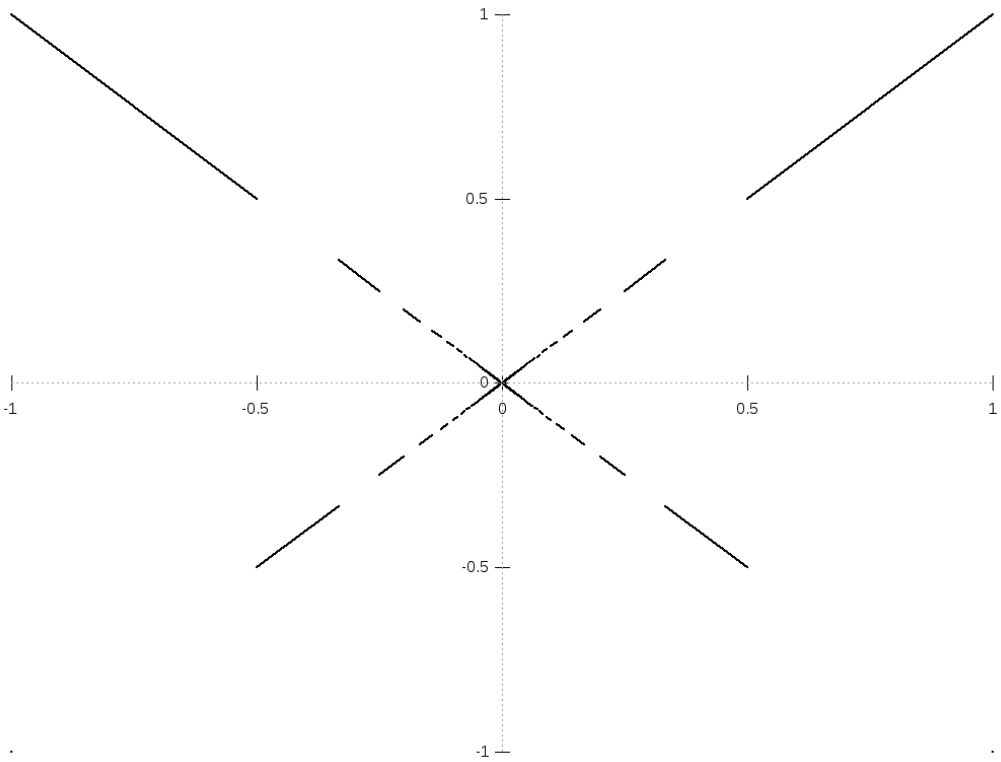


Abbildung 3: Die Funktion g.

ii) Wie die Skizze suggeriert, ist der Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Dies ist z.B. mit Hilfe einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ ersichtlich (wie in Definition 1.11 aus der Vorlesung): Es gilt $x_n \to 0$, also existiert nach Definition zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$. Damit gilt dann

$$|g(x_n) - g(0)| = |g(x_n) - 0| = |x_n f(\frac{1}{x_n})| = |x_n| \leq \varepsilon\,.$$

Die letzte Gleichung ($|x_n f\left(\frac{1}{x_n}\right)| = |x_n|$) gilt, da $f(x)$ stets 1 oder -1 ist und somit immer Betrag 1 hat. Damit gilt also $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$ (wieder nach Definition 1.11 mit selben ε und $N(\varepsilon)$) und somit nach Notation 2.8 aus der Vorlesung, dass $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Lösung 1.5

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist die Formel korrekt:

$$\sum_{k=0}^{0} 3(k+1) = 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2$$

Induktionsannahme (IAn): Die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Behauptung: Die Formel ist korrekt für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+2)(n+3)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 3(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} 3(k+1) + 3(n+2) \overset{\text{(IAn)}}{=} \frac{3}{2}(n+1)(n+2) + 3(n+2) \\ &= \frac{3}{2}(n+2)\left((n+1)+2\right) = \frac{3}{2}(n+2)(n+3) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung 1.6 Um zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst betrachten wir für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung können wir dies wie folgt abschätzen

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1.$$

Daraus folgt

$$a_n \geq a_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2,$$

d.h. die Folge ist monoton wachsend und da

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

gilt

$$a_n \geq 2.$$

Bemerkung: Später werden wir sehen, dass diese Folge gegen die Zahl e konvergiert. Des weiteren verdeutlich dieses Beispiel, dass Folgen nicht immer gegen den scheinbar offensichtlichen Wert konvergieren.

Lösung 1.7

a) Sei $0' \in \mathbb{K}$ ein weiteres Element mit $x + 0' = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$.

Insbesondere gilt dann (für $x = 0$):

$$(*) \quad 0 + 0' = 0\,.$$

Andererseits gilt: (**) $0' + 0 = 0'$ nach $(A3)$.

$$\Rightarrow\ 0 \overset{(*)}{=} 0 + 0' \overset{(A2)}{=} 0' + 0 \overset{(**)}{=} 0'\,,\ \text{d.h. } 0' = 0\,.$$

b) Zunächst löst $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$ die Gleichung, denn es gilt:

$$a \cdot (a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1})b = 1 \cdot b = b\,.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit gehen wir aus von:

Sei $y \in \mathbb{K}$ eine Lösung von $ay = b$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad ay &= ax \\ \Leftrightarrow a^{-1}ay &= a^{-1}ax \\ \Leftrightarrow aa^{-1}y &= aa^{-1}x \\ \Leftrightarrow \quad y &= x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{c}{d} &\overset{(M3)}{=} \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot 1 \overset{(D1)}{=} \frac{a}{b}\cdot 1+\frac{c}{d}\cdot 1 \\ &\overset{(2\times(M4))}{=} \frac{a}{b}\cdot d\cdot d^{-1}+\frac{c}{d}\cdot b\cdot b^{-1} \\ &\overset{(\frac{1}{b}:=b^{-1})}{=} a\cdot b^{-1}\cdot d\cdot d^{-1}+c\cdot d^{-1}\cdot b\cdot b^{-1} \\ &\overset{(2\times(M2))}{=} a\cdot d\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}+c\cdot b\cdot d^{-1}\cdot b^{-1} \\ &\overset{(M2)}{=} a\cdot d\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}+c\cdot b\cdot b^{-1}\cdot d^{-1} \\ &\overset{(D1)}{=} (ad+cd)\cdot b^{-1}d^{-1} \overset{(*)}{=} (ad+cb)\cdot(bd)^{-1} \\ &\overset{(\frac{1}{bd}:=(bd)^{-1}\,!)}{=} \frac{ad+cb}{bd} \end{aligned}$$

Es bleibt (*): $b^{-1}d^{-1} = (bd)^{-1}$ zu zeigen! Dies sieht (z.B.) so aus:

$(bd)^{-1}$ ist definiert durch

$$(bd)(bd)^{-1} = 1$$

und existiert, da $b \neq 0$ und $d \neq 0$. Außerdem gilt

$$(bd)b^{-1}d^{-1} = dbb^{-1}d^{-1} = dd^{-1} = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (bd)(bd)^{-1} &= (bd)b^{-1}d^{-1} \\ \Leftrightarrow (bd)^{-1}(bd)(bd)^{-1} &= (bd)^{-1}(bd)b^{-1}d^{-1} \\ \Leftrightarrow (bd)(bd)^{-1}(bd)^{-1} &= (bd)(bd)^{-1}b^{-1}d^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad (bd)^{-1} &= b^{-1}d^{-1} \end{aligned}$$

Lösung 1.8

a) $f(x) = x + |x| = x + \left\{ \begin{array}{rcl} x & : & x > 0 \\ -x & : & x \leq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & : & x > 0 \\ 0 & : & x \leq 0 \end{array} \right.$

b) Im Gegenssatz zu der Funktion aus dem Aufgabenteil a) ist die Funktion $g(x)$ auf der x-Achse um eins nach rechts verschoben und zusätzlich mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ skaliert. Daher gilt
$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases} = \frac{1}{4}\left(x - 1 + |x-1|\right)$

c) Um die Funktion $h(x)$ umzuschreiben betrachten wir zunächst die Funktion

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x+2 & : \quad x \geq -1 \end{cases},$$

die für $x \leq 0$ mit der Funtion $h(x)$ übereinstimmt. $h_1(x)$ läßt sich ähnlich wie die Funktion $g(x)$ durch Verschiebung von $f(x)$ konstruieren. Es gilt also

$$h_1(x) = x + 1 + |x+1|.$$

Um den zweiten Knick zu konstruieren addieren wir ein Vielfaches der Funktion $f(x)$ zu $h_1(x)$. Da $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ändert dies nichts am Verhalten von $h_1(x)$ für $x \leq 0$. Wählen wir als Faktor -1, so ändert sich aber die Steigung für $x > 0$ von 2 auf 0, da die Steigung von $f(x)$ für $x > 0$ gleich 2 ist. Die Funktion $h(x)$ läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} h(x) &= g_1(x) + (-1) \cdot f(x) \\ &= x + 1 + |x+1| - (x + |x|) \\ &= 1 + |x+1| - |x| \end{aligned}$$

Lösung 1.9

a) <u>Induktionsanfang</u> (IA): Für $n = 1$ ist die Formel richtig:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \quad \checkmark.$$

<u>Induktionsannahme</u> (IAn): Die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
<u>Induktionsschritt</u> (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Beh.: Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{(IAn)}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2) \quad \checkmark.\end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

b) (IA): $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1}{6}1\cdot 2\cdot 3 \quad \checkmark.$$

(IAn): $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\cdot(n(2n+1)+6(n+1)) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\cdot(2n^2+7n+6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad \checkmark.\end{aligned}$$

c) (IA): Für $n = 4$:

$$4^2 = 16 \leq 16 = 2^4 \quad \checkmark.$$

(IAn): $n^2 \leq 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Bew.:
Für $n \geq 4$ gilt:

$$4n \leq n^2 \;\Leftrightarrow\; 4 \leq n$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \leq n^2+\frac{n^2}{2}+1\\ &\overset{\text{(IAn)}}{\leq} 2^n+2^{n-1}+1\\ &\leq 2^n+2^{n-1}+2^{n-1}\\ &= 2^{n-1}(2+1+1)=2^{n-1}\cdot 4=2^{n-1}\cdot 2^2=2^{n+1} \quad \checkmark.\end{aligned}$$

d) (IA) Für $n=1$ ist die Formel richtig:

$$1!=1\geq 2^{1-1}=1$$

.

(IAn) Die Formel

$$k!\geq 2^{k-1}$$

sei richtig für ein $n\in\mathbb{N}$.
(IS) Die Formel ist richtig für $n+1\in\mathbb{N}$:

$$(k+1)!\geq 2^k$$

Beweis:

$$\begin{aligned}2^k=2^{k-1}\cdot 2 &\leq k!\cdot 2\\ &\overset{k\geq 1}{\leq} k!\cdot(k+1)\\ &= (k+1)!\end{aligned}$$

Lösung 1.10

a)

$$a_n=\frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}=\frac{n^2(-7+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(5+\frac{5}{n^2})}=\frac{-7+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{5}{n^2}}\to -\frac{7}{5}$$

für $n\to+\infty$, da $\frac{3}{n},-\frac{1}{n^2},\frac{5}{n^2}\to 0$ für $n\to+\infty$.

b)

$$a_n=\frac{n^3(3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3})}{n^3(2+\frac{1}{\sqrt{n}})^3}=\frac{3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{(2+\frac{1}{\sqrt{n}})^3}\to\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$$

für $n\to+\infty$, da $\frac{1}{n^2},-\frac{2}{n^3},\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ für $n\to+\infty$.

c) Beh.: $a_n = (1+\frac{1}{n^2})^n \to 1$ für $n \to +\infty$.
Beweis: Wegen der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n^2})^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n} \\
\Rightarrow \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \\
&= \left(\frac{n^2+1-1}{n^2+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2-n+1}{n^2+1} \\
\Rightarrow a_n &\leq \frac{n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{n^2-n+1+n}{n^2-n+1} = 1+\frac{n}{n^2-n+1}
\end{aligned}$$

D.h. also : $a_n = (1+1/n^2)^n \to 1$ für $n \to +\infty$, da sowohl $1+\frac{1}{n} \to 1$ als auch $1+\frac{n}{n^2-n+1} \to 1$.

d)

$$a_n = \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})} = \frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})\right)} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to +\infty$, da $\frac{1}{n} \to 0$ und $\sin(\frac{1}{n}) \to 0$ für $n \to +\infty$ und somit auch $\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) \to 0$ für $n \to +\infty$.

Lösung 1.11 Betrachten wir die ersten Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die ersten Folgengliedern der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$s_1 = 1+x$	$g_1 = 1+1$
$s_2 = 1+x+\frac{x^2}{2}$	$g_2 = 1+1+\frac{1}{2}$
$s_3 = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$g_3 = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$

Für $0 \leq x \leq 1$ stellen wir fest, dass für die bereits berechneten Folgenglieder gilt

$$s_n \leq g_n.$$

Als nächstes schauen wir uns den allgemeinen Fall an:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \overset{0\leq x\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \overset{k!\geq 2^{k-1}}{\leq} 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = g_n$$

Aus Aufgabe 13d) wissen wir, dass

$$k! \geq 2^{k-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Gleichzeitig wissen wir (vgl. Geometrische Reihe), dass

$$g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{2-1} = 3.$$

$\Rightarrow |s_n| \leq 3$, d.h. s_n ist beschränkt. Da die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, wissen wir nun, dass sie konvergiert.

Bemerkung: Für $0 \leq x < 1$ ist der Beweis einfacher, da man in dem Fall direkt mit $h_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ vergleichen kann.

Lösung 1.12

a) Die Antwort lautet: Nein! Die Aussage ist also falsch.

Zur Begründung: Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt durch 1:

$$|a_n| = |(-1)^n| = 1,$$

aber divergent (vergleiche dazu Vorlesung bzw. Skript!).

b) Die Antwort lautet: Ja! Die Aussage ist also richtig.

Dies ist ein Satz, der in der Vorlesung bewiesen wurde (siehe Skript).

c) Die Antwort lautet: Ja! Die Aussage ist also richtig.

Zur Begründung: Möglichkeit 1): Auf Grund des Vollständigkeitsaxioms konvergiert jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Konvergente Folgen sind aber beschränkt (siehe b)).

Möglichkeit 2): Wir weisen dies direkt nach, indem wir den Beweis zu b) (Skript/Vorlesung) imitieren. Wir setzen $\varepsilon = 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_N| < 1, \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Hieraus folgt

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|, \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Wir können nun die ersten $N-1$ Folgenglieder mit in die Betrachtung einbeziehen, indem wir schreiben

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|)\,.$$

Damit ist die Beschränktheit der Folge gezeigt.

d) Die Antwort lautet: Ja! Die Aussage ist also richtig.

Denn es gilt folgende aus der Dreiecksungleichung folgende Ungleichung:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \quad \text{(vgl. Vorlesung).}$$

Der Rest der Aussage ergibt sich aus der Definition der Konvergenz einer Folge (a_n) mit dem Grenzwert a.

e) Die Antwort lautet: Nein! Die Aussage ist also falsch.

Denn es gilt zum Beispiel:

$$a_n := \frac{1}{n} > 0 \quad \text{und} \quad |a_n| \leq 1,$$

aber

$$\frac{1}{a_n} = n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty.$$

f) Die Antwort lautet: Ja! Die Aussage ist also richtig.

Denn es gilt: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben durch b_1 beschränkt:

$$a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b_{n-2} \leq \cdots \leq b_1,$$

da (b_n) monoton fallend ist. Also konvergiert (a_n) nach einem Satz der Vorlesung (siehe auch Skript!).

Entsprechend gilt: Die Folge (b_n) ist monoton fallend und nach unten durch a_1 beschränkt:

$$b_n \geq a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \cdots \geq a_1,$$

da (a_n) monoton wachsend ist. Also konvergiert (b_n) nach einem Satz der Vorlesung (siehe auch Skript!).

Man beachte aber, dass die beiden Folgen $(a_n), (b_n)$ nicht denselben Grenzwert haben müssen:

Beispiel: $a_n := \frac{n}{n+1}$ ist monoton wachsend und konvergiert gegen 1.

$b_n := 2 + \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 2! Ausserdem gilt natürlich $a_n \leq 1 < 2 \leq b_n$, also sicherlich auch $a_n \leq b_n$!

g) Die Antwort lautet: Ja! Die Aussage ist also richtig.

Denn es gilt nach einer Folgerung aus den Anordnungsaxiomen für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ und } b_n \leq b_{n+1} \Rightarrow a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$$

h) Die Antwort lautet: Nein! Die Aussage ist also falsch.

Gegenbeispiel: Sei a_n eine beliebige monotone Folge und $b_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konstante Folge (diese ist nach Definition auch monoton wachsend!). Dann ist $(a_n \cdot b_n) = -1 \cdot a_n$ eine monoton fallende Folge.

Lösung 1.13

a) Die Lösung erhalten wir durch Spiegeln der Punkte P_0 und P_1 an der x- bzw. y-Achse.Spiegeln wir den Punkt P_0 an der y-Achse, so erhalten wir den Punkt $P_3 = (-1,0)$. Nun Spiegeln wir P_1 an der y-Achse und erhalten $P_2 = (-a, \sqrt{1-a^2})$. Durch erneute Spiegelung an der x-Achse erhalten wir $P_5 = (a, -\sqrt{1-a^2})$. Zum Schuss spiegeln wir nun noch P_1 an der x- und y-Achse und erhalten $P_4 = (-a, -\sqrt{1-a^2})$.

b) Wir erinnern uns an die Gaußsche Flächenformel aus der Vorlesung. Für ein Polygon bestehend aus $n+1$-Punkte berechnen wir den Flächeninhalt durch

$$F := \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(x_{k-1}-x_{k+1})y_k,$$

wobei $P_k = (x_k, y_k)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(a) =& \frac{1}{2}\Bigg[0+(1-(-a))\cdot\sqrt{1-a^2}+(a-(-1))\cdot\sqrt{1-a^2} \\
&+0+(-1-a)\cdot(-\sqrt{1-a^2})+(-a-1)\cdot(-\sqrt{1-a^2})\Bigg] \\
=& \frac{1}{2}\left(4\cdot(1+a)\sqrt{1-a^2}\right] \\
=& 2\cdot(1+a)\sqrt{1-a^2}
\end{aligned}$$

c) Da der Flächeninhalt in diesem Fall nur vom Parameter a abhängt, können wir das maximale Hexagon durch Berechnung des Extremums von $F(a)$ berechnen:

$$F'(a) = 2\cdot\sqrt{1-a^2}+2\cdot(1+a)\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=0.$$

Berechnung der Nullstellen der quadratischen Gleichung:

$$a_{1,2} = -\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4} = \begin{cases}\frac{1}{2}\\ -1\end{cases}.$$

Des Weiteren gilt

$$F''(a) = -\frac{2+6a}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{2\cdot(a^2+a^3)}{(\sqrt{1-a^2})^3}$$

und damit

$$F''(\frac{1}{2}) < 0,$$

d.h. für $a=\frac{1}{2}$ ist das resultierende Hexagon wirklich Flächeninhalt maximierend. Das resultierende Hexagon ist zu dem gleichseitig und gleichwinklig (120°).

2 Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Lösung 2.1 Wir werten das Polynom

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Hornerschema aus:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ & -1 & 4 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -4 & 4 & -2 & 1 \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x+1)(x^3 - 4x^2 + 4x - 2) + 1$$

Lösung 2.2

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{1}{h}\right) h^2 - 0}{h} = h\cos\left(\frac{1}{h}\right) \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

D.h. $f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Lösung 2.3

i) Zuerst skizzieren wir die Menge

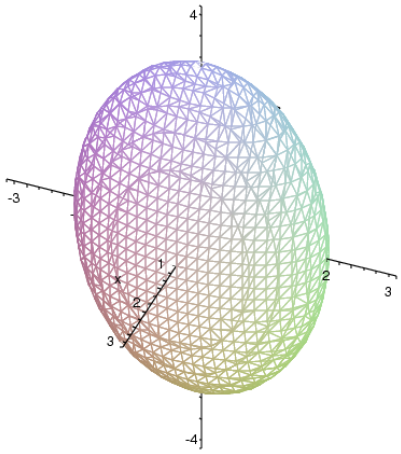
$$\left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

und stellen fest, dass es sich dabei um einen Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r handelt.
Verändert man die Menge wie folgt

$$\left\{(x,y) \middle| \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\},$$

so erhält man als Graph eine Ellipse mit Halbachsen der Längen a und b. Dabei verläuft die Halbachse der Länge a entlang der $x-$Achse und die andere entlang der $y-$Achse.
Mit diesem Wissen ist es nun nicht mehr schwer den Schritt nach $3D$ zu machen und die in der Aufgabenstellung angegebene Menge zu skizzieren. Es handelt sich dabei um einen Ellipsoiden mit Halbachsen entlang den drei Koordinatenachsen, wobei sie die Längen a, b und c haben.

Darstellung der Menge $\left\{(x,y,z) \middle| \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1\right\}$:



ii) Um die Funktion $f(x,y)$ skizzieren zu können betrachten wir ihre Niveaulinien, d.h. die Mengen

$$\{(x,y)|f(x,y)=c\} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}^+.$$

Da

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}=c \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=\frac{1}{c}$$

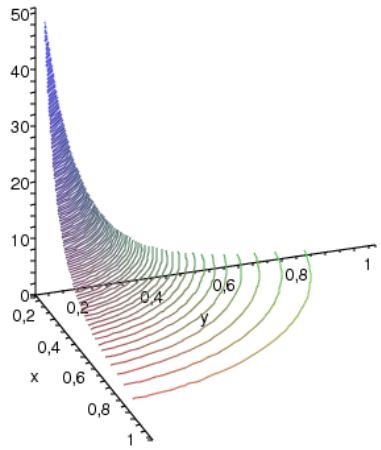
gilt, sind die Niveaumengen Kreise um den Koordinatenursprung. Unsere Funktion ist also rotationssymmetrisch, so dass es im folgenden genügt eine Halbgerade vom Urspung aus zu betrachten, d.h. z.B. die positive $x-$Achse.

$$f(x,0)=\frac{1}{x^2} \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \qquad x \to 0$$

und

$$f(x,0)=\frac{1}{x^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Graph der Funktion $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ für $x,y \in [0.1,1]$:



Lösung 2.4 Mit dem Newton-Verfahren lassen sich Nullstellen einer Funktion bestimmen. Um ein Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ zu entwerfen brauchen wir also eine Funktion, die $\sqrt{a}$ als Nullstelle hat. Da wir ein Newton-Verfahren entwerfen wollen, das ohne die Auswertung von $\sqrt{a}$ auskommt, brauchen wir also eine Funktion mit Nullstelle $\sqrt{a}$, in der $\sqrt{a}$ selber nicht vorkommt ($g(x) = x - \sqrt{a}$ scheidet also aus). Eine solche Funktion ist

$$f(x) = x^2 - a.$$

Für das Newton-Verfahren benötigen wir die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2x.$$

Das Newtonverfahren sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
x_0 & \quad \text{Startwert} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\
&= \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\
&= \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}
\end{aligned}$$

Lösung 2.5

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r,h) = \frac{2}{3}\pi r h, \qquad \frac{\partial V}{\partial h}(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{V(r+0.01r,h+0.01h)-V(r,h)}{V(r,h)} \\
= & \frac{\frac{\partial V}{\partial r}(r,h)0.01r+\frac{\partial V}{\partial h}(r,h)0.01h+o(0.01r,0.01h)}{V(r,h)} \\
= & \frac{\frac{2}{3}\pi rh\cdot 0.01r+\frac{\pi}{3}r^2\cdot 0.01h+o(0.01r,0.01h)}{\frac{\pi}{3}r^2h} \\
= & 0.03+\frac{o(0.01r,0.01h)}{\frac{\pi}{3}^2h}
\end{aligned}
$$

Bis auf Terme höherer Ordnung vergrößert sich das Volumen also um 3 Prozent, wenn man r und h um je ein Prozent vergrößert.

Alternativ:
Eine andere Möglichkeit die relative Änderung des Volumens V zu berechnet ist

$$
\begin{aligned}
& \frac{V(r+0.01r,h+0.01h)-V(r,h)}{V(r,h)} \\
= & \frac{V(r(1+0.01),h(1+0.01))-V(r,h)}{V(r,h)} \\
= & \frac{V(r(1.01),h(1.01))-V(r,h)}{V(r,h)} \\
= & \frac{\frac{\pi}{3}r^2(1.01)^2h^2(1.01)-\frac{\pi}{3}r^2h}{\frac{\pi}{3}r^2h} \\
= & \frac{\frac{\pi}{3}r^2h(1.01)^3-\frac{\pi}{3}r^2h}{\frac{\pi}{3}r^2h} \\
= & 1.01^3-1 \\
= & 0.030301.
\end{aligned}
$$

Vergrößert man r und h um je ein Prozent, so vergrößert sich das Volumen V um genau 3.0301 Prozent.

Lösung 2.6 Zunächst sind die erste und die zweite Ableitung auszurechnen.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-2x}\left[c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\right]+\frac{3}{40}\sin(3x)-\frac{1}{40}\cos(3x) \\
y'(x) &= e^{-2x}(-2)\left[c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\right]+e^{-2x}\left[-c_1\sin(x)+c_2\cos(x)\right] \\
&\quad +\frac{3}{40}\cos(3x)3+\frac{1}{40}\sin(3x)3 \\
y''(x) &= e^{-2x}4\left[c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\right]+e^{-2x}4\left[-c_1\sin(x)+c_2\cos(x)\right] \\
&\quad +e^{-2x}(-2)\left[-c_1\sin(x)+c_2\cos(x)\right]+e^{-2x}\left[-c_1\cos(x)-c_2\sin(x)\right] \\
&\quad -\frac{3}{40}\cos(3x)9+\frac{1}{40}\sin(3x)9
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
y''(x)+4y'(x)+5y(x) &= e^{-2x}\big[4c_1\cos(x)+4c_2\sin(x)+2c_1\sin(x)-2c_2\cos(x)\\
&\quad +2c_1\sin(x)-2c_2\cos(x)-c_1\cos(x)-c_2\sin(x)\\
&\quad -8c_1\cos(x)-8c_2\sin(x)-4c_1\sin(x)+4c_2\cos(x)\\
&\quad +5c_1\cos(x)+5c_2\sin(x)\big]\\
&\quad +\sin(3x)\left[-\frac{27}{40}+\frac{12}{40}+\frac{15}{40}\right]+\cos(3x)\left[\frac{9}{40}+\frac{36}{40}-\frac{5}{40}\right]\\
&= \cos(3x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Lösung 2.7

a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Dann gibt es ein $x_0 \in M$ und eine untere Schranke k_0 von M.

Setze $I_0 := [k_0, x_0]$ und $M_0 := \frac{k_0+x_0}{2}$ die Mitte des Intervalles I_0.

<u>Fall 1:</u> $M \cap [k_0, M_0) = \varnothing$

Dann ist M_0 eine untere Schranke von M.

Wir definieren dann $x_1 := x_0$ und $k_1 := M_0$.

<u>Fall 2:</u> $M \cap [k_0, M_0[\neq \varnothing$

Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in M$ mit $x_1 < M_0$. In diesem Fall setzen wir $k_1 := k_0$.

Wir erhalten also ein Intervall $I_1 = [k_1, x_1]$ mit den Eigenschaften:

i) $[k_0, x_0] \supset [k_1, x_1]$,

ii) $x_1 \in M$,

iii) k_1 ist untere Schranke von M,

iv) $x_1 - k_1 \leq \frac{1}{2}(x_0 - k_0)$.

Dieses Verfahren wiederholen wir nun mit dem Intervall $I_1 = [k_1, x_1]$ und $M_1 = \frac{k_1+x_1}{2}$ an Stelle von I_0 und M_0 und setzen diese Vorgehensweise fort.

Wir erhalten auf diese Weise induktiv eine Intervallschachtelung:

$$I_0 = [k_0, x_0] \supset [k_1, x_1] = I_1 \supset [k_2, x_2] = I_2 \supset \ldots \supset [k_n, x_n] = I_n \supset \ldots$$

mit den Eigenschaften:

(1) $x_n \in M$,

(2) k_n ist untere Schranke von M,

(3) $0 \leq x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0)$.

b) Schauen wir uns die Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ näher an, so stellen wir fest, dass die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Gleichzeitig gilt stets $k_n \leq x_n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt die Konvergenz der Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Aus Aufgabenteil $b)$ wissen wir bereits, dass die Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Sei nun k der Grenzwert der Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\overline{x}$ der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In Aufgabenteil $a)$ haben wir festgestellt, dass folgende Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} & 0 \leq x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) \\ \Leftrightarrow \quad & k_n \leq x_n \leq k_n + \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das Verhalten für $n \to \infty$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & k \leq \overline{x} \leq k + 0 \\ \Rightarrow \quad & k = \overline{x} \end{aligned}$$

D.h. beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert.

d) Es bleibt zu zeigen, dass k das Infimum von M, also die grösste untere Schranke von M ist.

Nach Konstruktion gilt:

i) Für jedes $x \in M$ ist $x \geq k_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow$ $x \geq k$ durch Grenzübergang.
Also ist k eine untere Schranke von M.

ii) Sei $\overline{k}$ eine weitere untere Schranke von M.
<u>Annahme:</u> $\overline{k} > k$.
$\Leftrightarrow$ $\overline{k} - k > 0$
Aus Aufgabenteil $a)$ wissen wir bereits, dass

$$x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0)$$

wählen wir nun n groß genug, so kann man $x_n - k_n$ wie folgt weiter abschätzen:

$$x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) < \overline{k} - k \leq \overline{k} - k_n.$$

$\Rightarrow$ $x_n < \overline{k}$ Widerspruch dazu, dass k <u>untere</u> Schranke von M ist.
$\Rightarrow$ $\overline{k} \leq k$, d.h. k ist grösste untere Schranke von M. $\square$

<u>Bemerkung:</u> Der Beweis dafür, dass jede nichtleere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum hat, kann anaolg geführt werden.

Lösung 2.8

a) Ja! Die Cosinus-Funktion sowie die Funktionen $\frac{1}{x}$ und x^2 sind stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Da die Verkettung sowie das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, ist $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir müssen also schauen, ob die Funktion $f(x)$ stetig in $x=0$ ist. Dazu betrachten wir den Grenzwert von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2$ für $x \to 0$.

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \leq x^2 \to 0 \quad \text{für } x \to 0,$$

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \geq -x^2 \to 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

D.h. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \to 0$ für $x \to 0$ und somit ist die Funktion $f(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Ja! Zunächst wissen wir, dass x^2 und $1-x$ stetig sind. Ihr Nullstellenmengen sind $N_{x^2} = \{0\}$ und $N_{1-x} = \{1\}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{1}{x^2}$ stetig ist auf $\mathbb{R}\backslash N_{x^2}$ und $\frac{1}{1-x}$ stetig ist auf $\mathbb{R}\backslash N_{1-x}$. Da sie Summe zweier stetiger Funktionen auch stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

c) Ja! Da die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist und die Summe zweier stetiger Funktionen auch wieder stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

d) Ja! $f(x)$ läßt sich umschreiben zu

$$f(x) = \sqrt[4]{|x|} = \sqrt{\sqrt{|x|}}.$$

Die Betragsfunktion ist auf $\mathbb{R}$ stetig und bildet auf $\mathbb{R}_0^+$ ab. Da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist und die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

e) Ja! $\frac{x^2}{2} - 1$ und $-\frac{x^3}{4} + 3$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Da

$$\frac{2^2}{2} - 1 = 1 = -\frac{2^3}{4} + 3$$

besitzt die Funktion $f(x)$ keinen Sprung an der Stelle $x = 2$ und ist somit stetig.

Lösung 2.9

a) Es gilt:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

und daher

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \overset{x \neq 1}{=} x - 2 \to -1 \quad \text{für } x \to 1.$$

Also ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$f(1) := -1!$$

b) Wir beachten, dass

$$x-1=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

gilt und erhalten daher

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\overset{x\neq 1}{=}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\quad\to\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}\quad\text{für } x\to 1.$$

Also ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x=1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$g(1):=\frac{1}{2}.$$

c) Hier gilt:

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2}=\frac{x-\sqrt{5}}{x-1}\cdot\frac{x+\sqrt{5}}{x-1}.$$

Für $x\downarrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n:=1+\frac{1}{n}$) ergibt sich:

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x-1}\to-\infty \tag{19}$$

$$\frac{x+\sqrt{5}}{x-1}\to+\infty, \tag{20}$$

(19) und (20) ergeben zusammen

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2}\quad\to-\infty\quad\text{für } x\downarrow 1.$$

Für $x\uparrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n:=1-\frac{1}{n}$) ergibt sich dagegen:

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x-1}\to+\infty \tag{21}$$

$$\frac{x+\sqrt{5}}{x-1}\to-\infty, \tag{22}$$

(21) und (22) ergeben zusammen

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2}\quad\to-\infty\quad\text{für } x\uparrow 1.$$

Also ist die Funktion $h(x)$ an der Stelle $x=1$ <u>nicht</u> stetig ergänzbar. Als Funktionswert ergäbe sich (die Formel ist formal, d.h. symbolisch zu verstehen):

$$h(1)=\frac{-4}{0}=-\infty.$$

Man sagt, die Funktion $h(x)$ besitzt an der Stelle $x=1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

d) Die Funktion $k(x) = \dfrac{2x-2}{|2x-2|} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{array} \right\}$ ist stetig für $x \neq 1$ und hat an der Stelle $x = 1$ eine Sprungstelle mit einem Sprung der Höhe 2 von -1 auf $+1$ als Unstetigkeit. Sie ist an der Stelle $x = 1$ also nicht stetig ergänzbar.
$\rightarrow$ Skizze anfertigen!

Lösung 2.10 O.B.d.A. sei unser Polynom

$$p(x) = x^{2n+1} + c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_1 x + c_0$$

normiert.
Da $p(x) = x^{2n+1}\left[1 + \dfrac{c_{2n}}{x} + \ldots + \dfrac{c_1}{x^{2n}} + \dfrac{c_0}{x^{2n+1}}\right]$

$$\Rightarrow \; p(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} \rightarrow +\infty & : & x \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty & : & x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

Man kann daher Stellen $a < b$ finden mit $p(a) < 0$ und $p(b) > 0$.
Deshalb gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $p(x_0) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz, da $p(x)$ stetig ist!

Bemerkung: Die Lösung der Aufgaben ist hier zu Ende. Man kann zusätzlich ein konkretes $b < \infty$ angeben, für das gilt $p(b) > 0$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Für $x \geq \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right)) \geq 1 > 0$ gilt:

$$\widetilde{p}(x) = c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_0$$

$$|\widetilde{p}(x)| \overset{x \geq 1}{\leq} \left(\frac{1}{x}|c_{2n} + \ldots + c_0|\right) x^{2n+1} \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \left(\frac{1}{x}\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right) x^{2n+1}$$

Da $x \geq 1$ und gleichzeitig $x \geq 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right)$, kann man $|\widetilde{p}(x)|$ schließlich wie folgt abschätzen:

$$|\widetilde{p}(x)| \leq \frac{1}{2}x^{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) = x^{2n+1} + \widetilde{p}(x) &\geq x^{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}x^{2n+1} \geq 1/2 > 0\,. \end{aligned}$$

Also kann man $b = \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right))$ wählen.
Entsprechend findet man ein a mit $p(a) < 0$!

Lösung 2.11

a) Für die Menge $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$ gilt:

$$\sup A = 5 = \max A$$

und

$$\inf A = -2,$$

aber -2 ist kein Minimum von A. Zur Begründung beachten wir, dass nach Definition der Menge A gilt:

$$x \leq 5 \quad \text{für alle } x \in A.$$

D. h. 5 ist obere Schranke von A. Ausserdem gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ derart, dass

$$5 - \varepsilon \leq x \leq 5.$$

Denn wir können ja zum Beispiel $x = 5 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ wählen, um die gewünschte Ungleichung zu erhalten. Also ist 5 kleinste obere Schranke von A. Da $5 \in A$, gilt demnach sogar

$$\max A = 5 = \sup A.$$

Entsprechend sieht man die Aussage für -2 ein:

- -2 ist untere Schranke von A nach Definition von A.
- -2 ist grösste untere Schranke von A, da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt derart, dass

  $$-2 < x < -2 + \varepsilon.$$

  Wähle z. B. $x = -2 + \frac{\varepsilon}{2}$.
- -2 ist kein Minimum von A, weil $-2 \notin A$.

$$A = (-2, 5]$$

b) Für die Menge $B = \{x \,|\, x^2 < 5\}$ gilt:

$$\sup B = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \inf B = -\sqrt{5},$$

aber $\sqrt{5}$ ist kein Maximum von B, weil $\sqrt{5} \notin B$. Entsprechend ist $-\sqrt{5}$ kein Minimum von B, weil $-\sqrt{5} \notin B$. Dazu beachten wir, dass gilt:

$$B = \{x \,|\, x^2 < 5\} = \{x \,|\, -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$$

und benutzen die gleiche Argumentation wie in a)!

$$B = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$$

c) Für die Menge $C = \{x \,|\, 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$ gilt schliesslich:

$$\sup C = \max C = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \inf C = \min C = -1.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} 3 \leq 2x+5 \leq 8 \;&\Leftrightarrow\; 0 \leq 2x+2 \leq 5 \\ \Leftrightarrow\; -2 \leq 2x \leq 3 \;&\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

woraus mit der Argumentation von a) die Behauptung folgt.

$$C = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

Lösung 2.12

a)

$$p'(x) \;=\; 4x^3 - 18x + 4$$

Denn: $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen f und g.

b)

$$q'(x) = [(x^2-5)^8]' = 8(x^2-5)^7 \cdot 2x = 16x(x^2-5)^7$$

nach der Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ und den Regeln in a)!

c)

$$\begin{aligned} r'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} \quad \text{(Quotientenregel!)} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^3 + x - x^3 + x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Benutzt:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2-1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{(Kettenregel!)} \\ \left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \\ \left(\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Beachte: $\sqrt{x^2-1}$ ist nur definiert für $x^2-1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \geq 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$ oder $x \leq -1$.
Beim Ableiten „gerät“ $\sqrt{x^2-1}$ in den Nenner: $\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}}$, also alles „richtig“ für $|x| > 1 \;\Leftrightarrow x > 1$ oder $x < -1$

d)

$$\begin{aligned}
e_n(x) &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
e_n'(x) &= n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \\
&= e_n(x) \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{n}}
\end{aligned}$$

nach der Kettenregel!

Bemerkung: Später sehen wir:

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \text{ für } n \to +\infty$$

Obige Formel legt also

$$(e^x)' = e^x$$

nahe, da $(1+\frac{x}{n}) \to 1$ für $n \to +\infty$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest.

Problem: Gilt: $\lim_n e_n'(x) = (e^x)'$?
Vertauschen von zwei Grenzübergängen!

Lösung 2.13 Wir rechnen $(2+h)^3$ aus:

$$\begin{aligned}
(2+h)^3 &= (2+h)^2(2+h) \\
&= (4+4h+h^2)(2+h) \\
&= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3 \\
&= 8+12h+6h^2+h^3 \\
&= 8+\underbrace{12}_{a}h+\underbrace{h^2(6+h)}_{=o(h)}
\end{aligned}$$

$\boxed{a=12}$!
oder $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$
$f(2) = 2^3 = 8$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
$\Rightarrow\; a = 12$ (Def. der Ableitung/MWS!)

Lösung 2.14

a)

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \\ W(\pm 1) &= (1-1)^2 = 0\,! \\ W'(x) &= 2(x^2-1)\cdot 2x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1) \\ &= 4x^3-4x \end{aligned}$$

Nullstellen von W': $x=-1, x=0, x=+1$.

i)

$$W'(0) = 0\,.$$

$$0 < h < 1 \;\Rightarrow\; 0 < h^2 < 1 \;\Rightarrow\; W'(h) = 4h(h^2-1) < 0$$

$$-1 < h < 0 \;\Rightarrow\; 0 < h^2 < 1 \;\Rightarrow\; W'(h) = 4\underbrace{h}_{<0}\underbrace{(h^2-1)}_{<0} > 0$$

D.h. für $-1 < h < 0$ ist $W'(h) > 0$, d.h. Steigung der Tangente an den Graphen von W im Punkt $(h, W(h))$ ist positiv, $W'(h) = 0 \rightsquigarrow$ horizontale Tangente, dann $W'(h) < 0$ für $0 < h < 1 \rightsquigarrow$ Tangentensteigung negativ.

$\Rightarrow\; W(0) = 1$ liefert lok. Maximum.

Entsprechend:

ii)

$$W'(\pm 1) = 0$$

$$\begin{aligned} W'(\pm 1 \pm h) &= 4(\pm 1 \pm h)((\pm 1 \pm h)^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(1 \pm 2h + h^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(h^2 \pm 2h) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)h(h \pm 2) \end{aligned}$$

+ -Fall:

$$W'(1+h) = 4(1+h)h(h+2) > 0 \text{ für } h > 0$$

$$W'(1-h) = 4(1-h)h(h-2) < 0 \text{ für } 0 < h < 1\,!$$

– -Fall:

$$W'(-1+h) = 4(-1+h)h(h-2) = 4(h-1)h(h-2) > 0 \text{ für } 0 < h < 1$$

$$W'(-1-h) = 4(-1-h)h(h+2) = 4(-1)(1+h)h(h+2) < 0 \text{ für } 0 < h (< 1)\,!$$

$\Rightarrow\; W(\pm 1) = 0$ liefern lok. Minima!

iii) Wegen $W(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ gilt

$$W(x) \to +\infty \text{ für } x \to \pm\infty\,!$$

$$W(\pm 2) = (4-1)^2 = 3^2 = 9 \to \text{Maxima auf } [-2,2]\,!$$

<u>Beachte:</u> $W(\pm 2) = 9$ sind Randextrema!

$$W'(2) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 > 0\,,\; W'(-2) = -24 < 0\,!$$

Alternativ kann man die Art der Extrema im Innern des Intervalls auch wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
W(\pm 1) &= 0 \quad \text{(s.o.)} \\
W(0) &= 1 \\
W''(x) &= 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) \\
W''(\pm 1) &= 12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0 \\
W''(0) &= -4 < 0 \\
W'(\pm 1) &= 0 \text{ und } W''(\pm 1) = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \pm 1 \text{ liefert lok. Min. (Schule!)} \\
W'(0) &= 0 \text{ und } W''(0) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; 0 \text{ liefert lok. Max.}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= |x^2 - 2x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&= |x(x-2)| \\
&\Rightarrow\; f(0) = 0 = f(2)
\end{aligned}$$

Erwarten: $x = 0\,,\; x = 2$ liefern Minima!
Um die Funktion $f(x)$ mit Fallunterscheidung zu schreiben, schauen wir uns die Ungleichung

$$x^2 - 2x \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(x-2) \geq 0$$

an. Sie ist erfüllt in den folgenden beiden Fällen:

$$x \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x \geq 2$$

und

$$x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad x \leq 2,$$

d.h. in den Fällen $x \geq 2$ bzw. $x \leq 0$. Da diese beiden Fälle nicht ganz $\mathbb{R}$ abdecken müssen wir drei Fälle unterscheiden.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rl} x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x = (-x)(x-2) & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 2x-2 = 2(x-1) & \text{für } x > 2 \\ -2x+2 = (-2)(x-1) & \text{für } 0 < x < 2 \\ 2x-2 = 2(x-1) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

<u>Problem:</u> f <u>nicht</u> differenzierbar in $x = 0$, $x = 2$ wegen Betrag!

Man erkennt aber: $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$

i) $f(1) = 1$

$$\begin{array}{ll} f'(1) = 0, & f'(1+h) = (-2)h < 0 \text{ für } h > 0 \\ & f'(1-h) = (-2)(-h) = 2h > 0 \text{ für } 0 < h < 1 \end{array}$$

$\Rightarrow\ f(1) = 1$ lok. Max.

ii) $f(0) = 0$

$$\begin{array}{rl} 0 < h < 1 & f(h) = |h(h-2)| = (-h)(h-2) \\ & f'(h) = (-2)(h-1) > 0 \\ -1 < h < 0 & f(h) = h(h-2) \\ & f'(h) = 2(h-1) < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\ f(0) = 0$ lok. Min.

iii) $f(2) = 0$

$$\begin{array}{ll} 0 < h < 1 & f'(2+h) = 2(2+h-1) = 2(1+h) > 0 \\ & f'(2-h) = (-2)(2-h-1) = \underbrace{(-2)}_{<0}\underbrace{(1-h)}_{>0} < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\ f(2) = 0$ lok. Min.

Wegen $f(x) = |x^2 - 2x| = x^2|1 - \frac{2}{x}| \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} x > 2 & : & f(x) = x^2 - 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \\ 0 \le x \le 2 & : & f(x) = -x^2 + 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \\ x < 0 & : & f(x) = x^2 - 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \end{array}$$

<u>Beachte:</u> f' springt bei $x = 0$ von -2 auf 2 und bei $x = 2$ ebenfalls von -2 auf 2.

Lösung 2.15

i) Definiere für jedes h ein $\tilde{h} = -h$ und bemerke, dass wenn $h \to 0$ auch $\tilde{h} \to 0$. Damit gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{\tilde{h}\to 0} -\frac{f(x)-f(x+\tilde{h})}{\tilde{h}} = \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h})-f(x)}{\tilde{h}} = f'(x)$$

nach Definition der Ableitung (Definition 2.26 im Skript).

Bemerkung: Alternativ ist es möglich, den Mittelwertsatz auf das Intervall $(x-h,x)$ für $h > 0$, bzw. $(x,x+h)$ für $h < 0$ anzuwenden.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f'(x)+f'(x)\right) = f'(x)\,.\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung verwendet Aufgabenteil i) und die Definition der Ableitung.

Lösung 2.16

a) Ja!
$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b] \quad \Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ Beh.

b) Nein!
$f(x) = x^3$ ist auf $[-1,1]$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$ ($f'(x) \geq 0$ folgt aus dem Mittelwertsatz, jedoch nicht $f'(x) > 0$)

c) Ja!
siehe Vorlesung.

d) Nein!
siehe a): x_0 könnte a oder b sein.

e) Ja!
Satz von Rolle.

f) Ja!
Vgl. Beweis zum Satz von Rolle.

Lösung 2.17 $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla u(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

$u(x,y,z) = R \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2 = R^2$
Niveaumengen sind Kugeloberflächen mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius $R > 0$.

Lösung 2.18

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Die Reihe lässt sich also nach unten durch die harmonische Reihe abschätzen und ist somit genau wie diese divergent.

b) In dieser Aufgabe greifen wir auf den gegebenen Tipp zurück. Dafür formen wir ihn wie folgt um:

$$\begin{aligned} n! &\leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{n^n} &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Nun beweisen wie dies per vollständiger Induktion:
(IA): $n = 1$:
$$1 = \frac{1!}{1^1} \leq \frac{1}{2^0} = 1 \quad \checkmark.$$
(IAn): $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:
$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \leq \frac{1}{2^n}$$
Bew.:
$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{(n+1)n!}{n^n} \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} \overset{\text{(IAn)}}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

Damit gilt für die Reihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Die geometrische Reihe ist eine Majorante und somit konvergiert die betrachtete Reihe.

c) Verwende das Quotientenkriterium:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \frac{10^n}{n^{10}} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} < 0{,}95 \quad \forall n \geq 4$$

Somit konvergiert die Reihe.

d) Es handelt sich hierbei um die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ für $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Nach Satz 1.14 aus dem Skript konvergiert die Reihe somit gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1$. Das erste Glied der Reihe (also 1) muss abgezogen werden, da der Grenzwert aus Satz 1.14 für $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ gilt.

e) Wir stellen fest, dass alle Folgenglieder > 0 sind und verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{x^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|} = \frac{x^{2(k+1)+1}\,(2k+1)!}{x^{2k+1}\,(2(k+1)+1)!} = \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)} \leq q < 1\,,$$

für ein hinreichend großes k. Somit konvergiert die Reihe.

Lösung 2.19

a)

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{3}{2^4} = 0{,}1875 \\
f_2 &= \frac{3}{2^4} + \frac{3^2}{2^8} = \frac{3\,2^4 + 3^2}{2^8} = \frac{57}{2^8} \approx 0{,}22265625 \\
f_3 &= \frac{3}{2^4} + \frac{57^2}{2^{16}} = \frac{3\,2^{12} + 57^2}{2^{16}} = \frac{15537}{2^{16}} \approx 0{,}23707580 \\
f_4 &= \frac{3}{2^4} + \frac{15537^2}{2^{32}} = \frac{3\,2^{28} + 15537^2}{2^{32}} = \frac{1046704737}{2^{32}} \approx 0{,}24370493 \\
f_5 &= \frac{3}{2^4} + \frac{1046704737^2}{2^{64}} = \frac{3\,2^{60} + 1046704737^2}{2^{64}} \approx 0{,}24689209
\end{aligned}$$

b) (IA): Für $n = 1$:

$$f_1 = \frac{3}{16} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \checkmark.$$

(IAn): $f_n < \frac{1}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.: $f_{n+1} < \frac{1}{4}$
Bew.:

$$f_{n+1} = \frac{3}{16} + f_n^2 \overset{\text{(IAn)}}{<} \frac{3}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

c) Man betrachte die Differenz $f_{n+1} - f_n$ und zeige, dass diese größer als 0 ist:

$$f_{n+1} - f_n = f_n^2 - f_n + \frac{3}{16} = \left(f_n - \frac{1}{4}\right)\left(f_n - \frac{3}{4}\right)$$

Nach Aufgabenteil b) sind nun die beide Terme in den Klammern kleiner als 0 und somit ist das Produkt größer als 0.

d) Die Folge ist nach oben beschränkt und zudem (strikt) monoton wachsend. Somit besitzt sie einen Grenzwert (Satz aus der Vorlesung). Es gilt also $\lim_{n\to\infty} f_n = \bar{f}$ und somit:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f_n^2 + \frac{3}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & \bar{f} = \bar{f}^2 + \frac{3}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\bar{f} - \frac{1}{4}\right)\left(\bar{f} - \frac{3}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

Lösungen dieser Gleichung sind $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wobei zweitere nach Aufgabenteil b) ausscheidet.

Lösung 2.20 (IA): $n = 2$:

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2' \quad \text{Produktregel!} \to \text{Vorlesung/Skript!}$$

<u>Zwischenbemerkung</u> (nach Tipp): $n = 3$:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$$

<u>Beweis:</u> Setze: $f_1 \cdot f_2 =: g$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' &= (g \cdot f_3)' \\ &= g' \cdot f_3 + g \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \\ &= (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \checkmark \end{aligned}$$

(IAn): Formel ok. für $n \in \mathbb{N}$:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n'$$

(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}'$$

Beweis: $g := f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$

$$\begin{aligned}
(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' &= (g \cdot f_{n+1})' \\
&= g' \cdot f_{n+1} + g \cdot f'_{n+1} \quad \text{(Produktregel!)} \\
&= (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f'_{n+1} \\
&= (f'_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f'_n) \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f'_{n+1} \\
&= f'_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} \\
&+ f_1 \cdot f'_2 \cdot f_3 \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots \\
&+ f_1 \cdot \ldots \cdot f'_n \cdot f_{n+1} \\
&+ f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f'_{n+1} \quad \checkmark \quad \text{q.e.d}
\end{aligned}$$

Folgerungen:

a) $(f^n(x))' = n \cdot f^{(n-1)}(x) \cdot f'(x)$.
$(f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = f(x))$

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(f(x) = x,\ f'(x) = 1)$

Lösung 2.21

a) Da die Funktion f differenzierbar in a ist, existiert nach einem Satz aus der Vorlesung eine Funktion $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \qquad \text{und} \qquad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{o(h)}{h} \qquad \text{und} \qquad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Da $f(a) = 0$, $f'(a) = -1 < 0$, $h > 0$ und $\frac{o(h)}{h}$ beliebig klein wird, muss (sobald $|\frac{o(h)}{h}| < 1$ ist) $f(a+h) < 0$ sein. Diese Behauptung gilt auch für jedes $\tilde{h}$ mit $0 < \tilde{h} \leq h$.

b) Da jede differenzierbare Funktion auch stetig ist, $a + h < b$ mit h genügend klein und $f(a+h) < 0 < f(b)$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Da f differenzierbar und $f(a) = 0 = f(x_0)$ existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_1 \in (a, x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

Lösung 2.22

a) Man kann folgende Funktionswerte berechnen:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -1-7-3+4 &&= -7\\
f(0) & &&= 4\\
f(1) &= 1-7+3+4 &&= 1\\
f(2) &= 8-28+6+4 &&= -10\\
f(6) &= 216-252+18+4 &&= -14\\
f(7) &= 7^3-7^3+21+4 &&= 25
\end{aligned}$$

Hierbei erkennt man insgesamt drei Wechsel des Vorzeichens. Da f als Polynom stetig ist, muss aufgrund des Zwischenwertsatzes der Wert 0 zwischen den jeweiligen Auswertungspunkten angenommen werden. Die gesuchten Intervalle sind somit $[-1,0]$, $[1,2]$ und $[6,7]$.

Bestimmung der Näherungslösung durch Bisektion:

Anfangsintervall: $I_0 = [a_0, b_0] = [1,2]$ und $f(1) = 1$ sowie $f(2) = -10$.

$n = 1$: $c_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2}$ und $f(c_1) = -3.8750 \Rightarrow a_1 = a_0$ und $b_1 = c_1$.

$n = 2$: $c_2 = \frac{5}{4}$ und $f(c_2) = -1.2344 \Rightarrow a_2 = a_1$ und $b_2 = c_2$.

$n = 3$: $c_3 = \frac{9}{8}$ und $f(c_3) = -0.060547 \Rightarrow a_3 = a_2$ und $b_3 = c_3$.

$n = 4$: $c_4 = \frac{17}{16}$ und $f(c_4) = 0.48462 \Rightarrow a_4 = c_4$ und $b_4 = b_3$.

$n = 5$: $c_5 = \frac{35}{32}$ und $f(c_5) = 0.21567 \Rightarrow a_5 = c_5$ und $b_5 = b_4$.

$n = 6$: $c_6 = \frac{71}{64}$ und $f(c_6) = 0.078457 \Rightarrow a_6 = c_6$ und $b_6 = b_5$.

$n = 7$: $c_7 = \frac{143}{128}$ und $f(c_7) = 0.0091777$

b) Es gilt

$$|f(x) - g(x)| = \left|\frac{1}{2}\cos(x)\right| \leq \frac{1}{2}$$

Wertet man g also an denselben Punkten wie in Teil a) aus, so können die Funktionswerte nur um höchstens 0,5 abweichen. Insbesondere ändert sich dadurch keines der obigen Vorzeichen und man erhält mit derselben Begründung wie in Teil a) erneut die Intervalle $[-1,0]$, $[1,2]$ und $[6,7]$.

Lösung 2.23 Zuerst nennen wir die Summanden a_n, so dass sich die Reihe schreiben läßt als

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Da die Voraussetzung für das Quotietenkriterium fordert, dass $a_n \neq 0$ für $n \geq N$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

i) Fall $x = 0$: Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

ist die Konvergenz der Reihe in diesem Fall kein Problem.

ii) Fall $x \neq 0$:
In diesem Fall gilt grundsätzlich $a_n \neq 0$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2n+1)!}\right|}{\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} \\
&= \left| \frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!\, x^{2n+1}} \right| \\
&= \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \right| \\
&= \left| \frac{x^2}{4n^2+10n+6} \right| \\
&\leq \left| \frac{x^2}{4n^2} \right| \\
&\leq \frac{1}{4} \qquad \text{für} \qquad n \geq x
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ läßt sich also ein $n \in \mathbb{N}_0$ finden, für das

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1}{4} \qquad \text{für} \qquad n \geq x$$

gilt. Damit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Lösung 2.24

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{f(x+h,x+h)-f(x,x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h,x+h)-f(x,x+h)+f(x,x+h)-f(x,x)}{h} \\
&= \underbrace{\frac{f(x+h,x+h)-f(x,x+h)}{h}}_{\to \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) \text{ für } h\to 0} + \underbrace{\frac{f(x,x+h)-f(x,x)}{h}}_{\to \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \text{ für } h\to 0} \\
\Rightarrow\ g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)
\end{aligned}$$

Lösung 2.25

$g(x) := \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$$\begin{aligned} g(0) &= \sin y - 0 - \sin y \cdot 1 = 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,,\ \sin 0 = 0 \\ g'(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

$h(x) := \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y = g'(x)\,!$

$$\begin{aligned} h(0) &= \cos y - \cos y + 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,,\ \sin 0 = 0 \\ h'(x) &= -\sin(x+y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Zusammen haben wir $g' = h$ und $h' = -g$. Wir zeigen nun $g^2(x) + h^2(x) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Für $z(x) := g^2(x) + h^2(x)$ gilt $z(0) = 0$ (s.oben).
und $z' = 2gg' + 2hh' = 2(gh - hg) \equiv 0 \;\Rightarrow\; z(x) = 0\,!$
$\Rightarrow\; g(x) \equiv 0$ und $h(x) \equiv 0 \;\Rightarrow$ Beh.!

Lösung 2.26

a) Nein!
<u>Beispiel</u>: $f(x) = x\,,\ x_0 = 0$
$|f(x)| = |x|$ ist <u>nicht</u> differenzierbar in $x_0 = 0$.

b) Ja!
f, g stetig in x_0,
$\Rightarrow\; |f|, |g|$ stetig in x_0
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \max\{f,g\} &=& \frac{1}{2}\{f+g+|f-g|\} \\ \min\{f,g\} &=& \frac{1}{2}\{f+g-|f-g|\} \end{array} \right\} \text{ stetig in } x_0\,.$$

c) Nein!
$$f(x) = 0,\ g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } x \le 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{array} \right.$$
fg ist die Nullfunktion, also stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber g ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

d) Ja!
Satz der Vorlesung!

e) Nein!
Siehe a)!

Lösung 2.27

a) Um das Ergebnis nach den ersten beiden Iterationen mit der wirklichen Nullstelle vergleichen zu können, berechnen wir diese zuerst auf herkömmliche Weise:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -3}\,.$$

Nun zum Newton-Verfahren:

$$f(x) = 2x+6\,,\ f'(x) = 2 > 0$$

Startwert $x_0 = -1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} \\
&= -1 - \frac{4}{2} = -1-2 = -3\,. \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -3 - \frac{f(-3)}{2} = -3\,,\ \text{da } f(-3) = 0\,! \\
\Rightarrow &\quad x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}$$

b) Auch diesmal berechnen wir zuerst die Nullstellen, um einschätzen zu können wie gut das Ergebnis des Newton-Verfahrens nach zwei Iterationsschritten ist.

$$0 = q(x) \ \Leftrightarrow\ x^2 - 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x+2)(x-2) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_1 = -2\,,\ x_2 = 2\,.$$

$$q(x) = x^2 - 4\,,\ q'(x) = 2x \geq 0 \text{ in } [0,3]$$

Startwert $x_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
q(1) &= 1-4 = -3 \\
q'(1) &= 2 \\
\Rightarrow\ x_1 &= x_0 - \frac{q(x_0)}{q'(x_0)} = 1 - \frac{-3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\
q(x_1) &= q(5/2) = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25-16}{4} = \frac{9}{4} \\
q'(x_1) &= q'(5/2) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 \\
\Rightarrow\ x_2 &= x_1 - \frac{q(x_1)}{q'(x_1)} = \frac{5}{2} - \frac{9/4}{5} = \frac{25 - 2\cdot 9/4}{10} \\
&= \frac{25 - 9/2}{10} = \frac{50-9}{20} = \frac{41}{20} = 2{,}05 \\
q(x_2) &= 2{,}05^2 - 4 = 4{,}2025 - 4 = 0{,}2025 \\
q'(x_2) &= q'(2{,}05) = 2 \cdot 2{,}05 = 4{,}1 \\
\Rightarrow\ x_3 &= 2{,}05 - \frac{0{,}2025}{4{,}1} \approx 2{,}00060975\ldots
\end{aligned}$$

c)

$$k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x-3)(x-4) = (x+2)(x^2 - 7x + 12)$$

$$k'(x) = 3x^2 - 10x - 2$$
$$0 = k(x) \;\Leftrightarrow\; x_1 = -2\,,\; x_2 = 3\,,\; x_3 = 4\,.$$

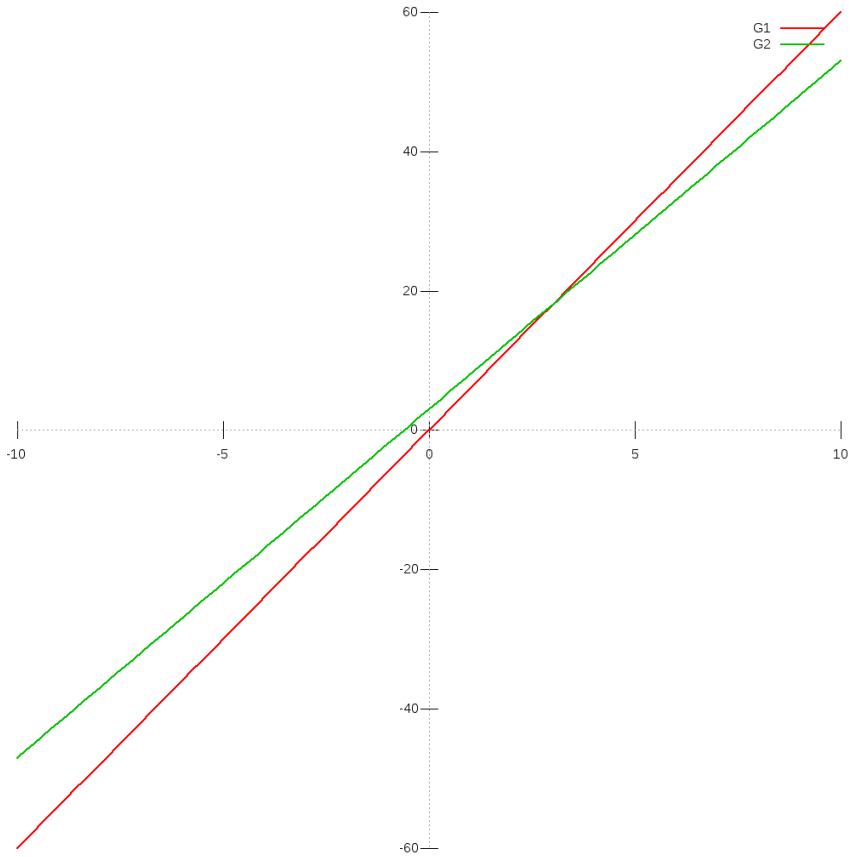
Startwert $x_0 = 1$,
$k(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 25 - 7 = 18$
$k'(1) = 3 - 10 - 2 = 3 - 12 = -9$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; x_1 &= x_0 - \frac{k(x_0)}{k'(x_0)} = 1 - \frac{18}{-9} = 1 + \frac{18}{9} = 1 + 2 = 3 \\ \Rightarrow\; x_2 &= x_1\,,\ \text{da } k(x_1) = k(3) = 0 \end{aligned}$$

Wie bei a) $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_3 = x_2 = x_1$!
Nullstelle schon erwischt!

Lösung 2.28

i)



ii) Löse

$$\begin{aligned} 7x &= 5x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt liegt also bei $(\frac{3}{2}, \frac{21}{2})$.

iii) Eine mögliche Lösung ist $(x_1, y_1) = (0,3)$, $(x_2, y_2) = (1,7)$, denn $(0+1, 3+7) = (1,10) \notin G_2$.

iv) (11) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1$, d.h. $y_1 = 7x_1, y_2 = 7x_2$. Dann gilt

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 7x_1 + 7y_2) = (x_1 + x_2, 7(x_1 + x_2)) \in G_1 . \checkmark$$

(12) Seien $(x_1, y_1) \in G_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1, 7\alpha x_1) \in G_1 \checkmark$$

Lösung 2.29

a) Geeignete Startwerte um die vier Nullstellen zu bestimmen sind z.B.: -0.75, -1.5, 0.75, 1.5

```
function xNew = Newton( x0, genauigkeit )
% Sucht Nullstelle mit dem Newton-Verfahren.
% Argument x0 ist der Startwert.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = 2*(x*x-1)*(x*x-1) - 1;
end

% Hilfsfunktion: Ableitung f' auswerten
function f = evaluateDF( x )
  f = 8*(x*x-1)*x;
end

% Hauptprogramm:
% Die eigentliche Iteration
precision = genauigkeit % Genauigkeit der Nullstelle
xNew = x0               % (z.B. 1e-3)
zaehler = 0; % Zaehler zum Zaehlen der Iterationen

while abs( evaluateF(xNew) ) > precision
  xNew = xNew - evaluateF( xNew ) / evaluateDF( xNew )
  zaehler = zaehler +1;
end
AnzahlIterationen = zaehler
end
```

Fordert man größere Genauigkeit, so benötigt das Programm nur wenige Iterationen zusätzlich. Wählt man als Startwert $x_0 = 8$ so beobachtet man folgendes Verhalten:

Genauigkeit	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
Anzahl an Iterationen	10	11	12	12

b)
```
function xNew = Newton( x0, genauigkeit )
% Sucht Nullstelle mit dem Newton-Verfahren.
% Argument x0 ist der Startwert.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = x*x*x -2*x + 2;
end

% Hilfsfunktion: Ableitung f' auswerten
function f = evaluateDF( x )
  f = 3*x*x-2;
end

% Hauptprogramm:
% Die eigentliche Iteration
precision = genauigkeit % Genauigkeit der Nullstelle
xNew = x0
zaehler = 0; % Zaehler zum Zaehlen der Iterationen

while abs( evaluateF(xNew) ) > precision
  xNew = xNew - evaluateF( xNew ) / evaluateDF( xNew )
  zaehler = zaehler +1;
end
AnzahlIterationen = zaehler
end
```

Bei einem Startwert in der Nähe von Null (z.B. $x_0 = 0{,}1$) tritt das Problem bereits auf. Beginnt man mit $x_0 = 0$, so erhält man die alternierende Folge 0,1,0,1,0,1,...

c)
```
function xNew = Newton( x0, genauigkeit, epsilon )
% Sucht Nullstelle mit dem Newton-Verfahren.
% Argument x0 ist der Startwert.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = x/((x+1)*(x+1)) + 1;
```

```
end

% Hilfsfunktion: Ableitung f' auswerten
function f = evaluateDF( x )
  f = 1/((x+1)*(x+1)) - 2*x/((x+1)*(x+1)*(x+1));
end

% Hauptprogramm:
% Die eigentliche Iteration
precision = genauigkeit % Genauigkeit der Nullstelle
xNew = x0
zaehler = 0; % Zaehler zum Zaehlen der Iterationen

while ((abs( evaluateF(xNew) ) > precision)
        && (abs(evaluateDF( xNew )) > epsilon) )
  xNew = xNew - evaluateF( xNew ) / evaluateDF( xNew )
  zaehler = zaehler +1;
end
AnzahlIterationen = zaehler
if ( abs(evaluateDF( xNew )) <= epsilon )
  disp(sprintf('|DF( %d )| = %d zu klein!', xNew,
              abs(evaluateDF( xNew ))));
end
end
```

Lösung 2.30

a)

$$\begin{aligned} x_0 &\quad \text{Startwert} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

b) i) Es kann passieren, dass der Nenner $f'(x_n) = 0$ ist. Dann kann das nächste Folgenglied x_{n+1} nicht berechnet werden.

ii) Es kann sein, dass das Verfahren endlos zwischen zwei Punkten hin und her springt.

iii) Es kann sein, dass $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ oder $x_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$.

Lösung 2.31

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) &= \frac{u-1}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{u-1}{f(u,v,w)}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) &= \frac{v-3}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{v-3}{f(u,v,w)}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) &= \frac{w-5}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{w-5}{f(u,v,w)}\,.
\end{aligned}$$

$$\nabla f(u,v,w) = \frac{1}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} \begin{pmatrix} u-1 \\ v-3 \\ w-5 \end{pmatrix}.$$

$$f(u,v,w) = R \;\Rightarrow\; (u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2 = R^2$$

$\rightsquigarrow$ Kugeln vom Radius $R>0$ mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösung 2.32

a)

$$(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \sinh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

b)

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \cosh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

c)

$$f(x) := \cosh^2 x - \sinh^2 x\,,\; f(0) = 1\,,\text{ da}$$

$$\cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0+e^{-0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\,,\; \sinh 0 = \frac{1}{2}(e^0-e^{-0}) = 0\,.$$

$$f'(x) \overset{a),b)}{=} 2\cosh x\cdot\sinh x - 2\sinh x\cosh x = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

$$\Rightarrow\; f(x) = \text{const} \quad \forall x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,,\text{ da } f(0) = 1\,.$$

Lösung 2.33

a)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x} = \frac{x-2}{x(x^2-4)} = \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{1}{x(x+2)}$$

stetig ergänzbar in $x=2$ mit Funktionswert: $f(2) := \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$.

b)

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$$

<u>nicht</u> stetig ergänzbar!

$$g(2+h) = \frac{\sqrt{2+h}-2}{2+h-2} = \frac{\sqrt{2+h}-2}{h} \to -\infty \text{ für } h > 0, h \downarrow 0\,.$$

Denn:

$$\sqrt{2+h} \to \sqrt{2}\,;\ \sqrt{2+h}-2 \to \sqrt{2}-2 < 0$$

$$h > 0, h \downarrow 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{h} \to +\infty$$

$$\sqrt{2+h}-2 < 0 \text{ für kleines } h > 0\,.$$

$$g(2-h) = \frac{\sqrt{2-h}-2}{2-h-2} = \frac{\sqrt{2-h}-2}{-h} = \frac{2-\sqrt{2-h}}{h} \to +\infty \text{ für } h > 0, h \downarrow 0\,.$$

Denn:

$$2-\sqrt{2-h} \to 2-\sqrt{2} > 0\,!$$

c)

$$h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x+2}{x-2}$$

<u>nicht</u> stetig ergänzbar!

$$h(2\pm h) = \frac{2\pm h+2}{2\pm h-2} = \frac{4\pm h}{\pm h} = 1 \pm \frac{4}{h} \to \left\{ \begin{array}{lll} +\infty & \text{für} & +, h > 0, h \downarrow 0 \\ -\infty & \text{für} & -, h > 0, h \downarrow 0 \end{array} \right\}$$

Lösung 2.34

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \frac{\sin x}{\cos x} \\ f'(x) &= 2x\frac{\sin x}{\cos x} + x^2 \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{cos^2 x} \\ &= 2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x) \\ &= x[x\tan^2 x + 2\tan x + x] \end{aligned}$$

benutzt:

1) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
2) Produktregel, Quotientenregel.

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= (e^x + e^{-x})^5 \\ g'(x) &= 5(e^x + e^{-x})^4 (e^x - e^{-x}) \\ &= 5(e^x + e^{-x})^3 (e^{2x} - e^{-2x}). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \\ h'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

benutzt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und Kettenregel!

Lösung 2.35 a) Ja! (Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind konvergent, konvergente Folgen sind beschränkt.)
b) Ja! (Denn sie sind beschränkt, und monotone und beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.
c) Ja! (Satz aus der Vorlesung.)
d) Ja! (Satz aus der Vorlesung.)
e) Nein! (Beispiel aus der Vorlesung.)

3 Vektorräume

Lösung 3.1

a) Um die Vektoren x und r berechnen zu können, müssen wir zwei Punkte auf der Geraden kennen. Diese können wir berechnen, indem wir ein festes y_1 wählen und den zugehörigen Werte für y_2 ausrechnen, bzw. andersherum.
Zuerst setzen wir $y_1 = 0$

$$\begin{aligned} 0 + \frac{4}{5} y_2 &= 12 \\ \Leftrightarrow \qquad y_2 &= \frac{12 \cdot 5}{4} = 15, \end{aligned}$$

anschließend $y_2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} y_1 + 0 &= 12 \\ \Leftrightarrow \qquad y_1 &= \frac{12 \cdot 5}{3} = 20. \end{aligned}$$

Die Punkte $(0,15)$ und $(20,0)$ liegen also auf der Geraden G. Nun können wir

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und

$$r = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix}$$

setzen und erhalten

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) **Variante 1:**
Die Konstruktion folgt dem Beweis des entsprechenden Lemmas aus der Vorlesung. Hier ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird ein Vektor p, der senkrecht auf r und q steht, bestimmt:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 q_3 - r_3 q_2 \\ r_3 q_1 - r_1 q_3 \\ r_1 q_2 - r_2 q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Den gesuchten Vektor n erhält man durch „Normalisierung“:

$$n = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} p = \frac{1}{\sqrt{6}} p$$

Schließlich ist noch d zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle y, n \rangle &= \langle x + t\,r + s\,q, n \rangle = \langle x, n \rangle + t \langle r, n \rangle + s \langle q, n \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle x, p \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)) = \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \middle| -\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 = \frac{-2}{\sqrt{6}} \right\}.$$

Variante 2:
n_1, n_2 und n_3 bestimmen wir, indem wir drei Punkte auf der Ebene berechnen, sie in die Gleichung

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = d$$

einsetzen und das Gleichungssystem aus den drei Gleichungen lösen. So erhalten wir Werte für n_1, n_2 und n_3 in Abhängigkeit von d. d können wir nun bestimmen, indem wir die gerade berechneten n_1, n_2 und n_3 in die Gleichung

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

einsetzen. Anschließend lassen sich auch n_1, n_2 und n_3 ohne d schreiben.
Die drei Punkte auf der Ebene berechnen wir, indem wir einmal $r = s = 0$, einmal $r = 1$ und $s = 0$ und einmal $r = 0$ und $s = 1$ setzen.
$r = s = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$r = 1$ und $s = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$r = 0$ und $s = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich also folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & 2n_3 & = & d \\
 & n_1 & & + & n_3 & = & d \\
 & & + \; n_2 & + & 4n_3 & = & d \\
\hline
\Leftrightarrow & & & & n_3 & = & \frac{d}{2} \\
 & n_1 & & & & = & d - n_3 = \frac{d}{2} \\
 & & n_2 & & & = & d - 4n_3 = -d
\end{array}$$

Eingesetzt in $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ergibt

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{d^2}{4} + d^2 + \frac{d^2}{4} & = & 1 \\
\Leftrightarrow & d^2 \frac{3}{2} & = & 1 \\
\Leftrightarrow & d & = & \pm\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad n_1 &= \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \\
n_2 &= -d = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\
n_3 &= \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad E = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}.$$

c) Zunächst werden die Ableitungen nach t und s ausgerechnet:

$$\begin{aligned}
f(t,s) &= \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
\frac{\partial}{\partial t} f(t,s) &= 2(1-t)(-1) + 2(2-2t+s)(-2) = -4s + 10t - 10 \\
\frac{\partial}{\partial s} f(t,s) &= 2(5-s)(-1) + 2(2-2t+s) = 4s - 4t - 6
\end{aligned}$$

Da die beiden Ableitungen gleich 0 sein sollen, ergibt sich ein 2×2 Gleichungssystem, dessen Lösung $t = \frac{16}{6}$ und $s = \frac{25}{6}$ ist. Der gesuchte Abstand ergibt sich schließlich durch:

$$\begin{aligned}
&\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{16}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{25}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{-10}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{150}}{6} = \frac{5}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Lösung 3.2

a)

$$\begin{aligned}
\langle x+y, x-y\rangle &= \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)(x_k-y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + y_k x_k - x_k y_k - y_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - y_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \\
&= \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 - \|y\|^2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2 + x_k^2 - 2x_k y_k + y_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2x_k^2 + 2y_k^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

Lösung 3.3

$$\begin{aligned}
& & |\langle x,y\rangle| &\leq \|x\|\,\|y\| \\
&\Leftrightarrow & |x_1y_1 + x_2y_2| &\leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2} \\
&\Leftrightarrow & (x_1y_1+x_2y_2)^2 &\leq (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \\
&\Leftrightarrow & x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 &\leq x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2 \\
&\Leftrightarrow & 2x_1y_1x_2y_2 &\leq x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 \\
&\Leftrightarrow & 0 &\leq (x_2y_1)^2 - 2(x_2y_1)(x_1y_2) + (x_1y_2)^2 \\
& & &= (x_2y_1 - x_1y_2)^2
\end{aligned}$$

Da wir nur Äquivalenzumformungen vorgenommen haben und die Ungleichung in der letzten Zeile wahr ist, haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung im $\mathbb{R}^2$ bewiesen.

Lösung 3.4 Die Polynome sind genau dann linear abhängig, wenn es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ und

$$\alpha(1+t) + \beta(2+t) + \gamma(2t) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha t + 2\beta + \beta t + 2\gamma t &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (\alpha + 2\beta) + (\alpha + \beta + 2\gamma)t &= 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für beliebige $t \in \mathbb{R}$ wahr sein soll, muss gelten

$$\alpha + 2\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -2\beta$$

und

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\beta - 2\gamma.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} -2\beta &= -\beta - 2\gamma \\ \Leftrightarrow \beta &= 2\gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -2\beta = -4\gamma$$

Mit $\gamma = 1$ ergibt sich also $\alpha = -4$ und $\beta = 2$. Zur Probe berechnen wir noch einmal

$$\begin{aligned} \alpha(1+t) + \beta(2+t) + \gamma(2t) &= -4(1+t) + 2(2+t) + 2t \\ &= -4 - 4t + 4 + 2t + 2t \\ &= 0 \end{aligned}$$

und sehen, dass die drei Polynome wirklich linear abhängig sind.

Lösung 3.5 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sind per Definition orthogonal genau dann, wenn

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0\,.$$

Wir rechnen wie folgt

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \cdot (\vec{x}+\vec{y}) - (\vec{x}-\vec{y}) \cdot (\vec{x}-\vec{y}) = \\ \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{y} = 4\vec{x} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

und erkennen: $\vec{x} \perp \vec{y} \;\Leftrightarrow\; ||\vec{x}+\vec{y}|| = ||\vec{x}-\vec{y}||$.

Geometrische Interpretation: Ein von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespanntes Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die beiden Diagonalen $\vec{x}+\vec{y}$ und $\vec{x}-\vec{y}$ gleich lang sind. (**Rechteck-Satz.**)

Für $n = 2$ läßt sich dieser Sachverhalt an Hand einer Skizze veranschaulichen.

Lösung 3.6

a)

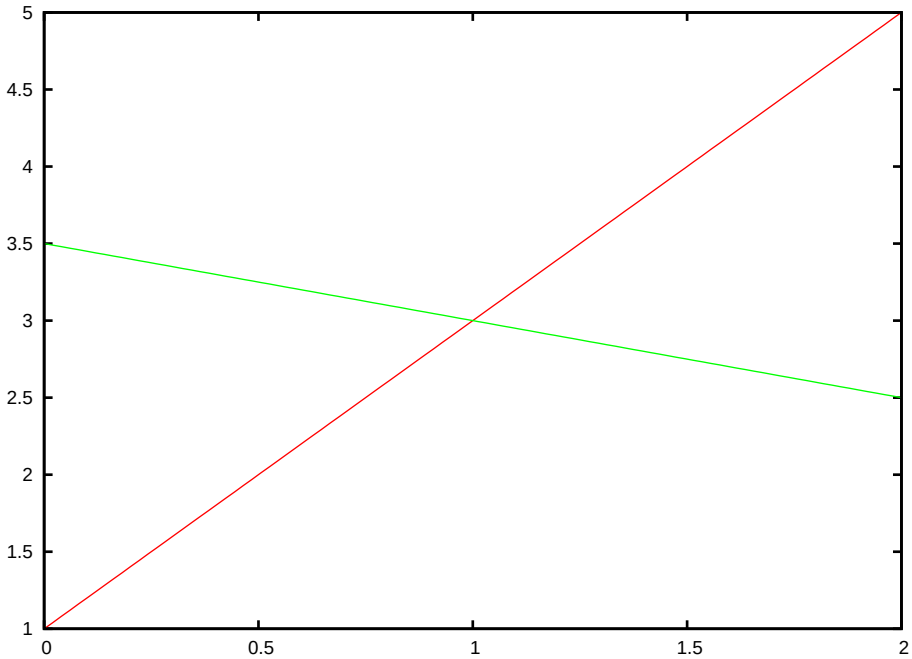
$$\begin{array}{rcrcll}
-\frac{2}{\sqrt{5}}x & + & \frac{1}{\sqrt{5}}y & = & \frac{1}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}x & + & \frac{2}{\sqrt{5}}y & = & \frac{7}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\
\hline
-2x & + & y & = & 1 & \\
x & + & 2y & = & 7 & |\cdot 2 \\
\hline
-2x & + & y & = & 1 & \\
 & & 5y & = & 15 & \Rightarrow\ y=3 \\
 & & & & & \Rightarrow\ 2x=3-1=2 \\
 & & & & & \Rightarrow\ x=1
\end{array}$$

$S=(1,3)$

<u>Skizze:</u>

$$G_1 \quad : \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -2x+y=1 \Leftrightarrow y=2x+1$$

$$G_2 \quad : \quad \frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y=\frac{7}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+y=\frac{7}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$



Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned}
& 2x+1=-1/2x+7/2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x+2=-x+7 \\
\Leftrightarrow\ & 5x=5 \ \Rightarrow\ x=1 \ \Rightarrow\ y=2\cdot 1+1=3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Wir wollen die Gerade zuerst in der Form

$$G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

angeben. Dazu setzen wir

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um Die Gerade in der Form

$$G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$$

schreiben zu können müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{rrcrcrl}
 & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d \\
2 & n_1 & + & & n_2 & = & d \\
\hline
 & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d \\
 & & - & 3 & n_2 & = & -d \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{d}{3} \\
 & & & & & & \quad\quad\;\; \Rightarrow \quad n_1 = d - 2n_2 = \frac{d}{3}
\end{array}$$

Weiterhin müssen n_1 und n_2 die Gleichung $n_1^2 + n_2^2 = 1$ erfüllen.

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{d^2}{9} + \frac{d^2}{9} = 1 \Leftrightarrow d^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h.

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

An dieser Form kann man nun auch leicht die Schnittpunkte mit den Achsen ablesen. Es sind die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 3.7

a) Da die Schnittmenge der Geraden G mit der Ebene E die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}^3$ ist, die sowohl auf der Gerade als auch in der Ebene liegen, können wir die Schnittmenge bestimmen, indem wir

$$x + \alpha r = y + \beta p + \gamma q$$

setzen und das sich daraus ergebene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha r_1 & - & \beta p_1 & - & \gamma q_1 & = & y_1 - x_1 \\ \alpha r_2 & - & \beta p_2 & - & \gamma q_2 & = & y_2 - x_2 \\ \alpha r_3 & - & \beta p_3 & - & \gamma q_3 & = & y_3 - x_3 \end{array}$$

lösen.

b) Möchte man den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene berechnen, so sind drei verschiedene Ergebnisse möglich:

   i) Gerade und Ebene schneiden sich nicht, das heißt die Gerade liegt parallel zur Ebene.

   ii) Die Gerade schneidet die Ebene, so dass die Schnittmenge aus einem Punkt besteht.

   iii) Die Gerade liegt in der Ebene, so dass die Schnittmenge die Gerade selber ist.

c) In diesem konkreten Fall sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ & 4\alpha & - & 2\beta & - & 3\gamma & = & -1 \\ & 3\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ \hline \Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ & & - & 6\beta & - & 3\gamma & = & -9 \\ & & - & 4\beta & - & 2\gamma & = & -6 \\ \hline \Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ & & & \beta & + & \frac{1}{2}\gamma & = & \frac{3}{2} \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma \\ \alpha &= 2 - \beta = 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma \end{aligned}$$

D.h. die Schnittmenge ist

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

und somit eine Gerade. Genauer gesagt handelt es sich dabei um die Gerade G, die lediglich mit einem anderen Stütz- und Richtungsvektor aufgeschrieben worden ist.

Lösung 3.8 Um zu zeigen, dass $V \times W$ ebenfalls ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, bemerken wir zunächst, dass $(v,w)+(\tilde{v},\tilde{w})$ und $\alpha(v,w)$ ebenfalls Elemente von $V \times W$ sind. Nun prüfen wir noch die Axiome eines Vektorraumes:

(A1)

$$\begin{aligned}((v,w)+(\tilde{v},\tilde{w}))+(\hat{v},\hat{w}) &= (v+\tilde{v},w+\tilde{w})+(\hat{v},\hat{w}) \\ &= (v+\tilde{v}+\hat{v},w+\tilde{w}+\hat{w}) \\ &= (v,w)+(\tilde{v}+\hat{v},\tilde{w}+\hat{w}) \\ &= (v,w)+((\tilde{v},\tilde{w})+(\hat{v},\hat{w}))\end{aligned}$$

(A2)

$$\begin{aligned}(v,w)+(\tilde{v},\tilde{w}) &= (v+\tilde{v},w+\tilde{w}) \\ &= (\tilde{v}+v,\tilde{w}+w) \\ &= (\tilde{v},\tilde{w})+(v,w)\end{aligned}$$

(A3) $(0,0) \in V \times W$ und

$$(v,w)+(0,0) = (v+0,w+0) = (v,w)$$

(A4) $(-v,-w) \in V \times W$ und

$$(v,w)+(-v,-w) = (v+(-v),w+(-w)) = (0,0)$$

(S1)

$$\alpha(\beta(v,w)) = \alpha(\beta v,\beta w) = (\alpha\beta v,\alpha\beta w) = (\beta\alpha v,\beta\alpha w) = \beta(\alpha v,\alpha w) = \beta(\alpha(v,w))$$

(S2)

$$1(v,w) = (1\cdot v,1\cdot w) = (v,w)$$

(D1)

$$\begin{aligned}\alpha((v,w)+(\tilde{v},\tilde{w})) &= \alpha(v+\tilde{v},w+\tilde{w}) \\ &= (\alpha(v+\tilde{v}),\alpha(w+\tilde{w})) \\ &= (\alpha v+\alpha\tilde{v},\alpha w+\alpha\tilde{w}) \\ &= (\alpha v,\alpha w)+(\alpha\tilde{v},\alpha\tilde{w}) \\ &= (\alpha(v,w))+(\alpha(\tilde{v},\tilde{w}))\end{aligned}$$

(D2)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(v,w) &= ((\alpha+\beta)v,(\alpha+\beta)w)\\ &= (\alpha v+\beta v,\alpha w+\beta w)\\ &= (\alpha v,\alpha w)+(\beta v,\beta w)\\ &= (\alpha(v,w))+(\beta(v,w))\end{aligned}$$

Lösung 3.9

a)

$$\lambda v_1+\mu v_2+\nu v_3+\xi v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcrcl}\text{I:} & \lambda & - & \mu & - & 2\nu & + & 2\xi & = & 0\\ \text{II:} & \lambda & + & 2\mu & + & 13\nu & + & 11\xi & = & 0\\ \text{III:} & \lambda & - & \mu & - & 2\nu & + & 2\xi & = & 0\end{array}\right\}$$

Man erkennt: I=III!

$$\text{I} \Leftrightarrow \lambda=\mu+2\nu-2\xi$$

Einsetzen in II:

$$\begin{aligned}& \mu+2\nu-2\xi+2\mu+13\nu+11\xi=0\\ \Leftrightarrow\ & 3\mu+15\nu+9\xi=0\\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\mu+5\nu+3\xi=0}\\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\mu=-5\nu-3\xi}\\ \Rightarrow\ & \lambda=-5\nu-3\xi+2\nu-2\xi\\ & \boxed{\lambda=-3\nu-5\xi}\end{aligned}$$

Wähle $\nu,\xi=1 \Rightarrow \mu=-8=\lambda$.

Also gilt z.B.: $(-8)v_1+(-8)v_2+v_3+v_4=0$!

(Direkt nachrechnen!) D.h. $v_1,\ldots,v_4$ sind linear abhängig.

b) ① Lineare Abhängigkeit:

$$\lambda w_1+\mu w_2+\nu w_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcl}\text{I:} & 2\lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0\\ \text{II:} & \lambda & - & \mu & + & 3\nu & = & 0\\ \text{III:} & & & \mu & - & \nu & = & 0\end{array}\right\}$$

$$\text{III} \Leftrightarrow \mu = \nu\,.$$

Einsetzen in II: $\lambda = \mu - 3\nu = \nu - 3\nu = -2\nu$

Einsetzen in I: $2\lambda = -\nu - 3\mu = -\nu - 3\nu = -4\nu \Rightarrow \lambda = -2\nu \quad \checkmark$

Wähle $\nu = 1 : \Rightarrow \mu = 1\,,\ \lambda = -2$

$$\Rightarrow (-2)w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{w_1 = \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}w_3}$$

D.h. $\{w_1, w_2, w_3\}$ sind linear abhängig und bilden daher sicher keine Basis.

② Es gilt:

$$\begin{aligned} w_2 \times w_3 = w_2 \wedge w_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1+3 \\ 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{w_2, w_3\}$ sind linear unabhängig.

Denn sonst: $\exists \alpha \neq 0$ mit $w_3 = \alpha w_2$

$$\Rightarrow w_2 \times w_3 = w_2 \times (\alpha w_2) = \alpha(w_2 \times w_2) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen ① gilt also: $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{w_2, w_3\}$.

$\operatorname{span}\{w_2, w_3\}$ ist eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $w_2 \times w_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor!

Es gilt:

$$\underbrace{w_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(w_2 \times w_3)}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = -4 + 4 + 0 = 0$$

$\Rightarrow w_1 \in$ dieser Ebene E, d.h. $w_1 \in \operatorname{span}\{w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

Die Ebene E ist beschrieben durch:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (w_2 \times w_3) = 0\}\,,$$

d.h. E enthält alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die senkrecht (=orthogonal) zu $w_2 \times w_3$ sind.

Der Vektor $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt nicht in E, wegen

$$z \cdot (w_2 \times w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 + 8 + 50 = 60 > 0\,!$$

Daher lässt sich $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ <u>nicht</u> als Linearkombination von w_2 und w_3 und wegen ① auch nicht als Linearkombination von w_1, w_2 und w_3 darstellen.

c) ① <u>Linear unabhängig:</u>

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I:} & \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0 \\ \text{II:} & 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ \text{III:} & 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \end{array} \right\}$$

I'=I	λ	$+$	3μ	$+$	ν	$=$	0
II'=II-2I:		$-$	4μ	$-$	ν	$=$	0
III'=III-3I:		$-$	8μ	$-$	ν	$=$	0
I"=I'	λ	$+$	3μ	$+$	ν	$=$	0
II"=II':		$-$	4μ	$-$	ν	$=$	0
III"=III'-2II':					ν	$=$	0

$$\nu = 0 \;\Rightarrow\; \text{(Einsetzen in II' !)}\; \mu = 0 \;\Rightarrow\; \text{(Einsetzen in I" !)}\; \lambda = 0$$

D.h. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sind linear unabhängig.

② Erzeugen $\mathbb{R}^3$: $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & x_2 \\ 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & x_3 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ & - & 4\mu & - & \nu & = & x_2 - 2x_1 \\ & - & 8\mu & - & \nu & = & x_3 - 3x_1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ & - & 4\mu & - & \nu & = & x_2 - 2x_1 \\ & & & & \nu & = & x_3 - 3x_1 - 2x_2 + 4x_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-4)\mu = \nu + x_2 - 2x_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_2 - 2x_1 = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3)$$

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda & = & x_1 - 3\mu - \nu \\ & & = & x_1 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \Rightarrow & & = & -\frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ & & = & \frac{1}{4}(-3x_1 + 5x_2 - x_3) \\ & & = & \left(-\frac{1}{4}\right)(3x_1 - 5x_2 + x_3) \end{array}$$

D.h. $\{u_1, u_2, u_3\}$ erzeugen auch $\mathbb{R}^3$ und mit ① zusammen bilden sie daher auch eine Basis!

③ <u>Koordinaten des geg. Vektors bzgl. dieser Basis:</u>

Wollen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ darstellen, so setzen wir in ② $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\lambda = -\frac{1}{4}(3 - 5 + 1) = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4}(1 + 1 - 1) = \frac{1}{4}, \quad \nu = 1 - 2 + 1 = 0.$$

D.h. bzgl. der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 3.10

a) Nein!

$U_0 := \{(1,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, da $(0,0,0) \notin U_0$.

Aber $U_0 = (1,0,0) + \overline{U_0} = (1,0,0) + \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist affiner Unterraum!

b) Ja!

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

U_1 ist Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$a \in U_1 \;\Rightarrow\; \lambda a \in U_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$a,b \in U_1 \;\Rightarrow\; a+b \in U_1.$$

c) Ja!

$$U_2 = \{(x,2x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

wie b)!

d) Ja!

$$\begin{aligned} U_3 &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid \frac{2}{\sqrt{30}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{30}}x_2 - \frac{5}{\sqrt{30}}x_3 = 0\} \end{aligned}$$

U_3 ist also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält.

e) Nein!

$$U_4 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\} \;\Rightarrow\; (0,0,0) \notin U_4\,!$$

Aber U_4 ist affiner UR:

$$U_4 = (1,3,0) + \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}\,!$$

Lösung 3.11

$$\begin{aligned}
p \in \mathscr{P}^k : \quad & p(t) = a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
p \in U : \quad & p(t) = a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
& p(5) = 5^k a_k + 5^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 5a_1 + a_0 = 0 \\
& p(7) = 7^k a_k + \ldots + 7a_1 + a_0 = 0
\end{aligned}$$

<u>Behauptung:</u> U ist Untervektorraum von $\mathscr{P}^k$.

<u>Nachweis:</u>

Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraumes V ein Untervektorraum ist, genügt es,

① $0 \in U \subset V$,

② $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in U$ und

③ $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$

zu zeigen,denn
(A1),(A2) gelten wegen ③ und $U \subset \mathscr{P}^k$,
(S1),(S2) gelten wegen ② und $U \subset \mathscr{P}^k$,
(A3) gilt wegen ①,
(A4) folgt aus ③ und ② mit $\lambda = -1$ und
(D1), (D2) folgen aus ②, ③ und $U \subset \mathscr{P}^k$.

① $p_0(t) := 0 \cdot t^k + \ldots + 0 \cdot t + 0$, das Nullpolynom ist $\in U$!

Denn: $p_0 \in \mathscr{P}^k$ und $p_0(5) = p_0(7) = 0$!

② Es sei $p \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \lambda p \in U$. Denn:

$$\begin{aligned}
p(t) &= a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
p(5) &= \ldots = p(7) = \ldots = 0 \quad \text{(s. oben)} \\
\lambda p(t) &= (\lambda a_k) t^k + \ldots + (\lambda a_1) t + \lambda a_0 \quad \in \mathscr{P}^k \\
(\lambda p)(5) &= 5^k \lambda a_k + \ldots + 5\lambda a_1 + \lambda a_0 \\
&= \lambda \underbrace{(5^k a_k + \ldots + 5a_1 + a_0)}_{=0} = 0, \\
(\lambda p)(7) &= 0 \quad \text{entsprechend}
\end{aligned}$$

③ $p \in U$, $q \in U \;\Rightarrow\; p+q \in U$. Denn:

$$\begin{aligned}
p(t) &= a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
q(t) &= b_k t^k + \ldots + b_1 t + b_0 \\
p(5) = 0 &\Leftrightarrow 5^k a_k + \ldots + 5a_1 + a_0 = 0 \\
q(5) = 0 &\Leftrightarrow 5^k b_k + \ldots + 5b_1 + b_0 = 0 \\
(p+q)(t) &= (a_k+b_k)t^k + \ldots + (a_1+b_1)t + a_0 + b_0 \quad \in \mathscr{P}^k, \text{ denn} \\
(p+q)(5) &= (a_k+b_k)5^k + \ldots + (a_1+b_1)5 + a_0 + b_0 \\
&= \underbrace{5^k a_k + \ldots + 5a_1 + a_0}_{=0} + \underbrace{5^k b_k + \ldots + 5b_1 + b_0}_{=0} = 0 \\
(p+q)(7) &= 0 \quad \text{entsprechend}
\end{aligned}$$

Lösung 3.12

① Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda p_1(x) + \mu p_2(x) + \nu p_3(x) \\
&= (\lambda + 3\mu + \nu)x^2 + (2\lambda + 2\mu + \nu)x + (3\lambda + \mu + 2\nu)
\end{aligned}$$

Da die Funktionen $1 = x^0$, $x = x^1$, x^2 linear unabhängig sind (siehe Vorlesung bzw. Skript!), folgt:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0 \\ 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Denn dies ist dasselbe lineare Gleichungssystem wie in Aufgabe 3.9 c)!
Also sind die Polynome $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ linear unabhängig.
Um zu zeigen, dass sie eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bilden, müssen wir noch zeigen, dass sich jedes quadratische Polynom $q(x) = ax^2 + bx + c$ als Linearkombination von $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ schreiben lässt. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & a \\ 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & b \\ 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & c, \end{array}$$

welches man wie in Aufgabe 3.9 c) löst:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left(-\frac{1}{4}\right)(3a - 5b + c) \\
\mu &= \frac{1}{4}(a + b - c) \\
\nu &= a - 2b + c.
\end{aligned}$$

Also bilden $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ eine Basis!

Nun rechnet man noch nach, dass

$$\begin{array}{rcccl} p(x) & = & 5x^2+5x+6 & = & p_1(x)+p_2(x)+p_3(x) \\ & & & = & 1\cdot p_1(x)+1\cdot p_2(x)+1\cdot p_3(x) \\ \text{bzw.} & & & & \\ q(x) & = & 3x+7 & = & 2\cdot p_1(x)-p_2(x)+p_3(x) \end{array}$$

gilt.

Also $p(x)$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$

und $q(x)$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$.

② Möglichkeit 2:

(*) $0 = \lambda p_1(x) + \mu p_2(x) + \nu p_3(x)$ soll $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten.

Insbesondere gilt es für $x = 0$

$$\Rightarrow\ 0 = 3\lambda + \mu + 2\nu\,.$$

Außerdem impliziert (*):

$$0 = \lambda p_1'(x) + \mu p_2'(x) + \nu p_3'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$\Rightarrow$ ($x = 0$ einstzen)

$$0 = 2\lambda + 2\mu + \nu$$

und schließlich:

$$0 = \lambda p_1''(x) + \mu p_2''(x) + \nu p_3''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$\Rightarrow$ ($x = 0$ einstzen)

$$0 = 2\lambda + 6\mu + 2\nu = 2(\lambda + 3\mu + \nu)\,.$$

Damit landet man wieder bei obigem linearem Gleichungssystem von ① und kann fortfahren wie in ①!

Beachte: Hierbei haben wir <u>nicht</u> benutzt, dass $1, x, x^2$ eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bildet!

Lösung 3.13

a) <u>Nein!</u> Denn es gilt z. B.

$$j\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1 < 0$$

Damit ist das Axiom (G1) verletzt. Aber die Eigenschaften (G2) - (G4) gelten.

b) Ja! Es sind die einzelnen Axiome für beliebige x, y, z aus $\mathbb{R}^2$ zu überprüfen:

(G1)

$$k(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Man erkennt nun leicht, dass die Addition mehrerer nicht-negativer Werte genau dann Null ist, wenn alle Werte gleich Null sind. Hierbei ist zu beachten, dass der letzte Term $(x_1 - x_2)^2$ genau dann Null ist, wenn $x_1 = x_2$, d.h. nicht nur wenn $x_1 = x_2 = 0$. Die geforderte Eigenschaft, dass $k(x,x) = 0$ g.d.w. $x = 0$ wird hier von den beiden restlichen Termen getragen, da $x_1^2 = 0$ g.d.w. $x_1 = 0$ und $x_2^2 = 0$ g.d.w. $x_2 = 0$, so dann $k(x,x) = 0$ g.d.w $x_1 = x_2 = 0$.

(G2) $k(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = 2y_1x_1 + 2y_2x_2 - y_1x_2 - y_2x_1 = k(y,x)$

(G3) $k(x+y,z) = 2(x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 - (x_1+y_1)z_2 - (x_2+y_2)z_1 = 2x_1z_1 + 2y_1z_1 + 2x_2z_2 + 2y_2z_2 - x_1z_2 - y_1z_2 - x_2z_1 - y_2z_1 = k(x,z) + k(y,z)$

(G4) $k(\alpha x,y) = 2\alpha x_1y_1 + 2\alpha x_2y_2 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1 = \alpha k(x,y)$

Lösung 3.14 Ein Tetraeder sei durch die Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt, wobei das durch a und b definierte Dreieck seine Grundfläche bilden soll. Dann gilt $A = \frac{1}{2}|a \times b|$, denn der Betrag des Kreuzproduktes ist gerade die Fläche des von a, b aufgespannten Parallelogramms. Demnach ist die Hälfte hiervon die Fläche des gesuchten Dreiecks.
Die Höhe des Tetraeders ist nun die Projektion von c auf einen Vektor, der senkrecht auf a und b steht und die Länge 1 hat. Ein solcher Vektor ist gerade durch das normierte Kreuzprodukt $\dfrac{a \times b}{|a \times b|}$ gegeben. Die Projektion berechnet sich dann durch das Skalarprodukt, d.h. es gilt $h = c \cdot \dfrac{a \times b}{|a \times b|} = \dfrac{a \times b}{|a \times b|} \cdot c$. Damit folgt insgesamt:

$$V(T) = \frac{1}{3}A \cdot h = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}|a \times b|\frac{a \times b}{|a \times b|} \cdot c\right| = \frac{1}{6}|(a \times b) \cdot c|$$

Der Betrag muss verwendet werden, wenn nicht klar ist, ob die Vektoren ein Rechtssystem bilden. Tun sie es nicht, könnte das Produkt negativ werden.

In unserem konkreten Fall seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$a \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann

$$(a \times b) \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2,$$

also ist das gesuchte Volumen $V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

Lösung 3.15

a) Ein eindimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Gerade durch den Ursprung, d.h.

$$G = \{\lambda r \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

für ein $r \in \mathbb{R}^3$, wobei $r \neq 0$ sein muss.
Ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Ebene durch den Ursprung, d.h.

$$E = \{\lambda r + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

mit $r, q \in \mathbb{R}^3$, r und q linear unabhängig.

b) Um zu zeigen, dass eine beliebige Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ein Untervektorraum ist, müssen wir zeigen, dass

① $U \neq \emptyset$,

② $p \in U, \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda p \in U$ und

③ $p, q \in U \quad \Rightarrow \quad p + q \in U$.

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, werden alle anderen Vektorraum-Eigenschaften automatisch von V auf die Teilmenge U übertragen. Seien nun U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Wir zeigen nun für $U = U_1 \cap U_2$ diese drei Eigenschaften.

① Da U_1, U_2 Untervektorräume sind, ist $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$, also $0 \in U_1 \cap U_2$, also ist $U_1 \cap U_2$ nicht leer.

② Sei $p \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt $\lambda p \in U_1$, da $p \in U_1$ und U_1 ein Untervektorraum. Auf gleiche Weise folgt $\lambda p \in U_2$ und beide Folgerungen zusammen ergeben $\lambda p \in U_1 \cap U_2$.

③ Seien $p, q \in U_1 \cap U_2$ so gilt

$$p \in U_1, q \in U_1 \quad \Rightarrow \quad p + q \in U_1$$

und

$$p \in U_2, q \in U_2 \quad \Rightarrow \quad p + q \in U_2.$$

Daraus folgt $p + q \in U_1 \cap U_2$.

c) Eindimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind im Allgemeinen Geraden, die durch den Ursprung gehen. Zweidimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen, in denen der Ursprung enthalten ist. Betrachtet man also den Schnitt eines eindimensinalen Untervektorraumes mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, so können zwei Fälle auftreten:

   i) Die Untervektorräume schneiden sich in einem Punkt.

   ii) Der eindimensionale Untervektorraum ist im zweidimensionalen Untervektorraum enthalten.

   Bemerkung: Betrachtet man im Allgemeinen den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ so kann noch ein dritter Fall auftreten. Und zwar kann die Schnittmenge leer sein, wenn Gerade und Ebene parallel zueinander liegen. Dies kann hier jedoch nicht passieren, da die Null in jedem Untervektorraum enthalten sein muss.

Lösung 3.16

a)

$$\begin{aligned}
\|x-y\|_g^2 &= g(x-y,x-y) \\
&= g(x-y,x) - g(x-y,y) \\
&= g(x,x) - g(y,x) - g(x,y) + g(y,y) \\
&= g(x,x) - 2g(x,y) + g(y,y) \\
&= \|x\|_g^2 - 2g(x,y) + \|y\|_g^2
\end{aligned}$$

b) Wählt man für $g(\cdot,\cdot)$ das Euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so läßt sich die Gleichung schreiben als

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

Gilt nun $x \perp y$, so ist $\langle x,y\rangle = 0$, d.h.

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dies entspricht dem Satz des Pythagoras.
Wählt man jedoch beliebige x,y so kann man die Gleichung umschreiben zu

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(\alpha) + \|y\|^2,$$

wobei α der von den Vektoren x und y eingeschlossene Winkel ist. Dies entspricht nun dem Kosinussatz.

Bemerkung: In der Klausur würde eine der beiden Interpretationen ausreichen.

Lösung 3.17 a) Wir berechnen eine Parameterdarstellung von E wie folgt:

$$\begin{aligned} E: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur <u>Probe</u> rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{matrix} \right\} \text{ liefert } \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_1 \,. \\ \left\{ \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{matrix} \right\} \text{ liefert } \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = P_2 \,. \\ \left\{ \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix} \right\} \text{ liefert } \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0 \,. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen einen Normalenvektor an E mit Hilfe des Kreuzproduktes der beiden Richtungsvektoren von E.

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+7 \\ -8-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} .$$

Zur <u>Probe</u> rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 - 8 + 8 = 0, \quad (\checkmark) \\ \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} &= 0 - 56 + 56 = 0. \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

Da

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8x_2 - 8x_3$$

und wir wissen, dass $P_0 \in E$, also

$$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = 16$$

ist die Ebene E geben durch

$$E \;=\; \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 + x_3 = -2\}.$$

Bemerkung: Es war in der Aufgabenstellung nicht gefordert, dass $\vec{n}$ normiert ist. Natürlich ist die Lösung $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\}$ genauso richtig.

Lösung 3.18 Wir lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem:

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I:} & -\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \\ \text{II:} & -\lambda & & & - & 3\nu & = & 0 \\ \text{III:} & & - & 4\mu & - & 20\nu & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \text{II} \;&\Leftrightarrow\; \nu = -\frac{1}{3}\lambda \;\Leftrightarrow\; \lambda = -3\nu\,. \\ \text{III} \;&\Leftrightarrow\; \nu = -\frac{1}{5}\mu \;\Leftrightarrow\; \mu = -5\nu\,. \end{aligned}$$

Einsetzen von II und III in I liefert:

$$0 = 3\nu - 5\nu + 2\nu. \quad \checkmark$$

Also ist ν „frei“ wählbar. $\nu = 1$ liefert: $\lambda = -3$, $\mu = -5$. Damit erhalten wir

$$\Rightarrow\; (-3)\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle rechnen wir noch

$$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$

Lösung 3.19

a) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt v und w sind linear abhängig handelt es sich um eine Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor v (nämlich alle Vielfache von v).

b) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt v und w sind linear abhängig und $\|w\| = 1$ handelt es sich um zwei Vektoren $w = \frac{v}{\|v\|}$ und $w = -\frac{v}{\|v\|}$.

c) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ handelt es sich um die Ebene durch den Ursprung, auf der der Vektor v senkrecht steht.

d) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ und $\|w\| = 1$ handelt es sich um einen Kreis mit Radius 1 in der Ebene durch den Ursprung, die senkrecht zum Vektor v liegt.

Lösung 3.20 a) Ja! Im $\mathbb{R}^2$ liegen alle zu einem gegebenen Vektor $\vec{z} \neq 0$ orthogonalen Vektoren auf einer Geraden durch den Ursprung, sind also Vielfache desselben Richtungsvektors. (Siehe etwa die entsprechende Darstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.)
b) Nein! Im $\mathbb{R}^3$ liegen alle zu einem gegebenen Vektor $\vec{z} \neq 0$ orthogonalen Vektoren in einer Ebene durch den Ursprung, in dieser gibt es also zwei Richtungsvektoren, die linear unabhängig sind.
Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \qquad \vec{x} \perp \vec{y} : \ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{x} \perp \vec{z} : \ \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \quad \checkmark$$

$\vec{y}$, $\vec{z}$ linear unabhängig: $\lambda \vec{y} + \mu \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 0, \ \mu = 0!$

c) Ja!

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \vec{x} \perp \vec{z} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{z} = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{y})}_{=0} + \beta \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{z})}_{=0} = 0 \Rightarrow \text{Behauptung!} \quad \checkmark$$

d) Ja! Wegen $\dim V = k$ und $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linear unabhängig gilt:

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = V,$$

d. h. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ ist eine Basis von V .
Beachte: Es gilt immer $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset V$.
Zu zeigen ist also nur $V \subset \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.
e) Nein!

$$\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n \in V \text{ linear abhängig}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \alpha_1 \vec{w}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{w}_n = 0 \in V$$

$$\text{und mindestens ein } \alpha_i \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Wäre $\alpha_1 \neq 0$, wäre die Behauptung richtig:

$$\vec{w}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{w}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \vec{w}_n.$$

Im Allgemeinen ist dies aber nicht richtig:

$$V = \mathbb{R}^3, \ n = 3: \ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig:

$$0 \cdot \vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 + (-1)\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aber $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist <u>nicht</u> als Linearkombination von $\vec{w}_2, \vec{w}_3$ darstellbar:

$$\vec{w}_1 = \alpha\vec{w}_2 + \beta\vec{w}_3 \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 0 \quad \text{f} \\ 0 & = & \alpha + 4\beta \\ 0 & = & 0 \end{array} \qquad \text{Widerspruch!}$$

Lösung 3.21

a) Ja! Wäre die Teilmenge der Vektoren linear abhängig, so wäre es auch die gesamte Menge. Die Teilmenge muss also auch linear unabhängig sein.

b) Nein! Gegenbeispiel: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind linear abhängig, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ jedoch linear unabhängig.

c) Ja! In der Vorlesung gibt es einen Satz der folgendes besagt: Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ zwei verschiedene Basen eines Vektorraumes V, so gilt $n = m$. Ist n endlich, so ist also auch m endlich.

d) Nein! Zwei Vektoren der Form (α, α, α) sind immer linear abhängig (also auch drei). Da eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aber aus drei linear unabhängigen Vektoren bestehen muss, kann sie nie nur aus Vektoren der Form (α, α, α) bestehen.

e) Nein!

f) Nein! Den Vektor $(0,0,0)$ kann man nicht zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ erweitern.

g) Ja! Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\alpha \neq 0$ bildet zum Beispiel eine Basis des $\mathbb{R}^3$, denn es handelt sich dabei um drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Lösung 3.22

a) i) Ja! Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, so dass ihr Kreuzprodukt einen Vektor liefert, der senkrecht auf den beiden steht.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind somit linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

ii) Nein, denn diese beiden Vektoren sind linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) i) Ja! Egal welchen der drei Vektoren man streicht, die anderen beiden Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

ii) Nein, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Egal welchen Vektor man streichen würde, die anderen beiden sind linear abhängig und bilden somit keine Basis des $\mathbb{R}^2$.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Lösung 4.1 Wir lösen diese Aufgabe mittels des Gauß-Jordan-Algorithmus. Dieser ist eine Erweiterung des Gauß-Algorithmus. Anstatt die Matrix in eine Dreieckform zu bringen wird die Matrix in Diagonalform umgewandelt. Zusätzlich setzen wir als rechte

Seite die Einheitsmatrix. Dann gilt:

$$
\begin{array}{ccc|ccc|cc}
2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot\frac{1}{2} & \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot(-4) & \cdot(2) \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & \hookleftarrow + & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdot\frac{1}{3} & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot(-9) & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & \cdot(1) & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{6}{2} & 1 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot -\frac{3}{2} & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Probe:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Lösung 4.2 Man muss nur nachweisen, dass beide Produkte $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ und $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ die Einheitsmatrix ergeben.
Aufgrund der Assoziativität des Matrizenprodukts ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1} \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist das Produkt invertierbarer Matrizen also invertierbar.
Lösung 4.3 Lösung ist Einzeiler: $\det L = \det L^T$.

oder:
Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\det L = \det \tilde{L},$$

wenn $\tilde{L}$ durch elementare Umformungen aus L gewonnen wurde. Sofern wir also die Gestalt von L durch elementare Umformungen verändern, ändern wir nicht den Wert der Determinante.
Im ersten Schritt addieren wir zur i-ten Zeile von L das λ_i-fache der ersten Zeile, wobei $\lambda_i = -\frac{l_{i1}}{l_{11}}$. Starten wir bei der zweiten Zeile und führen dies durch bis zur n-ten Zeile, so erhalten wir die Matrix

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & 0 \\ 0 & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt addieren wir zur i-ten Zeile das λ_i-fache der zweiten Zeile, wobei $\lambda_i = -\frac{l_{i2}}{l_{22}}$. Machen wir dies für $i = 3, \dots n$, so erhalten wir die Matrix

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & 0 \\ 0 & l_{22} & & & \\ 0 & 0 & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formen wir die Matrix weiter auf diese Art um, so erhalten wir schließlich die Matrix

$$L^{(n-1)} = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da wir lediglich elementare Umformungen vorgenommen habe, gilt

$$\begin{aligned} \det L &= \det L^{(n-1)} \\ &= l_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & l_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & l_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn} \underbrace{\det \mathbb{1}}_{=1} \\ &= l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn} \end{aligned}$$

Damit dies funktioniert, müssen $l_{11}, \dots l_{n-1,n-1} \neq 0$ sein, denn durch diese wurde dividiert. Wenn jedoch z.B. $l_{ii} = 0$, dann sind die Zeilen 1 bis i linear abhängig, da sie alle nur in den ersten $i-1$ Spalten Nicht-Null-Einträge haben. Damit ist die Determinante Null, und die Formel stimmt auch in diesem Fall.

Lösung 4.4

a) Die Matrixdarstellung einer Drehung um den Ursprung, um einen Winkel α ist gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det D &= \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Die Matrixdarstellung der Spiegelung lautet

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T = \begin{pmatrix} 1-2n_1n_1 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2n_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det S &= (1-2n_1n_1)(1-2n_2n_2) - (-2n_1n_2)^2 \\ &= 1 - 2n_1^2 - 2n_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 4n_1^2n_2^2 \\ &= 1 - 2\underbrace{(n_1^2+n_2^2)}_{=1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Lösung 4.5

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Punktspiegelung am Ursprung in $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

b) Wir zeigen die Eigenschaften definiert in der Vorlesung:

(i)

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= \begin{pmatrix} -\alpha x \\ -\alpha y \\ -\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(x,y,z) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) &= \begin{pmatrix} -x_1-x_2 \\ -y_1-y_2 \\ -z_1-z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \\ &= f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

c) Die Matrixdarstellung der Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ lautet

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{aligned}
f(1,2,3) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
f(1,1,1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
f(1,2,4) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist auf die Matrixdarstellung bezüglich der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ebenfalls gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.6

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Projektion auf eine Gerade gegeben ist durch

$$f(x) = x - (x \cdot n)n,$$

wobei n der Normalenvektor der Geraden ist. In unserem Fall gilt

$$n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ f(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(()A) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ax = 0\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& 0 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_2 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \operatorname{Ker}(()A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(()A) &= \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \,|\, \text{ es gibt } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } Ax = b \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& b_1 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 &=& b_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& b_1 \\ 0 &=& b_2 - 2b_1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \operatorname{Bild}(()A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \,|\, b_2 - 2b_1 = 0 \right\} = G \end{aligned}$$

Alternativ kann man das Bild von A auch wie folgt berechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Bild}(()A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\} = G$$

Lösung 4.7

a)

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \cdot z &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&= x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3z_2y_1 - x_1y_3z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 \\
&= \begin{pmatrix} z_2x_3 - z_3x_2 \\ z_3x_1 - z_1x_3 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (z \wedge x) \cdot y \\
&= \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (y \wedge z) \cdot x
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} -x- \\ -y- \\ -z- \end{pmatrix} &\overset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} z_1 \underbrace{(x_2y_3 - x_3y_2)}_{(x \wedge y)_1} \\
&\quad + z_2 \underbrace{(-1)(x_1y_3 - x_3y_1)}_{(x \wedge y)_2} \\
&\quad + z_3 \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)}_{(x \wedge y)_3} \\
&= z \cdot (x \wedge y)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow (z \wedge x) \cdot y = \det \begin{pmatrix} -z- \\ -x- \\ -y- \end{pmatrix} \text{ und } (y \wedge z) \cdot x = \det \begin{pmatrix} -y- \\ -z- \\ -x- \end{pmatrix}
$$

Aus

$$
\det \begin{pmatrix} -x- \\ -y- \\ -z- \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -z- \\ -x- \\ -y- \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -y- \\ -z- \\ -x- \end{pmatrix}
$$

folgt nun die Behauptung.

Lösung 4.8 Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Fläche des von x und y aufgespannten Parallelogramms gegeben ist durch

$$\det\begin{pmatrix} -x- \\ -y- \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Fläche des von x und y aufgespannten Dreiecks gegeben ist durch

$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -x- \\ -y- \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.9 $\operatorname{Ker}((A)) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\}$

$$\begin{array}{rrcrcrcl|lr}
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & \cdot(-\frac{1}{3}) & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & & \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & \cdot(-1) & \cdot 3 \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & & \hookleftarrow + \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & & \\
 & & & & & 0 & = & 0 & & \\
 & & & & & 0 & = & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & x_2 & = & -2x_3 \\
 & 3x_1 & = & -x_2 - 5x_3 = -3x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_3
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}((A)) = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\operatorname{Bild}((A)) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^4 \,|\,$ es gibt ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $A\vec{x} = \vec{b}\}$

$$\begin{array}{rrcrcrcl|lr}
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & \cdot(-\frac{1}{3}) & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & b_2 & \hookleftarrow + & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & b_3 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_4 & & \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_2 - \frac{1}{3}b_1 & \cdot(-1) & \cdot 3 \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_3 - \frac{1}{3}b_1 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_4 & & \hookleftarrow + \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_2 - \frac{1}{3}b_1 & & \\
 & & & & & 0 & = & b_3 - b_2 & & \\
 & & & & & 0 & = & b_4 + 3b_2 - b_1 & &
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} b_3 &= b_2 \\ b_4 &= -3b_2 + b_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Bild}\,((A)) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ -3b_2 + b_1 \end{pmatrix} \middle| \, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Spalten der Matrix A sind linear abhängig, denn die letzte Spalte läßt sich als Linearkombination der ersten beiden Spalten schreiben:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen der Matrix sind ebenfalls linear abhängig, da die zweite und die dritte Zeile identisch sind.

Lösung 4.10

a) Die Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 16 \\ -3 & 8 & 3 & 22 \end{array} \right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-2) & \cdot 1 \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 6 & 2 & 18 \end{array} \right)}_{=L^{(1)}A} \begin{array}{|c} \cdot(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)}_{=L^{(2)}L^{(1)}A=R}$$

(Die Bezeichnungen $L^{(2)}, L^{(1)}, R$ wurden hier für Teil b) schonmal notiert.)
Rückwärtseinsetzen ergibt nun:

$$\begin{aligned} &-2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ &6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

b) Im ersten Gauß-Schritt wurde die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur zweiten addiert, demnach steht in der Matrix $L^{(1)}$ in der zweiten Zeile in der ersten Spalte eine -2 und in der zweiten Spalte eine 1. Analog steht in der dritten Zeile der ersten Spalte eine 1, da die erste Zeile mit 1 multipliziert wird und zur dritten addiert wird. Analoges gilt für $L^{(2)}$ und wir erhalten

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind:

$$\left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1}\left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $R = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ haben wir schon bei der Gauß-Elimination berechnet. Multiplizieren wir von links mit L erhalten wir wieder A:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} = A$$

d) Vorwärtseinsetzen: $Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &y_1 = -4, \\ &2y_1 + y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = 24, \\ &-y_1 + y_2 + y_3 = 22 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen: $Rx = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &-2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ &6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

Lösung 4.11

a)

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f(1,0) &= \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1\,;\ \text{also } f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\,. \\ f(0,1) &= \begin{pmatrix} 0+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Nach der „Regel“:
„In den Spalten einer Matrix stehen die Koeffizienten der Bilder $f(\vec{v}_j)$ der Basisvektoren $\vec{v}_j,\ j=1,\cdots,n$ aus V bzgl. der Basis $\{\vec{w}_i\}\ i=1,\cdots,m$ von W, wobei $f:V\to W$ eine lineare Abbildung ist.“
erhalten wir:

$$A_f=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\text{ und } f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
A\vec{e}_1 &= A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_1\\
&= \text{1te Spalte von } A \quad \checkmark\\
A\vec{e}_2 &= A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\
&= \text{2te Spalte von } A \quad \checkmark
\end{aligned}$$

<u>Beachte:</u>

$$\begin{aligned}
A\vec{e}_1 &= \vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2\,,\\
A\vec{e}_2 &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2\,!
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda-\mu=0\\ \lambda+\mu=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{I}\\ \text{II}\end{matrix}$$

Addition/Subtraktion liefert $2\lambda=0:$ I+II, $2\mu=0:$ II-I

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2\lambda=0\\2\mu=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\{\lambda=\mu=0\}$$

Also sind $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Basis! (wegen $\dim\mathbb{R}^2=2$!)

Wir zeigen (trotzdem für später):
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ erzeugen $\mathbb{R}^2$.
Dazu: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ gegeben.

Bestimme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = x_1 + x_2 \\ 2\beta = x_2 - x_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \beta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \end{array} \right\}$$

D.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit erzeugen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch $\mathbb{R}^2$!

Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1,1) &= \begin{pmatrix} -1+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \; B_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ = Matrixdarstellung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Denn $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt in der Basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ die Darstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2$ und es gilt

$$\begin{aligned} B_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{u}_1 + (-1) \cdot \vec{u}_2 \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \vec{u}_2 = 0 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 4.12

a)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

<u>Zur Probe:</u>

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = (-1)\vec{e}_1 \\ &= \text{1te Spalte von } A \end{aligned}$$

entsprechend gilt:

$$A\vec{e}_2 = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -\vec{e}_2 = \text{ 2te Spalte von } A$$

$$A\vec{e}_3 = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -\vec{e}_3 = \text{ 3te Spalte von } A$$

b) Nein! Sei etwa $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis, dann gilt

$$f(v_1) = -1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3.$$

$\Rightarrow$ erste Spalte der Matrixdarstellung: $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Geht man für v_2 und v_3 analog vor, so erhalten wir dieselbe Matrixdarstellung.

c) $p \in \mathscr{P}^3$ besitzt bezüglich der Basis $e_0(t) = 1, e_1(t) = t, e_2(t) = t^2, e_3(t) = t^3$ die eindeutige Darstellung

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ &= a_0 e_0(t) + a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t) + a_3 e_3(t)\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (t+r) &= t + r \\ (t+r)^2 &= t^2 + 2rt + r^2 \\ (t+r)^3 &= t^3 + 3rt^2 + 3r^2 t + r^3 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} p(t+r) &= a_0 + a_1(t+r) + a_2(t+r)^2 + a_3(t+r)^3 \\ &= (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3) + (a_1 + 2ra_2 + 3r^2 a_3)t \\ &\quad + (a_2 + 3ra_3)t^2 + a_3 t^3 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} p(t+r) &= (a_0+a_1r+a_2r^2+a_3r^3)e_0(t) \\ &\quad +(a_1+2ra_2+3r^2a_3)e_1(t) \\ &\quad +(a_2+3ra_3)e_2(t) \\ &\quad +a_3e_3(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Matrixdarstellung von $f(p)(t) = p(t+r), r \in \mathbb{R}$ fest bezüglich der Basis $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3\}$:

$$\begin{aligned} f(t \mapsto 1) &= (t \mapsto 1) = 1(t \mapsto 1) \\ f(t \mapsto t) &= (t \mapsto t+r) = r(t \mapsto 1) + 1(t \mapsto t) \\ f(t \mapsto t^2) &= (t \mapsto t^2+2rt+r^2) \\ &= r^2(t \mapsto 1) + 2r(t \mapsto t) + 1(t \mapsto t^2) \\ f(t \mapsto t^3) &= (t \mapsto t^3+3rt^2+3r^2t+r^3) \\ &= r^3(t \mapsto 1) + 3r^2(t \mapsto t) + 3r(t \mapsto t^2) + 1(t \mapsto t^3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \\ 0 & 1 & 2r & 3r^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (siehe Skript)

Lösung 4.13

a) Für alle $x \in E$ soll $Ax = 0$ sein. E ist Untervektorraum und f linear, also genügt es, dies für eine Basis von E zu fordern. Als Basis von E kann man z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verwenden. Nun muss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} \\ a_{21}+a_{22} \\ a_{31}+a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sein, d.h. also $a_{12} = -a_{11}$, $a_{22} = -a_{21}$ und $a_{32} = -a_{31}$, d.h. die zweite Spalte ist das Negative der ersten Spalte von A.

Analog erhält man, dass die dritte Spalte ebenfalls das Negative der ersten Spalte sein muss. Insgesamt muss A also die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$$

haben.

Aufgrund unserer Überlegungen ist $Ax = 0$ für alle $x \in E$, also muss der Kern von A mindestens die Ebene E enthalten. Wenn $\alpha \neq 0$ ist, kann man die Matrix durch Zeilenoperationen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bringen. Man sieht daran, dass der Kern zweidimensional ist, also nicht größer als E sein kann. Analog kann man (mittels Zeilenvertauschungen) argumentieren, wenn $\beta \neq 0$ oder $\gamma \neq 0$. Wenn jedoch alle drei gleichzeitig Null sind, ist A die Nullmatrix, deren Kern der ganze $\mathbb{R}^3$ ist.

Eine mögliche Wahl ist also zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Zur korrekten Lösung der Aufgabe genügt es natürlich, *eine* konkrete Matrix A anzugeben.

b) Da $\operatorname{Ker}(()f) = E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ gilt $x_1 = x_2 + x_3$, d.h. die Dimension des Kerns ist 2. Wie oben gesehen, kann man A durch Zeilenoperationen auf die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \neq 0$ bringen, d.h. die Spaltenvektoren sind alle linear abhängig, so dass das Bild Dimension 1 hat.
Noch einfacher folgt dies aus der Dimensionsformel

$$\dim(\operatorname{Bild}(()A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(()A)) = 3 - 2 = 1.$$

c) Nein. Der Kern ist stets ein Untervektorraum. Ein Untervektorraum enthält jedoch stets den Nullvektor, und H tut dies nicht.

Lösung 4.14

a) Das gegebene Gleichungssystem läßt sich umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Algorithmus formen wir das Gleichungssystem um

$$\begin{array}{rrr|r l}
1 & -1 & 0 & 45 & |\cdot 1 \\
0 & 1 & -1 & -33 & \\
-1 & 0 & 1 & -12 & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & 45 & \\
0 & 1 & -1 & -33 & |\cdot 1 \\
0 & -1 & 1 & 33 & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & 45 & \\
0 & 1 & -1 & -33 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

und stellen fest, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist. Der Rang der Matrix ist 2.

<u>Alternative:</u> Geht man davon aus, dass h_1, h_2, h_3 eine Lösung ist, so ist $h_1 + h, h_2 + h, h_3 + h$ mit beliebigem $h \in \mathbb{R}$ eine weitere Lösung. Dies läßt sich ganz einfach nachrechnen und auch so kann man zeigen, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist.

b) Um die Bedingung an d_{12}, d_{23} und d_{31} besser ablesen zu können, führen wir den Gauß-Algorithmus noch einmal mit allgemeiner rechter Seite durch

$$\begin{array}{rrr|l r}
1 & -1 & 0 & d_{12} & |\cdot 1 \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & \\
-1 & 0 & 1 & d_{31} & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & d_{12} & \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & |\cdot 1 \\
0 & -1 & 1 & d_{31} + d_{12} & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & d_{12} & \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & \\
0 & 0 & 0 & d_{31} + d_{12} + d_{23} &
\end{array}$$

An der dritten Zeile sieht man, dass $d_{12} + d_{23} + d_{31} = 0$ sein muss.

Lösung 4.15 Zunächst formen wir die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus um

$$\begin{array}{rrr l r}
1 & 2 & 3 & |\cdot(-4) & |\cdot(-7) \\
4 & 5 & 6 & \hookleftarrow + & \\
7 & 8 & 9 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & & \\
0 & -3 & -6 & |\cdot(-2) & \\
0 & -6 & -12 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & & \\
0 & -3 & -6 & & \\
0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

An der neuen Form der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

können wir ablesen, dass sie Rang 2 hat.

Lösung 4.16

a) Die Matrixdarstellung A einer Drehung im $\mathbb{R}^2$, die um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung rotiert ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Mit $\alpha = 45°$ ergibt sich also

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse erhält man durch geometrische Überlegungen. Um eine Drehung um 45° rückgängig zu machen, muss man um $-45°$ drehen. D.h. die Inverse zu A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Man kann die Inverse natürlich auch Ausrechnen wie im Skript beschrieben.
$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$ verifiziert man durch Nachrechnen.

b) In $\mathbb{R}^2$ is die Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Normalenvektor n und $\|n\| = 1$ ist gegeben durch

$$B = \mathbb{1} - 2nn^T = \begin{pmatrix} 1-2n_1n_1 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2n_2 \end{pmatrix}.$$

Da wir an der x_1-Achse spiegeln wollen ist unser Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse erhält man durch geometrische Überlegungen. Spiegelt man zweimal an der gleichen Geraden, so erhält man den Punkt, mit dem man gestartet ist. D.h. durch zweimaliges Anwenden ein und derselben Spiegelung ändert sich nichts. Es gilt also

$$B = B^{-1}.$$

Man kann die Inverse natürlich auch Ausrechnen wie im Skript beschrieben.
$BB^{-1} = B^{-1}B = \mathbb{1}$ verifiziert man durch Nachrechnen.

Lösung 4.17

a) Das Parallelepiped P wird aufgespannt von den drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\begin{aligned} P := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & \vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}, \\ & \text{wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

Das Parallelepiped $f(P)$ wird also aufgespannt von den drei Vektoren $f(\vec{u}) = A\vec{u}$, $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, $f(\vec{w}) = A\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(P) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & \vec{y} = \lambda_1 f(\vec{u}) + \lambda_2 f(\vec{v}) + \lambda_3 f(\vec{w}), \\ & \text{wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

b) Für das Volumen des Parallelepipeds $f(P)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(P) &= |\det \underbrace{(f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w}))}_{\text{Matrix mit Spalten } f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w})} | \\ &= |\det(A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w})| \\ &= |\det(A \cdot \underbrace{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}_{\text{Matrix mit Spalten } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}})| \\ &= |\det A \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \\ &= |\det A| \cdot |\underbrace{\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}_{= \mathrm{vol}\, P}| \end{aligned}$$

c) Das Volumen von P berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,(P) &= |\det(u, v, w)| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right| \\ & \text{(Zeile II' = Zeile II - Zeile I; Zeile III' = Zeile III - 3Zeile I)} \\ &= \left| (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right| \\ & \text{(entwickelt nach erster Spalte)} \\ &= |-2 + 12| = |10| = 10. \end{aligned}$$

Für die Berechnung von $\mathrm{vol}(f(P))$ benutzen wir zuerst die Formel aus dem vorherigen Aufgabenteil

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(f(P)) &= |\det A| \cdot \mathrm{vol}(P) \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \\
&= 6 \cdot 10 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Man kann aber auch erst die Vektoren $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ und $f(\vec{w})$ berechnen

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und anschließend $\mathrm{vol}(f(P))$ berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(f(P)) &= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} \right| \\
&= 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 6 \cdot 5 \cdot (-3) - 9 \cdot 3 \cdot 6 - (-3) \cdot 9 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2 \\
&= 45 + 162 - 90 - 162 + 135 - 30 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Lösung 4.18

a)

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+2}(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= \det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)}\cdot\frac{1}{7}\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ -3 & -7 & -5 \\ 35 & -7 & 70 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = (-1) Zeile II,} \\
&\quad \text{Zeile III = 7 Zeile III)} \\
&= -\frac{1}{7}\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 39 & 0 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = Zeile II + Zeile I,} \\
&\quad \text{Zeile III = Zeile III + Zeile I)} \\
&= -\frac{1}{7}\cdot(-1)^{1+2}\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 39 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= 80 - 5\cdot 39 = 5\cdot(16-39) \\
&= 5\cdot(-23) = -115
\end{aligned}$$

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich die Determinante einer rechten oberen Dreiecksmatrix berechnen lässt, indem man das Produkt der Diagonaleinträge berechnet:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5! = 120.$$

c) Offensichtlich gilt die Regel auch für linke untere Dreieckmatrizen, so dass sich die Determinante wie folgt berechnet:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5! = 120.$$

d) Die Determinante dieser Matrix berechnen wir, indem wir die Matrix mittels Gaußschem Eliminationsverfahren auf die Gestalt einer rechten oberen Dreiecksmatrix bringen.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & |\cdot(-4) \\
2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & \\
4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & |\cdot(-2) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

Nun sehen wir, dass wir die Determinante in diesem speziellen Fall sogar einfach ablesen können, da sie 1 ist.

e) Analog zum vorherigen Teil ergibt sich:

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & |\cdot(-4) & |\cdot(-5) \\
2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \hookleftarrow + & & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & 26 & & \hookleftarrow + & & \\
4 & 11 & 20 & 30 & 40 & & & \hookleftarrow + & \\
5 & 14 & 26 & 40 & 55 & & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & |\cdot(-4) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & & \\
0 & 4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & |\cdot(-2) & & & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Die Determinante ist 1.

Lösung 4.19

a)
```
function y = fw_insert( L, b )
% insert forwards
% argument "L" is the lower left triangular matrix with all
% diagonal entries being 1
% and "b" is the right hand side.

% get the length of the vector
[m,n] = size( b );

for k = 1:n
    s = b(k);
    for j = 1:k-1
```

```
        s = s - L(k,j)*y(j);
    end
    y(k) = s;
end
```

b)
```
function x = LR_solver(A, b)
% solver based on LR decomposition
% argument "A" is the matrix
% and "b" is the right hand side.

LR = LRdecomposition(A);

y = fw_insert(LR,b);

x = bw_insert(LR, y);
```

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 4.20 Um die Regel nachzurechnen, entwickeln wir die Determinante nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-1)^{2+1} a_{21} (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
&\quad + (-1)^{3+1} a_{31} (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Achtung: Die Berechnung von 4×4-Determinanten funktioniert *nicht* völlig analog, hier egeben sich insgesamt 24 Summanden (mit einer nicht ganz so regelmäßigen Struktur) mit je 4 Faktoren.

Lösung 4.21

a) Wenn alle Diagonaleinträge von null verschieden sind, hat die Matrix vollen Rang und das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, z. B. durch rückwärts Einsetzen.

b) Entweder es gibt keine Lösung oder die Lösungsmenge hat die Form $\{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker}(A)\}$, welche einen affinen Unterraum beschreibt (vgl. Bemerkung aus der Vorlesung). Die Lösungsmenge ist linear, falls $b = 0$ (der Kern ist immer ein Untervektorraum).

c) Die Determinante ist ungleich 0. Daher wissen wir, dass die Matrix A invertierbar und das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist.

d) Die Determinanten-Funktion ist linear in jeder Zeile (siehe Satz in der Vorlesung). Man muss den Faktor α aus jeder Zeile einzeln herausziehen, d.h. insgesamt n mal.

Lösung 4.22

a) i) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems wird nicht geändert, wenn gilt $\alpha \neq 0$.

ii) Die Determinante der neuen Matrix berechnet sich durch α mal Determinante der alten Matrix.

iii) Im Fall $n = 3$ und $k = 2$ sieht die Matrix L wie folgt aus

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. L ist eine Diagonalmatrix, auf deren Diagonalen fast nur Einsen stehen. Nur in der k-ten Zeile steht auf der Diagonalen ein α.

b) i) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems wird nicht geändert, wenn gilt $\alpha \neq 0$.

ii) Die Determinante der neuen Matrix berechnet sich durch α mal Determinante der alten Matrix.

iii) Im Fall $n = 3$, $k = 2$ und $j = 1$ sieht die Matrix L wie folgt aus

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vartheta & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta\vartheta & \delta\varphi \end{pmatrix}$$

Lösung 4.23

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, daß eine Drehung um den Winkel φ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ besitzt. Mit dem Einsetzen der Werte für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich

$$M_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Spiegelung: Die Gerade g ist in Normalenform gegeben. Nach Normieren erhalten wir $n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ für den Normalenvektor. Damit gilt mit der Formel aus der Vorlesung

$$M_b = \mathbb{1} - 2nn^\top = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}.$$

c) Die Nacheinanderausführung ist das Produkt beider Matrizen. Damit erhalten wir

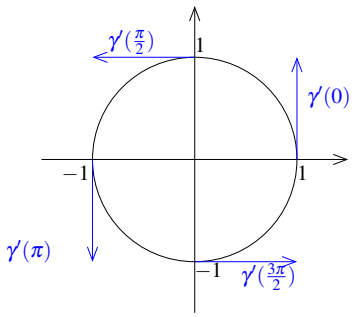
$$M_b M_a = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 31 & 17 \\ 17 & -31 \end{pmatrix}.$$

5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Lösung 5.1

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

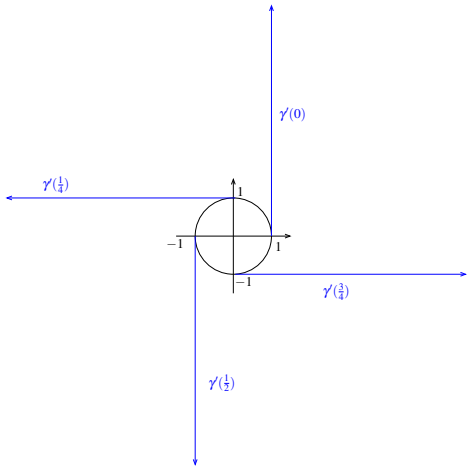
$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\frac{3}{2}\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lösung 5.2

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lösung 5.3

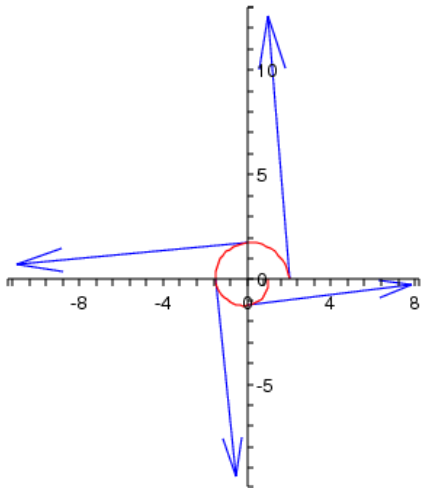
$$\gamma'(t) = -\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} + (2-t)\cdot 2\pi \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\cdot 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4\pi \end{pmatrix},$$

$$\gamma'\left(\frac{1}{4}\right) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{4}\cdot 2\pi \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}\pi \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\cdot 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\pi \end{pmatrix},$$

$$\gamma'\left(\frac{3}{4}\right) = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\cdot 2\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$



Achtung: Die $x-$Achse ist seltsam skaliert!

Lösung 5.4

a) Die $1-$Niveaumenge ist gegeben durch

$$N_1(f) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

und ist ein Kreis mir Radius 1.
Die Stellen, an denen der Gradient berechnet werden soll werden wie folgt ermittelt

$$f(x_1,0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1,$$

$$f(0,x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1,$$

$$f(x_1,x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x_1,-x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Gradient der Funktion f an der Stelle (x_1,x_2) ist

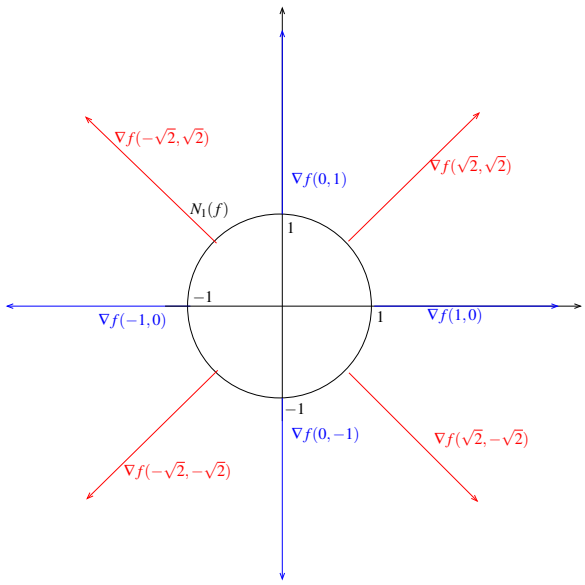
$$\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{grad} f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



b) Die $1-$Niveaulinie ist gegeben durch

$$N_1(g) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x_1,x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

$$g(x_1,0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2 \text{ oder } x_1 = 2,$$

$$g(0,x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1$$

Bei $N_1(g)$ handelt es sich also um eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 1.

$$g(x_1,x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$g(x_1,-x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Der Gradient der Funktion g an der Stelle (x_1,x_2) ist

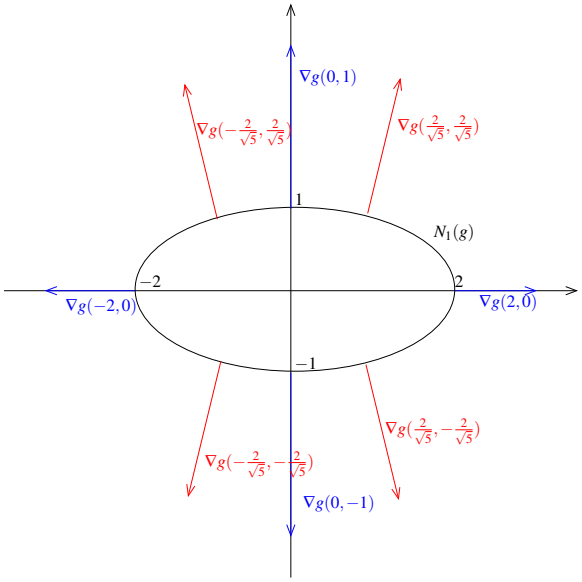
$$\text{grad}g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{grad}f(-2,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad}f(2,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{grad}f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad}f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{grad}f(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad}f(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$\text{grad}f(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad}f(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$



Lösung 5.5

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Ja!

e) Nein!

f) Ja!

g) Nein!

Lösung 5.6

a)

$$\begin{aligned} N_r(f) &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2) = r\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|,|x_2|) = r\right\} \end{aligned}$$

$r < 0 \;:\; N_r(f) = \emptyset$

$r = 0 \;:\; N_r(f) = \{(0,0)\}$ (klar!)

$r > 0 \;:\;$ <u>Fall 1:</u> $\max(|x_1|,|x_2|) = |x_2| = r$

d.h. $x_2 = r$ oder $x_2 = -r$ und $-r \le x_1 \le r$

wegen $|x_1| \le |x_2| = r$

<u>Fall 2:</u> $\max(|x_1|,|x_2|) = |x_1| = r$

$\Rightarrow\; x_1 = r$ oder $x_1 = -r$ und $x_2 \in [-r,r]$!

$$\begin{aligned} N_r(f) \;=\; \{\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid\; & (x_1 \in [-r,r] \text{ und } x_2 = r) \\ & \text{oder } (x_1 \in [-r,r] \text{ und } x_2 = -r) \\ & \text{oder } (x_1 = r \text{ und } x_2 \in [-r,r]) \\ & \text{oder } (x_1 = -r \text{ und } x_2 \in [-r,r]) \,\} \end{aligned}$$

Es handelt sich also um den Rand eines Quadrates mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Seitenlänge $2r$!
Eckpunkte in: $(r,r),(-r,r),(-r,-r),(r,-r)$.

$$N_r(g) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \underbrace{|x_1| + |x_2|}_{g(x_1,x_2)} = r\}$$

$r<0 \quad : \quad N_r(g)=\emptyset$

$r=0 \quad : \quad N_r(g)=\{(0,0)\}$

$r>0 \quad : \quad$ <u>Fall 1:</u> $x_1,x_2 \geq 0$

$g(x_1,x_2)=x_1+x_2=r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2=r-x_1}$

Gerade durch $(0,r)$ und $(r,0)$

<u>Fall 2:</u> $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$

$g(x_1,x_2)=-x_1+x_2=r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2=r+x_1}$

Gerade durch $(0,r)$ und $(-r,0)$

<u>Fall 3:</u> $x_1,x_2 \leq 0$

$g(x_1,x_2)=-x_1-x_2=r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2=-r-x_1}$

Gerade durch $(0,-r)$ und $(-r,0)$

<u>Fall 4:</u> $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$

$g(x_1,x_2)=x_1-x_2=r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2=-r+x_1}$

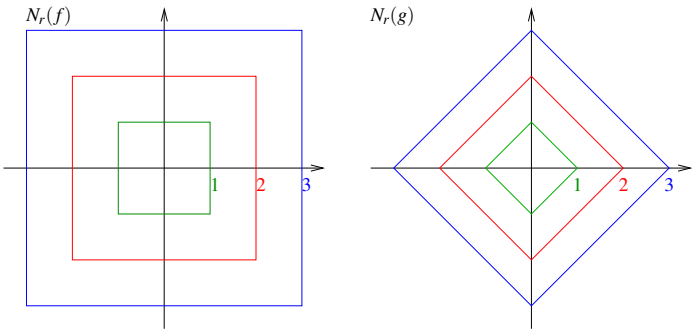
Gerade durch $(0,-r)$ und $(r,0)$

Es handelt sich also um den Rand eines Quadrates: Mittelpunkt $(0,0)$, Seitenlänge $\sqrt{2}r$

Eckpunkte in $(0,r),(-r,0),(0,-r),(r,0)$

(gedrehtes und skaliertes Quadrat gegenüber f, wenn man gleichen Wert für r wählt!)

Links sind die Niveaumengen $N_r(f)$ für $r=1,2,3$ abgebildet und rechts die Niveaumengen $N_r(g)$ für $r=1,2,3$:



b) Graph von f:

$$G_f := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = f(x_1,x_2)\}$$

setzt sich aus Niveaumengen $N_r(f)$ (=„Höhenlinien“) zusammen:

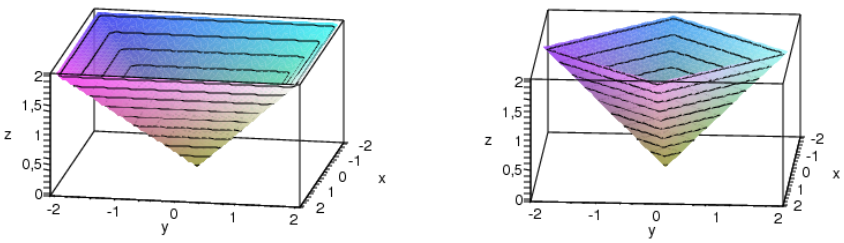
Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass nur Niveaumengen mit $r \geq 0$ Sinn ergeben, d.h. für x_3 muss gelten $x_3 \geq 0$!

Des weiteren wissen wir, dass eine Niveaumenge $N_r(f)$ einem Schnitt einer Ebene, parallel zur $x_1 - x_2$ Ebene in der Höhe $r > 0$ mit G_f entspricht. Dieser Schnitt entspricht dem Rand eines Quadrates mit Seitenlänge $2r$. Der Graph von f ist also eine auf dem Kopf stehende Pyramide mit Spitze in $(0,0,0)$.

Der Graph von g sieht ähnlich aus, wie der Graph von f. Es ist ebenfalls eine auf dem Kopf stehende Pyramide mit Spitze in $(0,0,0)$, die im Vergleich zum Graph von f um $45°$ $(= \pi/4)$ gedreht und zusätzlich skaliert ist. Die Seitenlänge dieser Pyramide ist kürzer.

Man beachte: Wenn $x \in \mathbb{R}^3$ auf der „Mantelfläche" von Graph f bzw. g liegt, dann liegt λx für $\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls auf der Mantelfläche und damit auf Graph f bzw. g (Kegeleigenschaft!)

Links ist der Graph der Funktion $f(x_1,x_2)$ abgebildet und rechts der Graph der Funktion $g(x_1,x_2)$:



c) <u>Nicht</u> partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar ist f in den Punkten, die eine „Kante" von Graph f sind/bilden:

$$|x_1| = |x_2| \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = -x_2$$

<u>Fall 1:</u> $x_1, x_2 \geq 0$ und $x_1 = x_2$

wähle $0 \leq h \leq x_1$

$$\Rightarrow\ f(x) = f(x_1,x_2) = x_1 = x_2$$
$$h \geq 0\ \Rightarrow\ x_1 + h \geq x_2 \geq 0$$
$$\Rightarrow\ f(x+he_1) = f(x_1+h,x_2) = x_1 + h$$
$$\Rightarrow\ f(x_1+h,x_2) - f(x_1,x_2) = x_1 + h - x_1 = h$$
$$\Rightarrow\ (f(x_1+h,x_2) - f(x_1,x_2)) \cdot \frac{1}{h} = 1 \to 1 \quad (h \to 0!)$$
$$0 \leq h \leq x_1\ \Rightarrow\ x_2 \geq x_1 - h \geq 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{h}(f(x_1-h,x_2) - f(x_1,x_2)) = \frac{1}{h}(x_2 - x_2) = 0 \to 0 (h \to 0!)$$

Der „Grenzwert“ ist von der einen Seite also 1 und von der anderen Seite 0

$\rightsquigarrow$ nicht differenzierbar!

<u>Fall 2:</u> $x_1 = x_2$ und $0 \geq x_1, x_2$ entsprechend!

<u>Fall 3:</u> $x_1 = -x_2$ und $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ entsprechend!

<u>Fall 4:</u> $x_1 = -x_2$ und $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ entsprechend!

<u>Nicht</u> partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar ist g in den Punkten der Menge

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}.$$

<u>Fall 1:</u> $x_1 \geq 0$ und $x_2 = 0$
wähle $0 \leq h \leq x_1$

$$\Rightarrow\ g(x_1,0) = x_1$$
$$h \geq 0\ \Rightarrow\ x_1 + h \geq 0$$
$$\Rightarrow\ g(x_1+h,0) = x_1 + h = x_1 + h$$
$$\Rightarrow\ g(x_1+h,0) - g(x_1,0) = x_1 + h - x_1 = h$$
$$\Rightarrow\ (g(x_1+h,0) - g(x_1,0)) \cdot \frac{1}{h} = 1 \to 1 \quad (h \to 0!)$$
$$0 \leq h \leq x_1\ \Rightarrow\ x_1 - h \geq 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{h}(g(x_1-h,0) - g(x_1,0)) = \frac{1}{h}(x_1 - h - x_1) = -1$$
$$\to -1 \quad (h \to 0!)$$

Der „Grenzwert“ ist von der einen Seite also 1 und von der anderen Seite -1

$\rightsquigarrow$ nicht differenzierbar!

<u>Fall 2:</u> $x_1 < 0$ und $x_2 = 0$ entsprechend!

<u>Fall 3:</u> $x_1 = 0$ und $x_2 \geq 0$ entsprechend!

<u>Fall 4:</u> $x_1 = 0$ und $x_2 < 0$ entsprechend!

Lösung 5.7

a) Bei dem Graphen der Funktion f handelt es sich um die obere Hälfte der Einheitskugel (Kugel mit Radius 1) mit Mittelpunkt im Ursprung.

b)

$$\nabla f(x,y) = -\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

c)

$$\begin{aligned}
T_{(x,y,f(x,y))}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
T_{(0,0,1)}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
T_{(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
N\left(\frac{1}{2},0\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung 5.8

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

gesucht: Jacobi-Matrix und deren Determinante

$$
\begin{aligned}
J_F(r,\vartheta,\varphi) &= DF(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Denn: $J_F(r,\vartheta,\varphi) = DF(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r F_1 & \partial_\vartheta F_1 & \partial_\varphi F_1 \\ \partial_r F_2 & \partial_\vartheta F_2 & \partial_\varphi F_2 \\ \partial_r F_3 & \partial_\vartheta F_3 & \partial_\varphi F_3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
F_1(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\
\partial_r F_1 &= \sin\vartheta\cos\varphi \\
\partial_\vartheta F_1 &= r\cos\vartheta\cos\varphi \\
\partial_\varphi F_1 &= -r\sin\vartheta\sin\varphi
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F_2(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\
\partial_r F_2 &= \sin\vartheta\sin\varphi \\
\partial_\vartheta F_2 &= r\cos\vartheta\sin\varphi \\
\partial_\varphi F_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(r,\vartheta,\varphi) &= r\cos\vartheta \\
\partial_r F_3 &= \cos\vartheta \\
\partial_\vartheta F_3 &= -r\sin\vartheta \\
\partial_\varphi F_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Berechnung der Determinante:
Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}
\det J_F(r,\vartheta,\varphi) &= \det DF(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + 0 \\
&= r^2\sin\vartheta\big(\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\big) \\
&= r^2\sin\vartheta\Big((\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\cos^2\varphi + (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\sin^2\varphi\Big) \\
&= r^2\sin\vartheta\cdot 1 \\
&= r^2\sin\vartheta
\end{aligned}$$

Entwicklung nach der 3ten Spalte

$$\begin{aligned}
\det J_F(r,\vartheta,\varphi) &= \det DF(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}(-r\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2+3}(r\sin\vartheta\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&= (r\sin\vartheta)\Big((-\sin\varphi)\cdot\big(-r\sin^2\vartheta\sin\varphi - r\cos^2\vartheta\sin\varphi\big) \\
&\quad + (-\cos\varphi)\big(-r\sin^2\vartheta\cos\varphi - r\cos^2\vartheta\cos\varphi\big)\Big) \\
&= (r\sin\vartheta)\big(r\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi\big) \\
&= (r^2\sin\vartheta)\cdot 1 \\
&= (r^2\sin\vartheta) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Lösung 5.9

a) Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls es eine lineare Abbildung $a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + o(x-x_0),$$

wobei $o:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\frac{o(h)}{\|h\|}\xrightarrow{h\to 0} 0$.

b) Differenzierbare Funktionen sind stetig, aber nicht umgekehrt.

Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist stetig an $x_0 = 0$, aber nicht differenzierbar an der Stelle.

c) Wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

d) Die Richtung des Gradienten von f an der Stelle x_0 ist die Richtung des steilsten Anstieges von f, und seine Länge ist dieser steilste Anstieg.

e) $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$.

f) Satz von Schwarz:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$D^2 f(x)(v,w) = D^2 f(x)(w,v).$$

D.h. die Bilinearform $D^2 f(x)$ ist symmetrisch und damit ist dann auch $D^2 f(x)$ eine symmetrische Matrix:

$$\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}} f(x).$$

g) Sei v ein Vektor; Die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ eine Funktion f an der Stelle x_0 ist die Variation dieser Funktion in der Richtung v.

$$\partial_v f(x_0) = \partial_t f(x_0 + tv)|_{t=0} = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v.$$

Man bezeichnet auch die partielle Ableitung als Richtungsableitung.

h) Ein lokales Minimum einer Funktion f ist ein Punkt x_0, zu dem es eine Umgebung $V(x_0)$ gibt mit der Bedingung $\forall x \in V(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$.

Ebenso ist ein lokales Maximum einer Funktion f ein Punkt x_0, zu dem es eine Umgebung $V(x_0)$ gibt mit der Bedingung $\forall x \in V(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$

i) Um solche lokalen Extremwert zu finden, sucht man nach kritischen Punkten, das heißt, man löst die Gleichung $\nabla f(x) = 0$. Dann ist zu entscheiden, ob es sich um einen Sattelpunkt oder ein lokales Extremum handelt.

j) Eine symmetrische Matrix A heißt positiv definit, falls die Eigenwerte von A alle positiv sind.
Eine symmetrische Matrix A heißt negativ definit, falls die Eigenwerte von A alle negativ sind.

k) Die Hesse-Matrix von f ist die die Ableitung des Gradienten dieser Funktion.

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}\right)_{i,j}$$

l) Wenn der Gradient an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches einer Funktion f verschwindet und die Hessematrix dort positiv definit ist, dann ist f ein lokales Minimum, wenn die Hessematrix dort statt dessen negativ definit ist, ist der Punkt ein lokales Maximum.

Lösung 5.10

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare Abblidung $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\frac{o(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

b) f ist differenzierbar genau dann wenn f partiell differenzierbar nach alle Variablen ist und alle partielle Ableitungen stetig sind.

c) Die Jacobimatrix einer differenzierbaren Abbildung an einer Stelle x_0 ist die Darstellung von $Df(x_0)$ in Matrixform.

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_j}} f_i(x_0) \right)_{i,j}$$

d) Sei $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D(f \circ g)(x) = (Df)\,(g(x))\,(Dg(x))$
Bemerkung: Dg ist eine $(n \times p)-$Matrix, Df ist eine $(m \times n)-$Matrix, und $D(f \circ g)$ ist eine $(m \times p)-$Matrix.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

e) Ja, differenzierbare Abbildungen sind immer stetig.

f) **Definition von Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$:** Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x,y) im kanonischen Koordinatensystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand zwischen M und dem Ursprungspunkt $O = (0,0)$ von $\mathbb{R}^2$, und θ den Winkel zwischen die $x-$Achse und $\overrightarrow{OM}$. Die Polarkoordinaten von M sind (r, θ), ihre Verbindung mit den kartesischen Kordinaten von M ist

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \end{cases}$$

g) **Definition von Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:** Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x,y,z) im kanonischen Koordinatsystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2+y^2}$ die Abstand zwischen der Projektion N von M auf den (x,y)-Ebene und dem Ursprungspunkt $O = (0,0,0)$ von $\mathbb{R}^3$, und θ den Winkel zwischen der $x-$Achse und $\overrightarrow{ON}$. Die Zylinderkoordinaten von M sind (r,θ,z) und ihre Verbindung mit den kartesische Kordinate von M ist

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \\ z = & z \end{cases}$$

Definition von Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Sei M ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x,y,z) im kanonischen Koordinatensystem. Man nennt $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ den Abstand zwischen M und dem Ursprungspunkt $O = (0,0,0)$ von $\mathbb{R}^3$, N die Projektion von M auf den $(x,y)-$Achse, θ den Winkel zwischen x-Achse und $\overrightarrow{ON}$, und φ den Winkel zwischen den y-Achse und $\overrightarrow{OM}$. Die Kugelkoordinaten von M sind (r,φ,θ) und ihre Verbindung mit den kartesischen Kordinaten von M ist

$$\begin{cases} x & = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y & = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z & = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

Lösung 5.11

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_M + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_P(t) \\ &= \begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= (1-\cos(t))^2 + \sin^2(t) \\ &= 1 - 2\cos(t) + 1 \\ &= 2 - 2\cos(t) \end{aligned}$$

e) Wir wissen, dass der Cosinus maximal wird für $t = 0$ und minimal für $t = \pi$ folglich nimmt der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 0$ sein Minimum und für $t = \pi$ sein Maximum an. Im Minimum beträgt der Betrag der Geschwindigkeit 0 und im Maximum 4.
Alternativ kann man diese Ergebnisse auch mittels erster und zweiter Ableitung nachrechnen.

Lösung 5.12 Es gilt $f(2,1) = 14$. Damit geht die Tangentialebene (=Tangentialraum) durch den Punkt $(2,1,14)$. Weiterhin ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 5y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy.$$

Einsetzen liefert $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 7$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 20$. Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 5.13 Zunächst ist $g(2,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin sind alle Funktionen stetig differenzierbar. Damit existiert die Ableitung und mit der Kettenregel erhalten wir

$$Df = \begin{pmatrix} 2xy+2 & x^2 \\ 3x^2-2y^2 & 4xy \end{pmatrix}, \quad Dg = \begin{pmatrix} \ln(1+y^2) & \frac{2xy}{1+y^2} & 1 \\ -z\sin(xz) & 1 & -x\sin(xz) \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Werte und die Matrixmultiplikation erhalten wir

$$D(f \circ g)(2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6 Integration von Funktionen in einer Dimension

Lösung 6.1

a) Diese Aufgabe können wir nicht lösen, indem wir prüfen, ob der Integrand $f(x) := x^2 + 2x - \frac{1}{3}$ gerade oder ungerade ist, denn da gilt

$$f(-x) = x^2 - 2x - \frac{1}{3} \neq -f(x) \quad \text{und} \quad f(-x) \neq f(x),$$

ist er weder ungerade noch gerade.
Um zu überprüfen, ob die Aussage richtig oder falsch ist, müssen wir das Integral also ausrechnen.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^2 + 2x - \frac{1}{3}\, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Aussage ist also richtig.

b) Da der Integrand $f(x) := x^2 + 2x$ weder ungerade noch gerade ist, müssen wir auch dieses Integral ausrechnen.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^2 + 2x\, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die Aussage ist also falsch.

Lösung 6.2

a)

$$\int_0^1 xe^x\, dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Partielle Integration mit:

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = x,\ g'(x) = 1.$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\log|z| = \frac{1}{3}\log|x^3+5|.$$

Substitution: $z := x^3 + 5 \ \Rightarrow\ dz = 3x^2\, dx \ \Leftrightarrow\ x^2\, dx = \frac{1}{3}dz$.

c)

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad (x \geq 0!).$$

Oder mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\,dx &= \int 1\cdot\sqrt{x}\,dx = x\cdot\sqrt{x} - \int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \\
&= x\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{x}\,dx \\
\Rightarrow \frac{3}{2}\int \sqrt{x}\,dx &= x\cdot\sqrt{x} \Leftrightarrow \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Dabei war

$$f(x) = x,\ f'(x) = 1,\ g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Lösung 6.3

a) $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin(3x)\,dx = \frac{3}{10}(e^{\pi}+1)$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \sin(3x),\ g'(x) = 3\cos(3x)$$

ergibt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= e^x \sin(3x)|_0^\pi - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= e^\pi \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} - e^0 \underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{=\sin(0)=0} - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3e^x \cos(3x)|_0^\pi - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \qquad (*) \\
&= -3e^\pi \underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos(\pi)=-1} + 3e^0 \underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{=\cos(0)=1} - \\
&\quad 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \\
&= 3(e^\pi + 1) - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx. \\
\Rightarrow\ 10\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= 3(e^\pi + 1).\ \Rightarrow\ \text{Beh.!}
\end{aligned}
$$

(*) Partielle Integration mit: $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \cos(3x),\ g'(x) = -3\sin(3x)$.

b) $\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3\pi}{8}$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x,\ g(x) = \sin^3 x,\ g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin x \sin^3 x\,dx &= -\cos x \sin^3 x|_0^\pi + 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\,dx \\
&= 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\,dx \qquad (\text{da } \sin 0 = \sin x = 0) \\
&= 3\int_0^\pi (1-\sin^2 x)\sin^2 x\,dx \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,!) \\
&= 3\int_0^\pi \sin^2 x\,dx - 3\int_0^\pi \sin^4 x\,dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^4 x\,dx &= \frac{3}{4}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx. \\
\int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \int_0^\pi \sin x \sin x\,dx \\
&= -\cos x \sin x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \\
&= \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \quad (-\cos x \sin x|_0^\pi = 0,\ \text{da } \sin 0 = \sin \pi = 0) \\
&= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\
&= \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx = 0$, da $f(x) = \sin^5 x$ ungerade ist: $f(-x) = [\sin(-x)]^5 = [-\sin x]^5 = -\sin^5 x = -f(x)$.

d) Nach b) gilt (Zwischenergebnis dort):

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Lösung 6.4

a) Der Nenner des Integranden lässt sich schreiben als

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung sieht also wie folgt aus

$$\frac{2x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \left(\frac{2x-1}{x+3} - \frac{(x-2)B}{x+3} \right) \bigg|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}, \\ B &= \left(\frac{2x-1}{x-2} - \frac{(x+3)A}{x-2} \right) \bigg|_{x=-3} = \frac{2 \cdot (-3) - 1}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{3(x+3) + 7(x-2)}{5(x-2)(x+3)} = \frac{10x-5}{5(x^2+x-6)} = \frac{2x-1}{x^2+x-6}. \quad \checkmark$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6} \, dx &= \int \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x+3} \, dx \\ &= \frac{3}{5} \log|x-2| + \frac{7}{5} \log|x+3|. \end{aligned}$$

b) Der Nenner lässt sich schreiben als

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1.$$

Da die Ableitung des Nenners wie folgt aussieht

$$(x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2,$$

lässt sich das Integral am günstigsten wie folgt umschreiben:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} \, dx = \int \frac{2x-2}{(x-1)^2+1} \, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+1} \, dx.$$

Da sich

$$\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx \quad = \quad \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log((x-1)^2+1)$$

mit der Substitution $z = 1+(x-1)^2,\ dz = 2(x-1)\,dx$ ergibt, und

$$\int \frac{dx}{1+(x-1)^2} \quad = \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z = \arctan(x-1)$$

mit Hilfe der Substitution $z = x-1,\ dz = dx$ folgt, ergibt sich als Gesamtlösung

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \log((x-1)^2+1) + \arctan(x-1).$$

Lösung 6.5

a) Ja! Denn: $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$.

   Benutzt: Kettenregel und Additionstheorem für sin!

b) Ja! Denn: $(x)' = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

c) Nein! Denn: $(\sin(x^2))' = \cos(x^2)\cdot 2x \neq 2x\cdot\cos x$ für $x \neq 0, 1$.

d) Nein! Denn: $(x-e^x)' = 1-e^x \neq xe^x$ für $x \neq 0$.

e) Nein! Denn: $\left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = \frac{1}{2}(-\sin(2x))\cdot 2 = -\sin(2x) \neq \sin(2x)$ für $\sin(2x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Lösung 6.6 Benutze: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, wenn die Funktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ ungerade ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dies folgt aus der Substitutionsregel.
Durch Anfertigen einer Skizze erkennt man, dass dies bedeutet, dass die Gesamtfläche, welche die Funktion f im Intervall $[-a,a]$ mit der x-Achse einschließt Null ist.

a) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^2 ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

b) Nein! Da der Integrand gerade und (außer in Null) positiv ist: Gesamtfläche ist positiv.

c) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\frac{1}{1+x^2}$ ist gerade.

d) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\cos x$ ist gerade.

e) Ja! Da der Integrand ungerade ist: $\sqrt{1+x^2}$ ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

Lösung 6.7

a)

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log|x^2+5|$$

Substitution:

$$z := x^2+5 \geq 5 \;\Rightarrow\; dz = 2x\,dx$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{9x^2}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2}{3}dz}{1+z^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= \frac{1}{6}\arctan z = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3x}{2}\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution: $z := \frac{3x}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{9x^2}{4}$ und $dz = \frac{3}{2}\,dx \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{2}{3}dz$.

c)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \int_0^\pi \sin x \sin x\,dx \\ &= -\cos x \sin x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \\ &= \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \quad (-\cos x \sin x|_0^\pi = 0,\ \text{da } \sin 0 = \sin\pi = 0) \\ &= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\ &= \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx. \\ \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Lösung 6.8 Zuerst betrachten wir die Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ und zeigen, dass sie streng monoton fallend ist.

Sei $n \in [1,\infty)$ beliebig und $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$f(n) = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\varepsilon)^2} = f(n+\varepsilon),$$

denn

$$n^2 < n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 = (n+\varepsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\varepsilon)^2},$$

d.h. die Funktion f ist auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton fallend.
Daraus folgt für $n \geq 1$

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx > f(n+1)(n+1-n) = f(n+1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_1^N f(x)\,dx &= \sum_{m=1}^{N-1} \int_m^{m+1} f(x)\,dx \\ &> \sum_{m=1}^{N-1} f(m+1) \\ &= \sum_{n=2}^{N} f(n) \end{aligned}$$

Da

$$\int_1^N f(x)\,dx = \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^N = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ unabhängig von } N.$$

Die Reihe ist also beschränkt. Da die einzelnen Summanden alle positiv sind, ist die Reihe auch monoton wachsend, so dass sie für $N \to \infty$ konvergiert.

Lösung 6.9

a)

$$\int_0^\pi \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2x}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \left(x - \ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

c)

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - (2xe^x)\Big|_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2$$

7 Taylorentwicklung, Interpolation und numerische Integration

Lösung 7.1

a) Man sieht leicht, dass

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad H_3(x) = \frac{1}{6}x^3, \quad H_4(x) = \frac{1}{24}x^4$$

die gesuchte Hermite-Basis ist.

Zur Berechnung setzt man

$$H_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

an und berechnet die Ableitungen an der Stelle 0

$$H_i^{(j)}(0) = j! a_j.$$

Daraus sieht man sofort, dass in H_i alle Koeffizienten außer a_i Null sind, und $a_i = \frac{1}{i!}$.

b) Man muss lediglich die für $x_0 = 0$ berechneten Basis-Polynome um x_0 verschieben, man erhält

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = (x - x_0), \qquad H_2(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2,$$
$$H_3(x) = \frac{1}{6}(x - x_0)^3, \qquad H_4(x) = \frac{1}{24}(x - x_0)^4.$$

c)

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{1}{2}(x - x_0)^2 + f'''(x_0)\frac{1}{6}(x - x_0)^3 + f^{(4)}(x_0)\frac{1}{24}(x - x_0)^4$$

Offenbar ist p identisch zur Taylorentwicklung vierter Ordnung von f um den Punkt x_0.

Lösung 7.2

a) Stückweise affine Interpolation.

b) Ja.

c) Stetig: Ja. In den Teilintervallen klar, an den Grenzen gilt $p_{j-1}(x_j) = p_j(x_j)$. Differenzierbar: Nur im Inneren der Teilintervalle.

d) Hütchenfunktion.

e) Hütchenbasis.

Lösung 7.3 Um die Funktion f auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}] = [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$ durch eine affine Funktion zu approximieren benötigen wir zwei Lagrangepolynome. $L_i(x)$ und $L_{i+1}(x)$, wobei $L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_{i+1}) = 0$, $L_{i+1}(x_i) = 0$ und $L_{i+1}(x_{i+1}) = 1$. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{\left(x - \frac{i+1}{4}\right)}{\left(\frac{i}{4} - \frac{i+1}{4}\right)} = -4x + (i+1) \\ L_{i+1}(x) &= \frac{\left(x - \frac{i}{4}\right)}{\left(\frac{i+1}{4} - \frac{i}{4}\right)} = 4x - i \end{aligned}$$

a) Betrachtet man das Intervall $[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$, so handelt es sich bei der Fläche unter den beiden Funktion L_i und L_{i+1} jeweils um ein Dreieck mit denselben Seitenlängen. Somit gilt

$$\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_i(x)\,dx = \int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_{i+1}(x)\,dx.$$

Des weiteren ist der Wert dieser Integrale für alle vier Teilintervalle gleich, so dass wir die Rechnung vereinfachen können, indem wir das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ betrachten.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} L_0(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} -4x + 1\,dx \\ &= -2x^2 + x \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

b) Um die Funktion f auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ zu integrieren, spalten wir das Integral in Teilintegrale über die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ auf. Des weiteren integrieren wir auf diesen Intervallen nicht die Funktion f, sondern ihre affine Approximation.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &\approx \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)L_i(x) + f(x_{i+1})L_{i+1}(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)\,dx + f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i+1}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \frac{1}{8} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4) \right] \end{aligned}$$

Lösung 7.4

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$$

a) Trapezregel:

$$a = 0, b = 1, h = \frac{1}{4}, n = 4, f(x) = \frac{1}{1+x^2} :$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4}\left\{\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{16}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{9}{16}} + \frac{1}{4}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right\} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{4}{17} + \frac{1}{5} + \frac{4}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3}{16} + \frac{9}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3 \cdot 5^4 + 9 \cdot 16}{10000} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{1875 + 144}{10000} \\
&= \frac{2019}{10000} + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + 0,235294118 = 0,437194118
\end{aligned}$$

b) Simpsonregel:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{24}\left\{f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)\right.\\
&\quad \left.+4f\left(\frac{1}{8}\right)+4f\left(\frac{3}{8}\right)+4f\left(\frac{5}{8}\right)+4f\left(\frac{7}{8}\right)+f(1)\right\}\\
&= \frac{1}{24}\left\{1+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{16}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{16}}\right.\\
&\quad \left.+4\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{25}{64}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{49}{64}}+\frac{1}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}+\frac{32}{17}+\frac{8}{5}+\frac{32}{25}+\frac{256}{65}+\frac{256}{73}+\frac{256}{89}+\frac{256}{113}\right]\\
&= \frac{1}{16}+\frac{4}{51}+\frac{1}{15}+\frac{4}{75}+\frac{32}{195}+\frac{32}{219}+\frac{32}{267}+\frac{32}{339}\\
&= 0,0625+0,078431373+0,066666667+0,053333333\\
&\quad +0,164102564+0,146118721+0,119850187+0,09439528\\
&= 0,785398125 \approx 0,7854 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Lösung 7.5

a) $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar.
Taylor ergibt:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+O(h^2)\\
f(x_0+2h) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot 2h+O(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0))\\
= \quad & \underbrace{(-f(x_0)+4f(x_0)-3f(x_0))}_{=0}+(-f'(x_0)+2f'(x_0))\cdot 2h+O(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)}{2h}=f'(x_0)+O(h)\\
\Rightarrow \quad & \text{Beh.!}
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \in \mathscr{P}_2 \\
p(x_0+h) &= a_0 + a_1(x_0+h) + a_2(x_0+h)^2 \\
&= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_1 h + a_2 2x_0 h + a_2 h^2 \\
&= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)h + a_2 h^2 \\
p(x_0+2h) &= a_0 + a_1(x_0+2h) + a_2(x_0+2h)^2 \\
&= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)2h + a_2 4h^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{-p(x_0+2h) + 4p(x_0+h) - 3p(x_0)}{2h} \\
&= \frac{1}{2h}\big(\underbrace{-p(x_0) + 4p(x_0) - 3p(x_0)}_{=0}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2h}\left(-(a_1 + 2a_2 x_0)2h + 2(a_1 + 2a_2 x_0)2h\right) \\
&\quad + \frac{1}{2h}\big(\underbrace{-4a_2 h^2 + 4a_2 h^2}_{=0}\big) \\
&= a_1 + 2a_2 x_0 = p'(x_0) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Lösung 7.6 a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{6}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin x}{\sin^3 x} &= \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))}{(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^3} \\
&= \frac{x^3\left(\frac{1}{6} + O(x^2)\right)}{x^3\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6} + O(x^2)\right)}{\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)\right)^3} \to \frac{1}{6} \qquad \text{für } x \to 0\,!
\end{aligned}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2) - x^3}{x^5} = -\frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x\log(1+x^2) - x^3}{x^5} &= \frac{x(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)) - x^3}{x^5} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2} + O(x^2)\right)x^5}{x^5} \\
&= -\frac{1}{2} + O(x^2) \to -\frac{1}{2} \qquad \text{für } x \to 0\,!
\end{aligned}$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5)) - (x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{x^3} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+O(x^2) \\
&= \frac{3}{6}+O(x^2) = \frac{1}{2}+O(x^2) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } x \to 0\,!
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} = -2$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\tan x}{x-\sin x} &= \frac{x-(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5))}{x-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))} \\
&= \frac{x^3(-\frac{1}{3}+O(x^2))}{x^3(\frac{1}{6}+O(x^2))} \\
&= \frac{-2+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -2 \qquad \text{für } x \to 0\,!
\end{aligned}$$

Lösung 7.7

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x\ln x} \\
x_0 &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(3) &= 3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27 \\
f'(x) &= \left(e^{x\ln x}\right)' \\
&= e^{x\ln x}\cdot\left\{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right\} \\
&= x^x\cdot(\ln x+1) \\
f'(3) &= 3^3\cdot(\ln 3+1) \\
&= 27\cdot(1+\ln 3) \\
&= 27+27\cdot\ln 3 \\
&\approx 27(1+1{,}098612289) \\
&\approx 56{,}66253179 \quad \text{(Taschenrechner)}
\end{aligned}$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$ZD_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$h = 10^{-1} = \frac{1}{10},\ h = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},\ h = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{10}:\ ZD_f(3,\frac{1}{10}) &= \frac{f(3{,}1)-f(2{,}9)}{1/5} \\
&= 5\cdot\left((3{,}1)^{3{,}1}-(2{,}9)^{2{,}9}\right) \\
&\approx 5\cdot(33{,}35963198-21{,}92573667) \\
&\approx 5\cdot 11{,}43389531 \\
&\approx 57{,}16947654 \\
|Fehler| &\approx 57{,}16947654-56{,}66253179\approx 0{,}50694475
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{100}:\ ZD_f(3,\frac{1}{100}) &= 50\cdot\left((3{,}01)^{3{,}01}-(2{,}99)^{2{,}99}\right) \\
&\approx 50\cdot(27{,}5730718-26{,}43972009) \\
&\approx 50\cdot 1{,}13335171 \\
&\approx 56{,}66758548 \\
|Fehler| &\approx 56{,}66758548-56{,}66253179\approx 0{,}005053685
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{1000}:\ ZD_f(3,\frac{1}{1000}) &= 500\cdot\left((3{,}001)^{3{,}001}-(2{,}999)^{2{,}999}\right) \\
&\approx 500\cdot(27{,}05672654-26{,}94340137) \\
&\approx 500\cdot 0{,}113325166 \\
&\approx 56{,}66258295 \\
|Fehler| &\approx 56{,}66258295-56{,}66253179\approx 0{,}00005116
\end{aligned}$$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$VD_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{10}:\ VD_f(3,\frac{1}{10}) &\approx 63{,}59631979 \\
|Fehler| &\approx 6{,}933787997
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h=\frac{1}{100}:\ VD_f(3,\frac{1}{100}) &\approx 57{,}30718008 \\
|Fehler| &\approx 0{,}64464829
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{1000} : \; VD_f(3, \frac{1}{1000}) &\approx 56{,}7265386 \\ |Fehler| &\approx 0{,}06400681 \end{aligned}$$

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$ZD_f(3,h)$	0,507	0,00505	0,0000512
$VD_f(3,h)$	6,93	0,645	0,0640

Man sieht gut die unterschiedliche Approximationsordnung: Beim Vorwärts-Differenzenquotienten wird der Fehler um den Faktor 10 kleiner, wenn man h durch 10 teilt (Ordnung $O(h)$). Beim zentralen Differenzenquotienten wird der Fehler bei der Zehntelung von h um den Faktor 100 kleiner (Ordnung $O(h^2)$).

Lösung 7.8

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\beta(w)$ um w_0 so erhalten wir also

$$\beta(w) = \arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

Nun betrachten wir $w(\varepsilon) = \sqrt{1-\varepsilon^2} w_0$.

$$\begin{aligned} w'(\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} w_0 \\ w''(\varepsilon) &= -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} w_0 \\ w'''(\varepsilon) &= -\frac{3\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} w_0 \end{aligned}$$

$$w(\varepsilon) = w_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} w_0 + O(\varepsilon^4)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \beta - B = \beta(w(\varepsilon)) - \beta(w_0) &= \arctan w(\varepsilon) - \arctan w_0 \\ &= \frac{w(\varepsilon) - w_0}{1+w_0^2} + O(|w(\varepsilon) - w_0|^2), \\ w(\varepsilon) - w_0 &= -\frac{\varepsilon^2}{2} w_0 + O(\varepsilon^4) \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \tan B + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $w(\varepsilon) - w_0 = O(\varepsilon^2)$.

Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\varepsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned}
\beta - B &= \frac{-\frac{\varepsilon^2}{2}\tan B + O(\varepsilon^4)}{1+\tan^2 B} + \underbrace{O\left(|w(\varepsilon) - w_0|^2\right)}_{=O((\varepsilon^2)^2)} \\
&= \left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1+\tan^2 B} + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Lösung 7.9

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1)\,dx &= \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 - x + 1 \\
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 1 + 3 - 1 + 1 = 4 \\
f(1/2) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{11}{8} \\
\Rightarrow K_f &= \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{11}{8} + 4\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{11}{2} + 4\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{21}{2} = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$1{,}75 = K_f = \int_0^1 f(x)\,dx,\ f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1\,.$$

Dies ist <u>kein</u> Zufall: Es gilt allgemein:
Die Kepler'sche Fassregel integriert Polynome $p \in \mathscr{P}_3$ exakt.

Lösung 7.10

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{aligned}
p(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 2 \\
p(1) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \text{I} \\
p(3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \text{II} \\
p(4) = 10 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \text{III}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} - \text{I}: \quad & 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\text{III} - \text{I}: \quad & 3a_2 + 15a_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_2 = -5a_3 \\
& \Rightarrow\; -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
& \Leftrightarrow\; 2a_3 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow\; a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow \quad & a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$

mit:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{19}{12}x+1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3-\frac{7}{6}x^2+2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x \\
p(x) &= \left(-\frac{2}{12}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}+\frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad +\left(\frac{4}{3}-\frac{14}{3}+\frac{25}{6}-\frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad +\left(-\frac{19}{6}+8-\frac{10}{3}+\frac{5}{2}\right)x \\
&\quad +2\cdot 1 \\
&= 2+4x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
p(5) &= 2+20-\frac{125}{2}+\frac{125}{2}=22\\
\tilde{p}(x) &= p(x)+0{,}02\cdot p_2(x)\\
\Rightarrow\ \tilde{p}(5) &= p(5)+0{,}02\cdot p_2(5)\\
&= 22+\frac{2}{100}\cdot\left(-\frac{125}{6}+\frac{125}{6}-\frac{10}{3}\right)\\
&= 22-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\\
&= 22-\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Lösung 7.11

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\\
f(0) &= \sin 0=0\\
f(\pi/2) &= \sin(\pi/2)=1\\
f(\pi) &= \sin(\pi)=0\\
f(\pi/4) &= \sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Gesucht: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ mit $p(0)=0,\ p(\pi/2)=1,\ p(\pi)=0$

Lagrangeformel: $p(x)=0\,p_0(x)+1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x)+0\,p_\pi(x)$

$$\begin{aligned}
p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}\\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)=\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
p(0)=0 &\Rightarrow a_0=0\\
p(\pi/2)=1 &\Rightarrow a_1\frac{\pi}{2}+a_2\frac{\pi^2}{4}=1\\
&\Rightarrow 2a_1\pi+a_2\pi^2=4 \quad \text{I}\\
p(\pi)=0 &\Rightarrow a_1\pi+a_2\pi^2=0 \quad \text{II}
\end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi=4\ \Rightarrow\ a_1=\frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4+a_2\pi^2=0\ \Leftrightarrow\ a_2=-\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4) - f(\pi/4)| = 0,75 - 0,707106781 \approx 0,042893219$$

Lösung 7.12

a) Ansatz:

$$p(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

Bedingungen:

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{F = E = D = 0}$$

Also:

$$\begin{aligned} p(x) &= Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 \\ p'(x) &= 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 \\ p''(x) &= 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx \end{aligned}$$

Bed.:

$$\begin{aligned} p(1) = 1 &\;\Rightarrow\; A + B + C = 1 \\ p'(1) = 0 &\;\Rightarrow\; 5A + 4B + 3C = 0 \\ p''(1) = 1 &\;\Rightarrow\; 20A + 12B + 6C = 1 \end{aligned}$$

$$A + B + C = 1 \;\Rightarrow\; 3A + 3B + 3C = 3\,,\; 6A + 6B + 6C = 6$$

Einsetzen in 2te Gleichung liefert:

$$2A + B + 3 = 0$$

Einsetzen in 3te Gleichung liefert:

$$14A + 6B + 6 = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= -3 - 2A \qquad \text{und} \quad 14A + 6(-3 - 2A) + 6 = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad 14A - 18 - 12A + 6 = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad 2A = 13 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{13}{2} \\ B &= -3 - 13 = -16 \\ C &= 1 - A - B = 1 - \tfrac{13}{2} + 16 = 17 - \tfrac{13}{2} = \tfrac{34-13}{2} = \tfrac{21}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \tfrac{13}{2}x^5 - 16x^4 + \tfrac{21}{2}x^3}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
p(0) &= 0 \quad \checkmark \\
p(1) &= \frac{13}{2} - 16 + \frac{21}{2} = \frac{34}{2} - 16 = 17 - 16 = 1 \quad \checkmark \\
p'(x) &= \frac{65}{2}x^4 - 64x^3 + \frac{63}{2}x^2 \\
p'(0) &= 0 \quad \checkmark \\
p'(1) &= \frac{65}{2} - 64 + \frac{63}{2} = \frac{128}{2} - 64 = 0 \quad \checkmark \\
p''(x) &= 130x^3 - 192x^2 + 63x \\
p''(0) &= 0 \quad \checkmark \\
p''(1) &= 130 - 192 + 63 = 1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) In entsprechender Weise berechnet man die Hermite-Basisfunktionen für diese Aufgabe: $\dim \mathscr{P}_5 = 6$, 6 Basisfunktionen: $p_{00}, p_{01}, p_{02}, p_{10}, p_{11}, p_{12}$. Wirklich benötigt werden aber in diesem Fall nur die Basisfunktionen p_{10} und p_{12}.

p_{10} ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned}
p_{10}(0) = 0 \quad &, \quad p_{10}(1) = 1 \\
p'_{10}(0) = 0 \quad &, \quad p'_{10}(1) = 0 \\
p''_{10}(0) = 0 \quad &, \quad p''_{10}(1) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; F = E = D = 0$$

Bed.:

$$\begin{aligned}
p_{10}(1) = 1 \quad &\Rightarrow \quad A + B + C = 1 \\
p'_{10}(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 5A + 4B + 3C = 0 \\
p''_{10}(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 20A + 12B + 6C = 0
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$3A + 3B + 3C = 3\,,\; 6A + 6B + 6C = 6$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 2A + B = -3 && \Leftrightarrow \quad B = -3 - 2A \\
& 14A + 6B = -6 && \Rightarrow \quad 14A - 18 - 12A = -6 \\
& && \Leftrightarrow \quad 2A = 12 \\
& && \Leftrightarrow \quad A = 6 \\
\Rightarrow \quad & B = -3 - 12 = -15 \\
\Rightarrow \quad & C = 10
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \boxed{p_{10}(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3}$$

$$\begin{aligned} p'_{10}(x) &= 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 \\ &= 30x^2(x-1)^2 \\ p''_{10}(x) &= 120x^3 - 180x^2 + 60x \\ &= 120x(x-\frac{1}{2})(x-1) \end{aligned}$$

Probe zeigt alles o.k.

p_{12} ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned} p_{12}(0) = 0 \quad &, \quad p_{12}(1) = 0 \\ p'_{12}(0) = 0 \quad &, \quad p'_{12}(1) = 0 \\ p''_{12}(0) = 0 \quad &, \quad p''_{12}(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F = E = D = 0$$

Bed.:

$$\begin{aligned} p_{12}(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A + B + C + = 0 \\ p'_{12}(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 5A + 4B + 3C = 0 \\ p''_{12}(1) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 20A + 12B + 6C = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2A + B = 0 \quad \text{und} \quad 14A + 6B = 1 \\ &\Rightarrow \quad 2A = 1 \\ &\quad\;\; A = \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad B = -1 \\ &\Rightarrow \quad C = \tfrac{1}{2} \\ &\quad\;\; \Rightarrow \quad \boxed{p_{12}(x) = \tfrac{1}{2}x^5 - x^4 + \tfrac{1}{2}x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_{12}(x) &= \frac{5}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 \\ p''_{12}(x) &= 10x^3 - 12x^2 + 3x \end{aligned}$$

Probe zeigt alles o.k.
Damit ergibt sich noch folgende Lösung von Aufgabe a):

$$p(x) = 1 \cdot p_{10}(x) + 1 \cdot p_{12}(x) = \frac{13}{2}x^5 - 16x^4 + \frac{21}{2}x^3 \quad \checkmark$$

Lösung 7.13 Interpolation von $\cos(\frac{\pi}{2}t)$:

t_i	0	1	2	3	4
y_i	1	0	-1	0	1

$p_1(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_1(t) = 1 \cdot L_0(t) + (-1) \cdot L_2(t) + 1 \cdot L_4(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &= \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1(t) &= L_0(t) - L_2(t) + L_4(t) \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) + \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \\ &= \frac{1}{24}(2t^4 - 16t^3 + 46t^2 - 56t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \\ &= -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \end{aligned}$$

Interpolation von $\sin(\frac{\pi}{2}t)$:

t_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	0	-1	0

$p_2(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_2(t) = 1 \cdot L_1(t) + (-1) \cdot L_3(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(t) &= L_1(t) - L_3(t) \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) + \frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \\ &= \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{aligned}$$

Da wir für die Berechnung von p die Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4 vorgegeben haben, schneiden sich die beiden Kurven $\gamma(t)$ und $p(t)$ in den Punkten

$$\gamma(0) = p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(1) = p(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(2) = p(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(3) = p(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

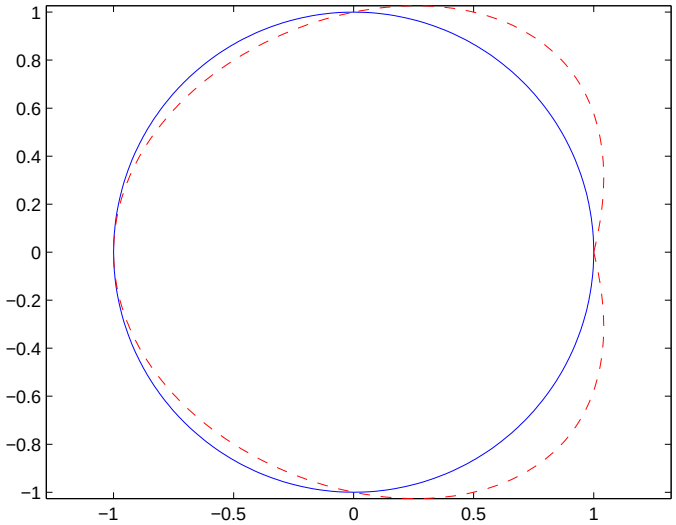
$$\text{und } \gamma(4) = p(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$p(t)$ ist eine geschlossene Kurve, da $p(0) = p(4)$.

Lösung 7.14

```
function plotCurveIn2d
% plots two curves in 2d
y = 0:0.01:4;

x_1 = cos(pi*y*0.5);
x_2 = sin(pi*y*0.5);

plot(x_1,x_2)
axis equal

% damit zwei Ausgaben uebereinander gelegt werden koennen
hold on

% y.^4 bedeutet, dass komponentenweise y(i)^4 berechnet wird
z_1 = -1 * y.^4 / 6 + 4 * y.^3 / 3 - 17 * y.^2 / 6 + 2 * y/3 + 1;
z_2 = (y.^3 - 6 * y.^2+ 8 * y) / 3;

% mit 'r--' legt man fest, dass die zweite Ausgabe
% rot und gestrichelt dargestellt wird
```

```
plot(z_1,z_2,'r--')

hold off
```



Die Kurve $\gamma(t)$ ist in blau dargestellt und die Kurve $p(t)$ in rot und gestrichelt.

Lösung 7.15 Wir wählen äquidistante Knoten (x,y) mit $x,y = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ (d.h. Knoten mit gleichem abstand), so dass wir für die Interpolation die folgenden Werte vorschreiben:

	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$0{,}75$	$0{,}75$	0
$\frac{2}{3}$	0	$0{,}75$	$0{,}75$	0
1	0	0	0	0

Diese Tabelle ist so zu lesen, dass in der ersten Zeile die Werte für y stehen, in der ersten Spalte die Werte für x und in den restlichen Feldern die zugehörigen Werte $f(x,y)$.
Benötigt werden also die Lagrangepolynome
$L_{11}(x,y)$ (für das gilt $L_{11}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0),
$L_{12}(x,y)$ (für das gilt $L_{12}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0),
$L_{21}(x,y)$ (für das gilt $L_{21}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0) und
$L_{22}(x,y)$ (für das gilt $L_{22}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0).

Am einfachsten lassen sich diese zweidimensionalen Lagrangepolynome berechnen, indem man die entsprechenden eindimensionalen Lagrangepolynome miteinander multipliziert. Also berechnen wir die Lagrangepolynome
$L_1(x)$ mit $L_1(x) = 1$ für $x = \frac{1}{3}$, Null sonst und
$L_2(x)$ mit $L_2(x) = 1$ für $x = \frac{2}{3}$ und Null sonst.

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{2}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}-0)(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})(\frac{1}{3}-1)} \\
&= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-1)} \\
&= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
L_{11}(x,y) &= L_1(x)L_1(y) \\
&= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-2)(y-1) \\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-2)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12}(x,y) &= L_{21}(x,y) \\
&= L_1(x)L_2(y) \\
&= -\frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1) \\
&= -20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{22}(x,y) &= L_2(x)L_2(y) \\
&= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1)\left[-\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1)\right] \\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-1)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p(x,y) &= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+L_{12}(x,y)+L_{21}(x,y)+L_{22}(x,y)] \\
&= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+2L_{12}(x,y)+L_{22}(x,y)] \\
&= 15\frac{3}{16}xy\,[(3x-2)(x-1)(3y-2)(y-1) \\
&\quad -2(3x-2)(x-1)(3y-1)(y-1) \\
&\quad +(3x-1)(x-1)(3y-1)(y-1)] \\
&= 15\frac{3}{16}xy(x-1)(y-1)\,[(3x-2)(3y-2) \\
&\quad -2(3x-2)(3y-1)+(3x-1)(3y-1)]
\end{aligned}
$$

Lösung 7.16 Die baryzentrischen Koordinaten des Punktes p_i bezüglich des Dreiecks mit den Eckpunkten a_0, a_1 und a_2 kann man berechnen, indem man das folgende Gleichungssystem löst

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = p_i - a_0$$

und die nullte Komponente der baryzentrischen Koordinate wie folgt berechnet

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

<u>p_1 in baryzentrischen Koordinaten:</u>

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad \lambda_2 &= 2{,}6 - 5\lambda_1 \\ 3\lambda_1 + 5(2{,}6 - 5\lambda_1) &= 2 \\ \Rightarrow \qquad \lambda_1 &= \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= 2{,}6 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 - 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$
d.h. p_1 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.4, 0.5, 0.1)$.
Der Punkt p_1 liegt im gegebenen Dreieck, da für λ_i mit $i = 0, 1, 2$ gilt $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

<u>p_2 in baryzentrischen Koordinaten:</u>

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad \lambda_2 &= 0{,}1 - 5\lambda_1 \\ 3\lambda_1 + 5(0{,}1 - 5\lambda_1) &= 2{,}7 \\ \Rightarrow \qquad \lambda_1 &= -0{,}1 \\ \lambda_2 &= 0{,}1 - 5(-0{,}1) = 0{,}6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 + 0{,}1 - 0{,}6 = 0{,}5$
d.h. p_2 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.5, -0.1, 0.6)$.
Der Punkt p_2 liegt nicht im gegebenen Dreieck, da $\lambda_1 < 0$.

Lösung 7.17

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
```

```
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = x*x;
end

% Hauptprogramm:
% Die Berechnung des Integrals
value = 0;

% Die beiden Randwerte
value = value + evaluateF(a) / 2;
value = value + evaluateF(b) / 2;

% Anzahl der Teilintervalle
n = (b-a) / h;

% Iteriere ueber die Teilintervalle
for i=1:n-1
  value = value + evaluateF(a + i*h);
end

% anschliessend multipliziere alles mit h
value = value * h;
end
```

Der exakte Wert des Integrals ist $\frac{1}{3}$, damit sieht die Konvergenztabelle folgendermaßen aus:

Gitterweite h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Fehler	0.0016667	0.00041667	0.00010417	2.6042e-05	6.5104e-06

Man sieht, dass sich der Fehler viertelt, wenn die Gitterweiter halbiert wird.

Lösung 7.18 Ableitungen der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1-x)^5} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{120}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von $f(y)$ um den Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(0) + f'(0)y + \frac{1}{2}f''(0)y^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)y^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)y^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)y^5 + O(|y|^6) \\ &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + O(|y|^6) \end{aligned}$$

Lösung 7.19

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \\ -2f(x) &= -2f(x) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h)$$

Durch Grenzübergang folgt, dass der Grenzwert gleich $f''(x)$ ist.

Lösung 7.20

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2}f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

8 Komplexe Zahlen

Lösung 8.1

a)

$$\begin{aligned}(4+3i)+2(6-2i) &= 4+3i+12-4i \\ &= 16-i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4+3i)(6-2i) &= 24+18i-8i+6 \\ &= 30+10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r=\frac{\sqrt{3+1}}{2}=1, \qquad \sin\varphi=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

Wegen $r=1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30°, also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= i\end{aligned}$$

Lösung 8.2 Die erste Eigenschaft (G1) wird nicht erfüllt, denn

$$g\left(\begin{pmatrix}1-i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-i\\0\end{pmatrix}\right)=(1-i)^2=1-2i-1=-2i\notin\mathbb{R}.$$

Für die zweite Eigenschaft (G2) findet man – wenn man die Variante von (G2) für komplexe Vektorräume betrachtet – ebenfalls ein Gegenbeispiel

$$g\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1+i)(1+2i) = 1+i+2i-2 = -1+3i$$

$$\overline{g\left(\begin{pmatrix} 1+2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \overline{(1+2i)(1+i)} = \overline{1+i+2i-2} = \overline{-1+3i} = -1-3i \neq -1+3i$$

Die reelle Variante von (G2) ist natürlich erfüllt.
Die Eigenschaft (G3) macht keine Probleme, denn

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) &= g\left(\begin{pmatrix} z_1+v_1 \\ z_2+v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (z_1+v_1)c_1 + (z_2+v_2)c_2 \\ &= (z_1c_2 + z_2c_2) + (v_1c_1 + v_2c_2) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (G4) macht ebenfalls keine Probleme, denn für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) &= \alpha z_1 c_1 + \alpha z_2 c_2 \\ &= \alpha(z_1c_1 + z_2c_2) \\ &= \alpha g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Lösung 8.3

$$a = x+iy \quad , \quad b = u+iv \, , \, c = r+is \quad \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; (a \cdot b) \cdot c &= [(x+iy)(u+iv)] \cdot (r+is) \\ &= [(xu-yv) + i(xv+yu)] \cdot (r+is) \\ &= [(xu-yv)r - (xv+yu)s] + i[(xu-yv)s + (xv+yu)r] \\ &= (xur - yvr - xvs - yus) + i(xus - yvs + xvr + yur) = (*) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (x+iy) \cdot [(u+iv)(r+is)] \\ &= (x+iy) \cdot [(ur-vs) + i(us+vr)] \\ &= [x(ur-vs) - y(us+vr)] + i[y(ur-vs) + x(us+vr)] \\ &= (xur - xvs - yus - yvr) + i(xus + xvr + yur - yvs) \\ &= (xur - yvr - xvs - yus) + i(xus - yvs + xvr + yur) = (*) \\ &\quad \Rightarrow \text{ Beh.!} \end{aligned}$$

Lösung 8.4

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$
\begin{array}{llllll}
z^3 = -8 = 8e^{i\pi} & & & = 8e^{3i\pi} & & = 8e^{5i\pi} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{i\pi} & \text{oder} & z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 1 + i\sqrt{3} & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 1 - i\sqrt{3}
\end{array}
$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $\boxed{z_1 = -2}$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
(z^3 & + & 8) & : & (z+2) & = & z^2 - 2z + 4 \\
-(z^3 & + & 2z^2) & & & & \\
\hline
-2z^2 & + & 8 & & & & \\
-(-2z^2 & - & 4z) & & & & \\
\hline
 & & 4z & + & 8 & & \\
 & & -(4z & + & 8) & & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Probe: $(z^2 - 2z + 4)(z+2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$
\begin{aligned}
z^2 - 2z + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - 3i^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}},\ \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(1+2\sqrt{3}i-3\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-i^2\cdot 3\right) = (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark\\
\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^2\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^2 = i \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$\begin{aligned}
z^2 = 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^2 = -4i \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z^2}{4} = i \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{zi}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad zi = \pm\sqrt{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}i(1+i) = \pm\sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}$$

Die vier Lösungen sind also

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\
z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\
z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\
z_4 &= \sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$\begin{aligned}
(2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\
(2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
\frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\
&= \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i.
\end{aligned}$$

Lösung 8.5 Verwende die p-q-Formel:

a)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-3i)^2}{4}+2+2i} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{1-6i-9+8+8i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2i, \quad x_2 = -1+i$

Dabei ist $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{2\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{2+2\sqrt{3}i} \\
&= -\sqrt{2} \pm \sqrt{4}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{3}+i\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{3}+i, \quad x_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{3}-i$

Um sich die Winkel zu überlegen, ist eine Skizze hilfreich.

Lösung 8.6

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja!

Begründung:
Die Eulersche Formel lautet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus ergibt sich:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i,$$

wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Wegen

$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i,$$

da $\cos(-x) = \cos x$ (cos ist gerade!) und $\sin(-x) = -\sin x$ (sin ist ungerade!), gilt also

a) Nein!

b) Ja!

Wegen $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm i^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{i}$.
Die Eulersche Formel besagt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,.$$

$\frac{\pi}{4}$ entspricht einem Winkel von 45°.
Behauptung: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Nachweis:

- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\Rightarrow\; \cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.
- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ (folgt aus Additionstheorem für sin!)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\\
&\Rightarrow\quad \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\\
&\Rightarrow\quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} > 0\,!
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

e) Ja!

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 &= \frac{2}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i+i^2)\\
&= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \sqrt{i} &= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,,\\
-\sqrt{i} &= -\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Also:

c) Nein!

d) Ja!

Lösung 8.7 Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein beliebiges Polynom mit $a_i \in \mathbb{R}$.
Zuerst beweisen wir, $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$:

$$\begin{aligned}
p(\overline{z}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} \qquad \text{da } a_i = \overline{a_i} \text{ für } a_i \in \mathbb{R} \\
&= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} \\
&= \overline{p(z)}
\end{aligned}$$

Sei nun z eine Nullstelle des Polynoms $p(z)$, dann gilt $p(z) = 0$. Da $0 \in \mathbb{R}$ gilt $0 = \overline{0}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \overline{p(z)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad p(\overline{z}) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung 8.8

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}, r \geq 0$$

$$\begin{aligned}
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i3\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(-1+i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i5\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(-1-i) \\
z^4 = -16 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = 16e^{i7\pi} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1-i)
\end{aligned}$$

Lösung 8.9 Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ in $\mathbb{C}$:

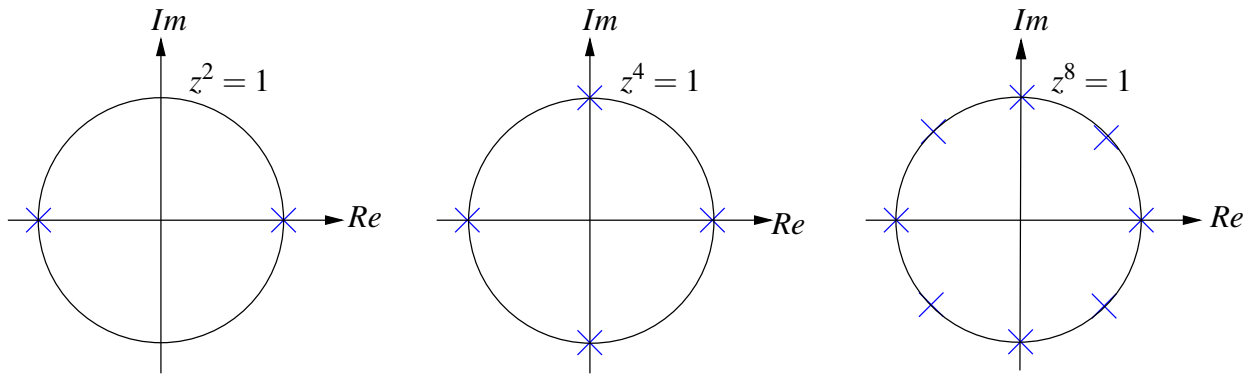
$$\begin{aligned}
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i0} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i2\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}$$

Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i0} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i2\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i4\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1 \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i6\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i
\end{aligned}$$

Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i0} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i2\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i4\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i6\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i8\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1 \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i10\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i12\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \\
z^8 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^8 = e^{i14\pi} \quad &&\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



Eine Lösungen der allgemeinen Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

ist immer $z = 1$. Die restlichen $k-1$ Lösungen liegen gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis:

$$z = e^{2\pi i \frac{l}{k}} \text{ für } l = 0, 1, \ldots k-1.$$

Die Lösungen von $z^{2k} = 1$ sind die k Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ und k weitere Lösungen.

9 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen

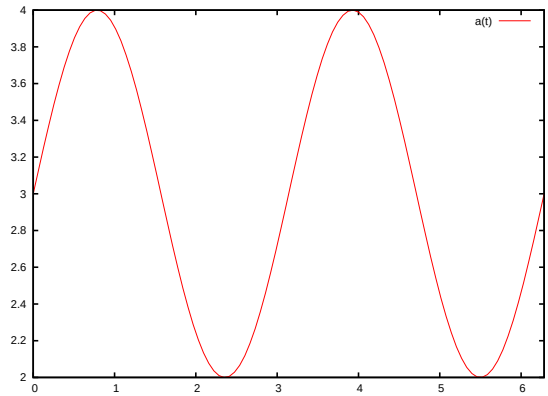
Lösung 9.1

a) $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{aligned}
A\gamma(t)\cdot\gamma(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t+\sin t \\ \cos t+3\sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= 3\cos^2 t+2\cos t\sin t+3\sin^2 t \\
&= 3(\cos^2 t+\sin^2 t)+2\cos t\sin t \\
&= 3+2\cos t\sin t
\end{aligned}$$

c) Funktion $a(t)$ auf dem Intervall $[0,2\pi)$:



d)

$$\begin{aligned}
a'(t) &= -2\sin^2 t+2\cos^2 t \\
a'(t) &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad -2\sin^2 t+2\cos^2 t &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad \cos^2 t &= \sin^2 t \\
\Leftrightarrow\quad \cos t &= \pm\sin t \\
\Leftrightarrow\quad t &= \tfrac{\pi}{4},\tfrac{3}{4}\pi,\tfrac{5}{4}\pi \text{ oder } \tfrac{7}{4}\pi
\end{aligned}$$

$$a''(t) = -4\sin t\cos t-4\cos t\sin t = -8\sin t\cos t$$

$$\begin{aligned}
a''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -8\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4 \\
a''\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= -8\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \\
a''\left(\frac{5}{4}\pi\right) &= -8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 \\
a''\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= -8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 4
\end{aligned}$$

Die Minima der Funktion $a(t)$ liegen also bei $t = \frac{3}{4}\pi$ und $t = \frac{7}{4}\pi$.

$$\begin{aligned} a(\frac{3}{4}\pi) &= 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \\ a(\frac{7}{4}\pi) &= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \min\{Ax \cdot x \mid \|x\| = 1\} &= \min\left\{A\gamma(t) \cdot \gamma(t) \,\middle|\, t \in [0, 2\pi)\right\} \\ &= \min\left\{a(t) \,\middle|\, t \in [0, 2\pi)\right\} = 2 \end{aligned}$$

Ein Vektor, an dem das Minimum angenommen wird ist also der Vektor

$$\gamma\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \gamma\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 9.2

a)

$$\begin{aligned} M &:= \left\{x \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\right\} \\ &= \left\{x \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\right\} \\ &= \left\{x \,\middle|\, 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 1\right\} \\ &= \left\{x \,\middle|\, \left(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

Bei der Menge M handelt es sich also um eine Ellipse mit Halbachsen der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Richtung der x_1-Achse und $\sqrt{2}$ in Richtung der x_2-Achse.

b)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Bei der Matrix G handelt es sich um eine Drehmatrix, die um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht und bei der Matrix H um eine Drehmatrix, die um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ dreht. Es gilt also $H = G^{-1}$ und da sowohl G als auch H orthogonal sind gilt auch $H = G^T$.

$$\begin{aligned} \tilde{M} &:= \{x \,|\, \tilde{A}x \cdot x = 1\} \\ &= \{x \,|\, GAHx \cdot x = 1\} \\ &= \{x \,|\, AHx \cdot Hx = 1\} \end{aligned}$$

Da Hx bedeutet, dass der Vektor x um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird, ist $\tilde{M}$ die um $\frac{\pi}{2}$ gedrehte Ellipse, die durch die Menge M dargestellt wird.

c) Bei der Menge N handelt es sich um zwei Hyperbel-Äste, die durch die Gleichung $y = \pm\sqrt{4x^2 - 2}$ beschrieben werden.

Lösung 9.3 Berechnung des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= 3 \pm \sqrt{1} = 2 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} (A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \Rightarrow \quad x &= -y \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned} (A - 4\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \Rightarrow \quad x &= y \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T = U$$

$$\begin{aligned}
U^T A U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung 9.4

$$\begin{aligned}
D^T D &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$D \neq D^T$ für $\alpha \neq k\pi$
Die Drehmatrix D ist also orthogonal aber in der Regel nicht symmetrisch.

Die Spiegelungsmatrix S ist symmetrisch, denn

$$\begin{aligned}
S^T &= \left(\mathbb{1} - 2nn^T\right)^T \\
&= \mathbb{1}^T - 2\left(nn^T\right)^T \\
&= \mathbb{1} - 2n^{T\,T} n^T \\
&= \mathbb{1} - 2nn^T \\
&= S.
\end{aligned}$$

Des weiteren ist sie auch orthognal, denn

$$\begin{aligned}
S^T S = SS &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\
&= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + 4n \underbrace{n^T n}_{=n\cdot n=1} n^T \\
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\
&= \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Lösung 9.5 (I) Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda)-4 \\ &= \lambda^2-3\lambda-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2-3\lambda-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=4$ die Eigenwerte von A.
(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
a) Für $\lambda_1=-1$ gilt:

$$A-\lambda_1 I = A+I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x+2y=0 \quad \text{mit} \quad y=1 \Rightarrow x=-2y=-2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1=-1$ von A.

$$\text{Probe: } A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für $\lambda_2=4$ gilt:

$$A-\lambda_2 I = A-4I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x+2y=0 \Leftrightarrow -2x+y=0 \quad \text{mit} \quad x=1 \Rightarrow y=2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2=4$ von A.

$$\text{Probe: } A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(III) Es sei

$$B := A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von B lautet: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Offensichtlich gilt: $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$ und $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$ ($-1 = -1$ und $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).
Fazit: Die Eigenwerte von A^{-1} sind die Kehrwerte der Eigenwerte von A!
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$B + I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $B = A^{-1}$.
b) Für $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ gilt:

$$B - \frac{1}{4}I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ von $B = A^{-1}$.
Fazit: Die Eigenwerte von A^{-1} sind die Kehrwerte der Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn λ_1 ein Eigenwert von A ist und $\frac{1}{\lambda_1}$ folglich ein Eigenwert von A^{-1}, so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.

Lösung 9.6

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n-facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{I}) = \det((1-\lambda)\mathbf{I}) = (1-\lambda)^n \det \mathbf{I} = (1-\lambda)^n \ .$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine 2×2 Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.

Lösung 9.7 Die zu A gehörende Diagonalmatrix hat auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1 + 2 + 4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung 9.8 (I) **Bestimmung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (-5+4\lambda+\lambda^2)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda \\ &= -20 + 16\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 36 - 9\lambda \\ &= 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

Als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms raten wir $\lambda = 4$ und testen

$$P(4) = -64 + 48 + 16 = 0.$$

Mit Hilfe der Polynomdivision oder des Horner-Schemas erhält man daraus

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (\lambda - 4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = (\lambda - 4)(-1)(\lambda + 2)^2.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4.$$

(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
Für $\lambda_1 = -2$ erhält man:

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\vec{x} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = x_1 + x_3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 = \lambda_2$.
Man sieht leicht ein (oder rechnet dies schnell nach), dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind.

Entsprechend gilt für $\lambda_3 = 4$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{x} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0. \\ \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_3 &= 2x_2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$.

Wir behaupten, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned} \lambda + \nu &= 0 \\ \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ \mu + 2\nu &= 0. \end{aligned}$$

Aus erster und zweiter Zeile folgt $\mu = 0$, mit der dritten Zeile folgt $\nu = 0$ und damit aus der ersten Zeile $\lambda = 0$. Dies war zu zeigen.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist also invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind.

Damit ist $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, wir berechnen also noch $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

und erhalten:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich rechnen wir nach:

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung 9.9

$$\begin{aligned}
P_1(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) \\
&= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 3 + 3\lambda \\
&= 3 - 7\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda \\
&= -4\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(\lambda) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2-5\lambda+4\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda\left[\left(\lambda-\tfrac{5}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \lambda &= 0 \text{ oder } \tfrac{5}{2}-\sqrt{\tfrac{9}{4}} \text{ oder } \tfrac{5}{2}+\sqrt{\tfrac{9}{4}} \\
\Leftrightarrow \quad \lambda &= 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 4
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$.
Nun berechnen wir die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda) = \det(B-\lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-3-\lambda)^2(-1-\lambda)+1+1-(-3-\lambda)-(-3-\lambda)-(-1-\lambda) \\
&= \left(9+6\lambda+\lambda^2\right)(-1-\lambda)+9+3\lambda \\
&= -9-6\lambda-\lambda^2-9\lambda-6\lambda^2-\lambda^3+9+3\lambda \\
&= -12\lambda-7\lambda^2-\lambda^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2+7\lambda+12\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\left(\lambda+\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{49}{4}+\tfrac{48}{4}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\left(\lambda+\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \lambda &= 0 \text{ oder } -\tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}} \text{ oder } -\tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}} \\
\Leftrightarrow \quad \lambda &= 0 \text{ oder } -4 \text{ oder } -3
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$ sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -3$.
Die Eigenwerte der Matrix $A - 4\mathbb{1}$ erhält man also, indem man die Eigenwerte der Matrix A nimmt und jeweils 4 subtrahiert.

Lösung 9.10

a)

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{4+4}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ 6 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda(3-\lambda)-4)\,((-2-\lambda)(7-\lambda)-36) \\ &= \left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right)\left(\lambda^2 - 5\lambda - 50\right) \end{aligned}$$

c) Die Eigenwerte der Matrix A setzen sich zusammen aus den Eigenwerten der Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ und den Eigenwerten der Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\lambda_3 = -5$ und $\lambda_4 = 10$. Füllen wir die Eigenvektoren der beiden 2×2 Matrizen passend mit Nullen auf, so erhalten wir die Eigenvektoren der Matrix A, denn

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für λ Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ zugehörigem Eigenvektor.

Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist, ist $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist, ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_2.

Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist, ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_3.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist, ist $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_4.

Alternativ lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren auch wie folgt berechnen:

$$\begin{array}{rrcll} P(\lambda)=0 \Leftrightarrow & \left(\lambda^2-3\lambda-4\right) & = & 0 & \text{oder} \quad \left(\lambda^2-5\lambda-50\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}} & \text{oder} \quad \lambda = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}} \end{array}$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_1=-1, \quad \lambda_2=4, \quad \lambda_3=-5, \quad \lambda_4=10$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1=-1$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A+1\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x_1+2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1+4x_2 & = & 0 \\ & -x_3+6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3+8x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1=-2x_2$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3=x_4=0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=-1$ ist also der Vektor $v_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2=4$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A-4\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -4x_1+2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1-x_2 & = & 0 \\ & -6x_3+6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3+3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_2=2x_1$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3=x_4=0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2=4$ ist also der Vektor

$$v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$:

$$\begin{aligned}
& & (A+5\mathbb{1})x &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & 5x_1 + 2x_2 &= 0 \\
& & 2x_1 + 8x_2 &= 0 \\
& & 3x_3 + 6x_4 &= 0 \\
& & 6x_3 + 12x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = -2x_4$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist also der Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$:

$$\begin{aligned}
& & (A-10\mathbb{1})x &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & -10x_1 + 2x_2 &= 0 \\
& & 2x_1 - 7x_2 &= 0 \\
& & -12x_3 + 6x_4 &= 0 \\
& & 6x_3 - 3x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_4 = 2x_3$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist also der Vektor

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 9.11 Die Gleichung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ist äquivalent zu der Gleichung

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1,$$

wobei $\mathbf{A}$ folgende symmetrische 3×3-Matrix sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}$ den Vektor $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet. Es gilt nämlich

$$\mathbf{Ax} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6x + 2y - 2z \\ 2x + 7y \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$$

und

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{3}[6x^2 + 2xy - 2xz + 2xy + 7y^2 - 2xz + 5z^2] = 2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz,$$

woraus obige Behauptung folgt. Um die Hauptachsen dieser Fläche zu bestimmen führen wir eine Hauptachsentransformation durch. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)(\frac{7}{3} - \lambda)(\frac{5}{3} - \lambda) - \frac{4}{9}(\frac{7}{3} - \lambda) - (\frac{5}{3} - \lambda)\frac{4}{9} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{35}{9}) - \frac{28}{27} + \frac{4}{9}\lambda - \frac{20}{27} + \frac{4}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \frac{35}{9}\lambda + 2\lambda^2 - 8\lambda + \frac{70}{9} - \frac{48}{27} + \frac{8}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-\frac{35}{9} + \frac{8}{9} - 8)\lambda + \frac{54}{9} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Durch Probieren erhält man, dass $\lambda = 1$ eine Lösung der Gleichung $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, da $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas erhält man dann

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

D. h. die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren: Für $\lambda_1 = 1$ erhält man:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \mathbf{I})\vec{x} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x + 2y - 2z &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x + 4y &= 0 \\ & -2x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = z \quad \Leftrightarrow \quad z = x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Für $\lambda_2 = 2$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\vec{x} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +2y - 2z &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x + y &= 0 \\ & -2x - z &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow y = z \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

und aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die dritte Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
Für $\lambda_3 = 3$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{x} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 0 \\ -2x & & -4z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = y \quad \Leftrightarrow \quad y = x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = -2z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2}x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$.

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0, \\
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4-2-2) = 0, \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0.
\end{aligned}$$

D. h. die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und die Matrix

$$\mathbf{V} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, d. h. es gilt $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ mit

$$\mathbf{V}^T := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$$

wie man leicht nachrechnet. Es folgt

$$\mathbf{AV} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^T\mathbf{AV} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \mathbf{D}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{VDV}^T \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\mathbf{y} := \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-y+2z \\ -x+2y+2z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{DV}^T\mathbf{x}, \mathbf{V}^T\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{VDV}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1.$$

Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ alle positiv sind, ist die durch

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1$$

definierte Fläche ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lösung 9.12 Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13-9\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-9\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-9\lambda \end{pmatrix} \\ &= 9^{-3}((13-9\lambda)^2(10-9\lambda)+16+16-4(13-9\lambda)-4(13-9\lambda)-16(10-9\lambda)) \\ &= 9^{-3}((169-234\lambda+81\lambda^2)(10-9\lambda)+32-104+72\lambda-160+144\lambda) \\ &= 9^{-3}(1690-2340\lambda+810\lambda^2-1521\lambda+2106\lambda^2-729\lambda^3-232+216\lambda) \\ &= 2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3 \end{aligned}$$

Aus dem Tipp wissen wir, dass die Matrix A ganzzahlige Eigenwerte hat. Folglich raten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und testen

$$P(1) = 2-5+4-1 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$(2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3) : (\lambda-1) = -\lambda^2+3\lambda-2$$

$$\begin{aligned} & -\lambda^2+3\lambda-2 &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2-3\lambda+2 &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda &=& \ \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ & &=& \ 1 \text{ oder } 2 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{lrcll}
 & (A-2\mathbb{1})x & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & (9A-18\mathbb{1})x & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -\frac{1}{5}I = I' \\ \frac{4}{5}I + II = II' \\ -\frac{2}{5}I + III = III' \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{9}II' \\ -2II' + III' \end{array} \\
\Rightarrow & x_2 & = & -2x_3 & \\
 & x_1 & = & \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 & \\
 & & = & -\frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 & \\
 & & = & -2x_3 &
\end{array}$$

Mit $x_3 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{array}{lrcl}
 & (A-\mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (9A-9\mathbb{1})x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Alle Zeilen sind äquivalent

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also die Ebene durch den Ursprung, die durch diese Gleichung gegeben ist. Man kann sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2(x_1+x_2) \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir suchen nun als Eigenvektoren zwei zueinander senkrechte (und normierte) Richtungsvektoren in dieser Ebene.

Wir wählen als ersten z.B. den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (man kann natürlich einen beliebigen Nicht-Null-Vektor in der Ebene wählen, dieser hat aber eine besonders rechenfreundliche Länge) und normieren ihn, so dass wir den Vektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

erhalten. Als zweiten Eigenvektor suchen wir einen Vektor aus demselben Eigenraum, der senkrecht auf v_1 steht, das heißt folgende zwei Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor senkrecht auf v_1 steht und die zweite Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor im selben Eigenraum liegt. Addition beider Gleichungen ergibt

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt erhält man

$$x_1 = -2x_2.$$

Mit $x_2 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren v_1, v_2 und v_3 senkrecht auf einander stehen ($v_1 \cdot v_3 = 0$ und $v_2 \cdot v_3 = 0$) und normiert sind, ist die Matrix

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix.

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 9.13

a)

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda\mathbb{1}) &= 0\\
\Leftrightarrow\quad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} &= 0\\
\Leftrightarrow\quad \lambda^2-\lambda-1 &= 0\\
\Leftrightarrow\quad \lambda_{1/2} &= \tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+1}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_i\mathbb{1})\begin{pmatrix}\lambda_i\\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 1\\ 1 & -\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\lambda_i^2+\lambda_i+1\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus den vorherigen Aufgabenteil wissen wir $\lambda_i^2-\lambda_i-1=0$, so dass auch die erste Komponente des Vektors gleich Null und die Behauptung bewiesen ist.

c) Für die inverse Matrix einer 2×2 Matrix $B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ gilt

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$A=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}$$

mit $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und $B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}$

d)

$$A^2=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}=B\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}B^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n=B\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & -\lambda_1^n\lambda_2\\ -\lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}$$

e)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y_{n+1} = A^n y_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad x_n &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2^n} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Probe: $\quad x_1 = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1, \quad x_2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{2^2\sqrt{5}} = 1.$

Lösung 9.14

a) Ja! A orthogonal $\Rightarrow AA^T = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte von AA^T sind gleich 1 $\Rightarrow$ die Singulärwerte von A sind gleich $\sqrt{1} = 1$

b) Nein! Die Matrix $A = -\mathbb{1}$ ist orthogonal und ihre Eigenwerte sind -1. Da in diesem Fall $A^T A = \mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A jedoch gleich 1.

c) Ja! Die Singulärwerte von A ergeben sich aus den Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A = \mathbb{1}$ und $\sqrt{1} = 1$.

d) Nein! Betrachten Sie die Matrix $A = 2\mathbb{1}$. Da in diesem Fall $A^T A = 4\mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A gleich 2.

e) Nein! A symmetrisch $\Rightarrow A = A^T$

$$\Rightarrow AA^T = A^2 = UD^2U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^T$$

$\Rightarrow$ Für die Singulärwerte σ_i von A gilt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$ (siehe auch b))

f) Ja! Begründung siehe oben.

Lösung 9.15

a) Da die Skalierung nichts daran ändert, ob die Funktionen orthogonal ist, oder nicht, prüfen wir erst die Orthogonalität nach.

$$\begin{aligned}
g(1, \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx \\
&= \sin(x)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(1,\cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(2x)\,dx \\
&\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos(z)\frac{1}{2}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\sin(z)\Big|_0^{4\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\cos(x),\cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos^2(x)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \sin(x)\cos^2(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)2\cos(x)\left(-\sin(x)\right)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - \int \sin(x)2\sin(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{3}\sin^3(x)
\end{aligned}$$

(Alternativ Substitution $z = \sin x$.)

Da wir nun wissen, dass alle drei Funktionen orthogonal zueinander sind, berechnen wir die Skalierung, um sie zur normieren.

$$\begin{aligned}
g(1,1) &= \int_0^{2\pi} 1\,dx \\
&= x\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}) = 1$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) - \int -\sin(x)\sin(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & \overset{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}{=} & \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & 2\int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) + x \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & = & \frac{1}{2}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g(\cos(x), \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi + \cos(2\pi)\sin(2\pi)\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}) = 1$$

$$\begin{aligned}
g(\cos(2x), \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(2x)\,dx \\
&\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos^2(z)\frac{1}{2}\,dz \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)\Big|_0^{4\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}) = 1$$

Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ bilden also ein ON-System.

b) Mit $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_1(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\varphi_2(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ sowie $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}$ gilt

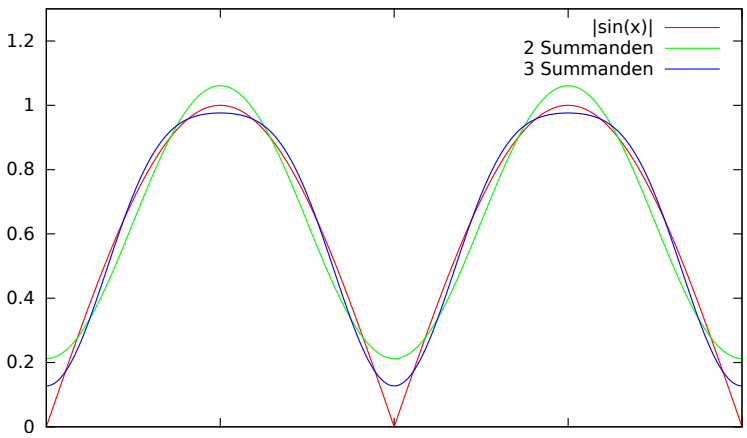
$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + a_2\,\varphi_2(x) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\|f\|_g^2 = g(f,f) &= g\left(\sum_{i=0}^{2} a_i\,\varphi_i(x), \sum_{j=0}^{2} a_j\,\varphi_j(x)\right) \\
\text{(bilinear)} \quad &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i\,a_j\,\underbrace{g(\varphi_i(x),\varphi_j(x))}_{=1 \text{ für } i=j,\ 0 \text{ sonst}} \\
\text{(ON Eigenschaft)} \quad &= \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{9\pi}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

- Das Ergebnis zur Berechnung der induzierten Norm $\|f\|_g$ ist in sofern interessant, als dass die über ein Integral definierte Norm einer kontinuierlichen Funktion mit der euklidischen Norm des diskreten Koeffizientenvektors $a = (a_0, a_1, a_2)$ übereinstimmt, kurz: $\|f\|_g = \|a\|$.
- Die Komposition von Sinus- und Kosinusfunktionen mit Vielfachen einer Grundfrequenz wird i. A. auch *Fourier-Reihe* genannt. Geeignete Funktionen können durch eine solche Reihe trigonometrischer Polynome beliebig gut approximiert werden. Im vorliegenden Fall handelt es sich um die ersten beiden Summanden der Reihe
$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k)^2 - 1},$$
die die Funktion $|\sin(x)|$ approximiert.



Lösung 9.16

$$A^TA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte der Matrix A^TA:

$$P(\lambda) = \det\left(A^TA - \lambda\mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} 45-\lambda & 27 \\ 27 & 45-\lambda \end{pmatrix} = (45-\lambda)^2 - 27^2$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 45 \pm 27 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 18 \text{ oder } \lambda = 72$$

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren der Matrix A^TA:

$$\left(A^TA - 18\mathbb{1}\right)x = \begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 27(x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix A^TA zum Eigenwert 18.

$$\left(A^TA - 72\mathbb{1}\right)x = \begin{pmatrix} -27 & 27 \\ 27 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -27x_1 + 27x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix A^TA zum Eigenwert 72.

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = AV = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & \frac{4}{\sqrt{144}} & ? \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & ? \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte der Matrix U berechnen wir, indem wir einen Vektor suchen, der senkrecht auf den ersten beiden Spalten von W steht und zudem Norm eins hat.

$$\begin{array}{lrcll}
 & \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
 & -\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -2u_1 + u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -3u_2 - 6u_3 & = & 0 & 2I + II \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2u_2 - 2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2(-2u_3) + 2u_3 = -2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 &
\end{array}$$

Wir wählen z.B. $u_3 = 1$ und berechnen dann $u_1 = u_2 = -2$, anschließend normieren wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = UDV^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 9.17 Die Antworten lauten:

a) Ja!

b) Ja!

c) Nein! Der Kern von A^T wird von den letzten $m-r$ Spalten von U aufgespannt.

d) Ja!

e) Nein! Der Kern von A wird von den letzten $n-r$ Spalten von V aufgespannt.

Lösung 9.18 Die Antworten lauten:

a) Nein! $\dim \operatorname{Ker}(A) = n - r$

b) Nein! $\dim \operatorname{Ker}(A)^T = m - r$

c) Ja!

d) Ja!

e) Ja!

Lösung 9.19 Die Antworten lauten: a) Ja! b) Ja! c) Nein!

Lösung 9.20 Die Antworten lauten:

a) Nein! Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Ja! Da die Matrix A positiv definit ist, sind alle ihre Eigenwerte größer Null. Da die Determinante von A sich schreiben läßt als das Produkt der Eigenwerte von A ist auch die Determinante größer Null.

c) Ja! Wenn das homogene System $Ax = 0$ eine nicht triviale Lösung hat, sind die Spalten von A linear abhängig. Daraus folgt, dass die Determinante von A gleich Null ist und somit muss mindestens ein Eigenwert von A gleich Null sein, so dass die Matrix nicht positiv definit sein kann.

d) Ja! Wenn die Matrix A positiv definit ist, gilt $\det A \neq 0$. Daraus folgt A ist invertierbar und somit ist das Gleichungssystem eindeutlich lösbar.

Lösung 9.21

a) Für $\alpha < 0$ ist A positiv definit, für $\alpha > 0$ negativ definit.

b) Das charakteristische Polynom ist in dem Fall

$$\lambda^2 - 3\alpha\lambda + 2\alpha^2 - 16 = 0$$

Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von B. Sie sind Lösungen der oberen Gleichung, und es ist dann klar, daß

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3\alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = 2\alpha^2 - 16 \end{cases}$$

B ist positiv definit, wenn $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, das heißt $(\alpha^2 - 8) > 0$ und $\alpha > 0$, also wenn $\alpha \in]\sqrt{8}, +\infty[$.

B ist negativ definit, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$, das heißt $(\alpha^2 - 8) > 0$ und $\alpha < 0$, also wenn $\alpha \in]-\infty, -\sqrt{8}[$.

c) Das charakteristische Polynom ist in dem Fall

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha^2 = 0$$

Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von C. Sie sind Lösungen der oberen Gleichung, und es ist dann klar daß

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 1 - \alpha^2 \end{cases} \tag{23}$$

C ist positiv definit, wenn $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, das heißt $(1-\alpha^2) > 0$ (wir haben schon $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$) und $\alpha \in]-1,+1[$.

C ist negativ definit, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$, das ist unmöglich weil $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ und dann ist C nie negativ definit.

d) Das charakteristische Polynom ist in dem Fall

$$(2\alpha^2 - \lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (2-\lambda)\alpha^2 = 0 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left(\lambda^2 - (2\alpha^2+1)\lambda + \alpha^2\right) = 0 \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1, \lambda 2 \text{ lösen } \lambda^2 - (2\alpha^2+1)\lambda + \alpha^2 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Wir haben dann

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha^2 + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \alpha^2 \end{cases}$$

D ist positiv definit, wenn $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, das heißt $\alpha \neq 0$.

Wegen $\lambda_3 = 2 > 0$ ist D nie negativ definit.as ist unmöglich weil $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösung 10.1

a) $\ddot{h}(t) = -10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dot{h}(t) &= \int_0^t \ddot{h}(s)\,ds + C_1 \\ &= \int_0^t -10\,ds + C_1 \\ &= -10t + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(t) &= \int_0^t \dot{h}(s)\,ds + C_2 \\ &= \int_0^t (-10s + C_1)\,ds + C_2 \\ &= -5t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung der Anfangswerte lautet

$$h(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte ergibt sich:

$$h(0) = C_2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\dot{h}(0) = C_1 \overset{!}{=} 20 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 20$$

und somit

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

b)

$$\begin{array}{rrcl} & h(t) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -5t^2 + 20t + 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 - 4t - \frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2 - 4 - \frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2 & = & \frac{21}{5} \\ \Leftrightarrow & t & = & 2 \pm \sqrt{\frac{21}{5}} \approx -0{,}04939 \text{ oder } 4{,}04939 \end{array}$$

$\Rightarrow T = 2 + \sqrt{\frac{21}{5}} \approx 4{,}04939$

c)

$$\dot{h}(T) = -10\left(2 + \sqrt{\frac{21}{5}}\right) + 20 = -10\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -20{,}4939$$

Lösung 10.2 Diese Differentialgleichung lösen wir mit Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \int_{y(0)}^{y(t)} \tilde{y}\, d\tilde{y} & = & -\int_0^t s\, ds \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2}y^2(0) & = & -\frac{1}{2}t^2 \\ \Leftrightarrow & y^2(t) & = & 1 - t^2 \\ \Leftrightarrow & y(t) & = & \pm\sqrt{1-t^2} \end{array}$$

Da die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sein muss, ist nur

$$y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

eine Lösung.

Lösung 10.3 Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t)$$

mit Anfangswert $y_0 = y(t_0)$ gegeben ist durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) y_0.$$

In unseren Fall ist $a(t) = \frac{1}{t}$, so dass wir als Lösung für unsere Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s}\,ds\right) \cdot 1 \\ &= \exp(\ln t - \ln 1) \\ &= e^{\ln t} \\ &= t \end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ: Diese Aufgabe lässt sich auch durch Separation der Variablen lösen.

Lösung 10.4

Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir

$$z_0 := y,\ z_1 := \dot{y} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} \dot{z_0} = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z_1} = \ddot{y} = y = z_0 \end{array}$$

Also ist

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z_0} \\ \dot{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z_0} \\ \dot{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = Az$$

zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch

$$z(t) = e^{A(t-t_0)} z_0$$

gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und in (a) $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in (ii) $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dadurch ergeben sich die Lösungen

- $z(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $z(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie sieht e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus?
Um diese Frage beantworten zu können, diagonalisieren wir die Matrix A und starten mit der Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda &= -1 \quad \text{oder} \quad 1 \end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von A:

$$\begin{aligned} & (A + 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Zum Eigenwert -1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} & (A - 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Zum Eigenwert 1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Insgesamt erhalten wir

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{t} & -e^{-t} + e^{t} \\ -e^{-t} + e^{t} & e^{-t} + e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ A^3 &= A \cdot A^2 = A \cdot I = A \\ A^4 &= A \cdot A^3 = A \cdot A = A^2 = I \\ A^5 &= A \cdot A^4 = A \cdot I = A \end{aligned}$$

Induktiv:

$$\begin{aligned} A^0 &= I = A^2 = A^4 = \ldots = A^{2k} = A^{2k+2} \\ A^1 &= A = A^3 = A^5 = \ldots = A^{2k+1} \quad \text{für } k = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \right) I + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) A \\ &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})I + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})A \\ &= \cosh t I + \sinh t A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \sinh t$
- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \cosh t$

Lösung 10.5 Wir lösen das Anfangswertproblem durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_a^{y(t)} \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_0^t 1\, ds \\ \Leftrightarrow \quad & \arctan(y(t)) - \arctan(a) = t \\ \Leftrightarrow \quad & y(t) = \tan(t + \arctan(a)) \end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Für welche t ist diese Lösung nun definiert?
arctan ist als Umkehrfunktion von tan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ab, denn tan ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend daher umkehrbar.
Wenn nun

$$c_0 = \arctan(a) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

dann ist $y(t) = \tan(t + c_0)$ definiert für

$$-c_0 - \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} - c_0 .$$

Denn für $t \to \frac{\pi}{2} - c_0$ (von unten) bzw. $t \to -\frac{\pi}{2} - c_0$ (von oben) gilt:

$$\tan(t + c_0) \to \pm\infty$$

Lösung 10.6

a) Ja, denn lokal ist die Lipschitzbedingung für die rechte Seite erfüllt (siehe dazu d)!).

b) Nein, denn $y(t) = \frac{1}{1-t}$ ist (lokal) eindeutige Lösung der Differentialgleichung mit $y(0) = 1$, aber $\frac{1}{1-t} \to +\infty$ für $t \uparrow 1$. Die Lösung der Differentialgleichung kann man mit Separation der Variablen berechnen.

c) Nein, denn $|f(y) - f(0)| = y^2 = |y| \cdot |y - 0|$ und $|y|$ kann beliebig groß werden.

d) Ja. Da f stetig differenzierbar bzgl. y ist und, da:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y) = 2y \quad \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(y)\right| \leq 2a \quad \text{für } y \text{ mit } |y| < a$$

gilt, ergibt sich die Lipschitzbedingung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bzw. wegen

$$f(y_1) - f(y_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(y_2 + t\,(y_1 - y_2))\,dy .$$

Lösung 10.7 1) Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y\sin(t)$$

durch Separation der Variablen, bzw. direkt (siehe Skript)

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -\sin(t) \quad \Rightarrow \int \frac{\dot{y}}{y}\,dy = -\int \sin(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \cos(t) + c \quad \Rightarrow y(t) = c_h\,e^{\cos(t)} =: y_h(t) .$$

2) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gewinnen wir durch die Methode der Variation der Konstanten. Dazu gehen wir aus von dem Ansatz:

$$y_s(t) := c(t)\, y_h(t)\ ,$$

berechnen die Ableitung von $y_s(t)$ und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, y_h(t) + \dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\, \sin(t) + \sin(2t)\ .$$

Es gilt

$$\dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\, \sin(t)\ .$$

da y_h die homogene Differentialgleichung löst. Also folgt, daß

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, c_h e^{\cos(t)} = \sin(2t)\ .$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c(t) &= \int_0^t \frac{1}{c_h} e^{-\cos(u)}\, \sin(2u)\, du \\
&= \frac{2}{c_h} \int_0^t e^{-\cos(u)}\, \cos(u)\, \sin(u)\, du \qquad (\text{Subst. } s = -\cos(u)) \\
&= -\frac{2}{c_h} \int_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} e^s\, s\, ds \qquad (\text{Subst. gibt } ds = \sin(u)\, du) \\
&= -\frac{2}{c_h} e^s\, (s-1)\Big|_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} = \frac{2}{c_h} e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_s(t) &= \left(\frac{2}{c_h} e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e} \right) y_h \\
&= \left(\frac{2}{c_h} e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e} \right) c_h e^{\cos(t)} \\
&= 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + c_h\, e^{\cos(t)}\ .$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung ergibt:

$$y(0) = 2(1+1) - 4e^{1-1} + c_h e \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_h\, e = 1 \quad \Rightarrow c_h = \frac{1}{e}\ .$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems schließlich:

$$y(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + e^{\cos(t)-1}\ .$$

Alternativ: Man kann eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \text{ mit } y(t_0) = y_0$$

auch mit den folgenden Formeln lösen:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \\ c(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y_h(s)}\,ds + y_0 \\ y(t) &= c(t)y_h(t) \end{aligned}$$

Lösung 10.8 1. Möglichkeit: Die Funktion f ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,, \quad \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2\,|y| < 10\,.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung lassen sich alle Differenzenquotienten von f bzgl. y abschätzen. Damit folgt, daß $L = 10$ Lipschitzkonstante für f im gegebenen Gebiet ist. (Siehe auch Vorlesung: lokale Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
2. Möglichkeit: Es gilt

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2| < 10\,|y_1 - y_2|,$$

da $y_1, y_2 \in (0,5)$.

Lösung 10.9

a) Für den Ansatz $x(t) = a\cos(bt + c)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ab\sin(bt + c) \\ \ddot{x}(t) &= -ab^2\cos(bt + c) \end{aligned}$$

Damit die DGL $\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, muss $-b^2 = -\frac{D}{m}$, also $b = \sqrt{\frac{D}{m}}$ gelten. Um den Anfangswert $0 = \dot{x}(0) = -ab\sin(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot 0 + c)$, also $\sin(c) = 0$ zu erfüllen, muss c ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, wähle also z.B. $c = 0$. Die zweite Anfangsbedingung $1 = x(0) = a\cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot 0 + 0) = a$ liefert den Wert für a.

b) $z_0 := x$, $z_1 := \dot{x}$

$$\dot{z} = g(t,z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{z}_0 & = & z_1 \\ \dot{z}_1 & = & -\frac{D}{m}z_0 \end{pmatrix}$$

c) Die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{elast}}$ ist konstant, wenn die Ableitung gleich Null ist.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \\ \Rightarrow \dot{E} &= m\dot{x}\ddot{x} + Dx\dot{x} \\ &= m\dot{x}\left(-\frac{D}{m}x\right) + Dx\dot{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lösung 10.10

a) Im Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen wurde der Fall eines Erdsatelliten, dessen Bahn durch die Gravitationskräfte der Erde und des Mondes bestimmt wird, behandelt. In diesem Fall ergab sich folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Bahn des Satelliten:

$$\ddot{x}_s = G\left(\frac{M_e}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) + \frac{M_m}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s)\right)$$

Da wir in dieser Aufgabe den Einfluss des Mondes ignorieren und das Koordinatensystem so legen, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\ddot{x}_s = -G\frac{M_e}{\|x_s\|^3}x_s$$

Da wir nun nur noch die Koordinaten des Satelliten haben, können wir das x_s durch ein einfaches x ersetzen.

$$\ddot{x} = -G\frac{M_e}{\|x\|^3}x$$

b) Allgemein ist die Parametrisierung einer Kreisbahn in der $x_1 - x_2$ Ebene mit Radius r, Mittelpunkt 0 und Startpunkt $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha t) \\ r\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei α die Umlaufgeschwindigkeit bestimmt.
Nun soll zusätzlich gelten

$$x(0) = x(T) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r\cos(0) \\ r\sin(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha T) \\ r\sin(\alpha T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es muss also gelten $\alpha T = 2\pi$ und somit ergibt sich die Parametrisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{2\pi}{T}t) \\ r\sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\ddot{x}(t) &= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}r\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}x(t)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} = -\frac{GM_e}{r^3} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{GM_eT^2}{4\pi^2}$$

d)

$$T = 23\cdot 60^2\,s + 56\cdot 60\,s + 4\,s = 86164\,s$$

$$\begin{aligned}
r &= \left(\frac{6{,}672\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 5{,}9736\cdot 10^{24}\,kg\cdot(86164\,s)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\approx 42162664\,m \\
&\approx 42163\,km
\end{aligned}$$

e)

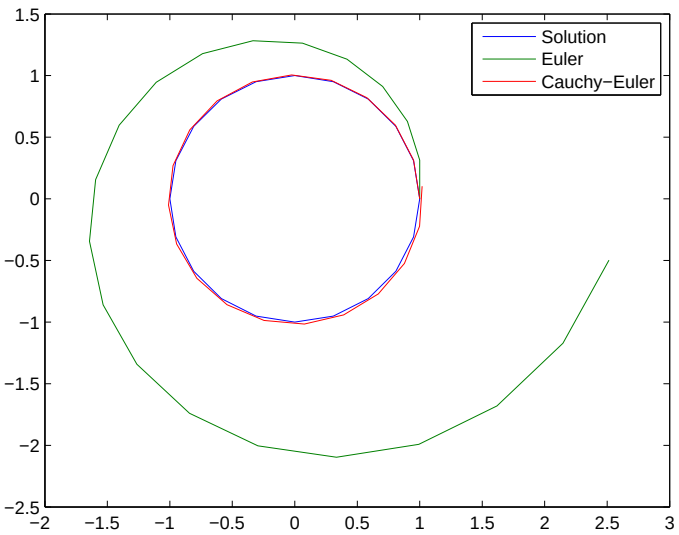
$$\dot{x}(t) = \frac{2\pi r}{T}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \|\dot{x}(t)\| &= \frac{2\pi r}{T}\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \\
&= \frac{2\pi r}{T} \\
&\approx \frac{2\pi \cdot 42163000\,m}{86164\,s} \\
&\approx 3075\,\frac{m}{s}
\end{aligned}
$$

Lösung 10.11

```
% compare Euler and Cauchy-Euler ODE solvers
function ode_compare

% initial value
x0 = [1 0];
% end time
T = 2*pi;
% time intervals
N = 20;

% right hand side of ODE
function x_prime = f ( t, x )
x_prime (1) = -x (2);
x_prime (2) =  x (1);
end

% compute one explicit Euler step
function x_new = eulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime = f ( t, x_old );
x_new = x_old + tau * x_prime;
end

% compute one explicit Cauchy-Euler step
function x_new = cauchyeulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime_old = f ( t, x_old );
x_mid = x_old + 0.5 * tau * x_prime_old;
x_prime_mid = f ( t + 0.5 * tau, x_mid );
x_new = x_old + tau * x_prime_mid;
end

% compute timestep size
tau = T / N;
```

```
% initialize
xe (1, :) = x0; % Euler solution
xc (1, :) = x0; % Cauchy-Euler solution

% compute time steps with both methods
for i = 1 : N
    xe (i+1, :) = eulerstep (xe (i, :), (i-1) * tau, tau);
    xc (i+1, :) = cauchyeulerstep (xc (i, :), (i-1) * tau, tau);
end

% compute correct solution
ts = 0 : tau : T;
xs (:, 1) = cos (ts);
xs (:, 2) = sin (ts);

% plot results
plot (xs (:, 1), xs (:, 2), xe (:, 1), xe (:, 2), xc (:, 1), xc (:, 2))
legend ('Solution', 'Euler', 'Cauchy-Euler');

% error
euler_error = norm (xs (N, :) - xe (N, :))
cauchy_euler_error = norm (xs (N, :) - xc (N, :))
end
```



Für den Fehler gilt

	$\tau = \frac{2\pi}{20}$	$\tau = \frac{2\pi}{40}$	$\tau = \frac{2\pi}{80}$
Euler	1.4741	0.6118	0.2753
Cauchy-Euler	0.0990	0.0252	0.0064

Lösung 10.12 Zuerst lösen wir die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t)x(t)$$

mit Anfangswert $x(0) = 1$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung dieser Differentialgleichung wie folgt aussieht

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_0^t \sin(s)\,ds\right) \\ &= \exp\left(-\cos(t) + \cos(0)\right) \\ &= e^{1-\cos(t)} \end{aligned}$$

Des weiteren wissen wir aus der Vorlesung, dass die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\left(\int_0^t \frac{1}{x(s)}\sin(s)\,ds\right) \\ &= e^{1-\cos(t)}\int_0^t e^{\cos(s)-1}\sin(s)\,ds \\ &\overset{z:=\cos(s)-1}{=} e^{1-\cos(t)}\left(-\int_0^{\cos(t)-1} e^z\,dz\right) \\ &= -e^{1-\cos(t)}\left(e^{\cos(t)-1} - e^o\right) \\ &= e^{1-\cos(t)} - 1 \end{aligned}$$

Lösung 10.13 Das Differentialgleichungssystem läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Ay(t)$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystem gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(A(t-t_0)\right)y(t_0) \\ &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right)$ zu berechnen, müssen wir die Matrix A diagonalisieren: Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } 2$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 0:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11 Integration in mehreren Dimensionen

Lösung 11.1

a) $B_1(y)$ ist offen und beschränkt.

b) $B_1(0)\backslash B_1((1,0,\ldots,0))$ ist weder offen noch abgeschlossen, sondern nur beschränkt.

c) $\mathbb{R}^n\backslash(B_1(0)\cup B_1((2,0,...,0)))$ ist abgeschlossen, denn sowohl $B_1(0)$ als auch $B_1((2,0,...,0))$ sind offen, die Vereinigung offener Mengen ist wieder offen und $\mathbb{R}^n$ ohne eine offene Menge ist abgeschlossen. Die Menge ist allerdings nicht beschränkt.

d) $B_1(0)\cap B_1((1,0,\ldots,0))$ ist offen, denn der Schnitt zweier offener Mengen ist offen. Zudem ist die Menge beschränkt.

Lösung 11.2 Der Kegel ist gegeben durch die Menge

$$K = \{(x,y,z)\,|\,0 \le x \le L,\, y^2+z^2 \le f^2(x)\}$$

mit $f(x) = \frac{R}{L}x$.
Das Volumen dieses Rotationskörpers berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Vol(K)} &= \pi\int_0^L f^2(x)\,dx \\
&= \pi\int_0^L \frac{R^2}{L^2}x^2\,dx = \pi\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L \\
&= \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{L^2}L^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 L
\end{aligned}$$

Lösung 11.3

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 \, dy dx &= \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} y^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{1}{3} (1-x)^3 \, dx \\
&= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} x^2 (1-x)^4 \Big|_0^1 + \frac{2}{4} \int_0^1 x(1-x)^4 \, dx \right) \\
&= \frac{2}{3 \cdot 4} \int_0^1 x(1-x)^4 \, dx \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2} \left(-\frac{1}{5} x(1-x)^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{5} \int_0^1 (1-x)^5 \, dx \right) \\
&= -\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} (1-x)^6 \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}
$$

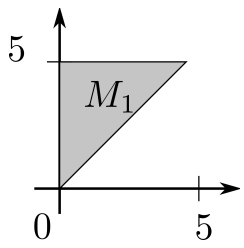
Alternativ kann man die Integration der Funktion $f(x,y)$ über das dargestellte Gebiet auch wie folgt ansetzen:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y^2 \, dx \, dy$$

Lösung 11.4 Im gegebenen Integral wird über die Fläche

$$M_1 := \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y \leq 5\}$$

integriert. Diese sieht wie folgt aus



und läßt sich auch schreiben als

$$M_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 5 \text{ und } x \leq y \leq 5\}.$$

Es gilt also

$$\int_0^5 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 \int_x^5 f(x,y)\,dy\,dx$$

Lösung 11.5

a) Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks D berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 1-x\,dx \\
&= x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{2}-0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders T berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1\,dy\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y\big|_0^{1-x-z}\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1-x-z\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 x-\frac{1}{2}x^2-zx\big|_0^{1-z}\,dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}-z+\frac{1}{2}z^2\,dz \\
&= \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3\big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Lösung 11.6 Polarkoordinaten: $1 \le r \le 2$ und $0 \le \varphi \le \pi$
Berechnung der Masse:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi 1\,r\,d\varphi\,dr = \pi \int_1^2 r\,dr = \frac{3}{2}\pi$$

Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M}\int_1^2\int_0^\pi r\sin\varphi\, r\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{2}{3\pi}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot(-\cos\pi-(-\cos 0)) \\
&= \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{7}{3}\cdot 2 = \frac{28}{9\pi} \approx 0{,}99
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes x_S offensichtlich 0, siehe auch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{M}\int_1^2\int_0^\pi r\cos\varphi\, r\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \cos\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{2}{3\pi}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot(\sin\pi-\sin 0) \\
&= \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{7}{3}\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Lösung 11.7 Sei $\Gamma = \partial\Omega$ parametrisiert durch $\gamma\colon [t_0;t_1] \to \mathbb{R}^2$, $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$.

Der Gauß'sche Integralsatz lautet:

$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy = \int_\Gamma F\cdot N\, dl \qquad$ mit $N = \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|}\begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix}$ und $dl = \|\dot\gamma(t)\|\, dt$.

<u>1. Fall:</u>

$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \quad$ mit $\quad F_1 = \frac{1}{2}x, F_2 = \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int_\Omega 1\, dx\, dy = \int_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy \\
&= \int_\Gamma F\cdot N\, dl \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix}\frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|}\|\dot\gamma(t)\| dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot\gamma_2(t) - y\dot\gamma_1(t))\, dt
\end{aligned}$$

<u>2. Fall:</u>
$F = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \operatorname{div} F = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy \\
&= \int_\Gamma F \cdot N \, dl \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|} \|\dot\gamma(t)\| dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} x \dot\gamma_2(t) \, dt
\end{aligned}$$

<u>3. Fall:</u>
$F = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \operatorname{div} F = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy \\
&= \int_\Gamma F \cdot N \, dl \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|} \|\dot\gamma\| dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1} y \dot\gamma_1(t) \, dt
\end{aligned}$$

Lösung 11.8 Nach dem Gauß'schen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gilt:
$\int\limits_{\partial\Omega} F \cdot N da = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx$
N = äußere Normale von $\partial\Omega$.
Wähle hier $F(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und zeige: $\operatorname{div} F = \frac{2}{\|x\|}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i \cdot x_i}{\|x\|^3}\right] \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{2}{\|x\|}
\end{aligned}$$

Lösung 11.9

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy\,.$$

Leibniz-Regel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{-x^2}^{x^2} \cos(xy)\, dy + \frac{\sin(x^3)}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(-x^3)}{-x^2} \cdot (-2x) \\
&= 2\frac{\sin(x^3)}{x} + 2\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{1}{x}\int_{-x^3}^{x^3} \cos z\, dz \quad (z = xy,\ dz = x\, dy) \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin z}{x}\bigg|_{-x^3}^{x^3} \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin(x^3)}{x} - \frac{\sin(-x^3)}{x} \\
&= 6\frac{\sin(x^3)}{x}
\end{aligned}$$

Benutzt: $\sin(-x^3) = -\sin(x^3)$

Lösung 11.10

a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{k} f(t)\ \sin\left(k(t-t)\right) + \frac{1}{k}\int_0^t f(u) \cos\left(k(t-u)\right) k\, du \\
&= \int_0^t f(u) \cos\left(k(t-u)\right) du\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sin 0 = 0$ benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t)\,\cos(k(t-t)) - k\int_0^t f(u)\,\sin(k(t-u))\,du \\ &= f(t) - k^2 x(t)\,, \end{aligned}$$

wobei wir $\cos 0 = 1$ beachtet haben.

b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$ ist.

Die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von $x(t)$ als Integral bzw. der berechneten Formel für $\dot{x}(t)$ als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t)\,dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion $g = g(t)$).

Lösung 11.11

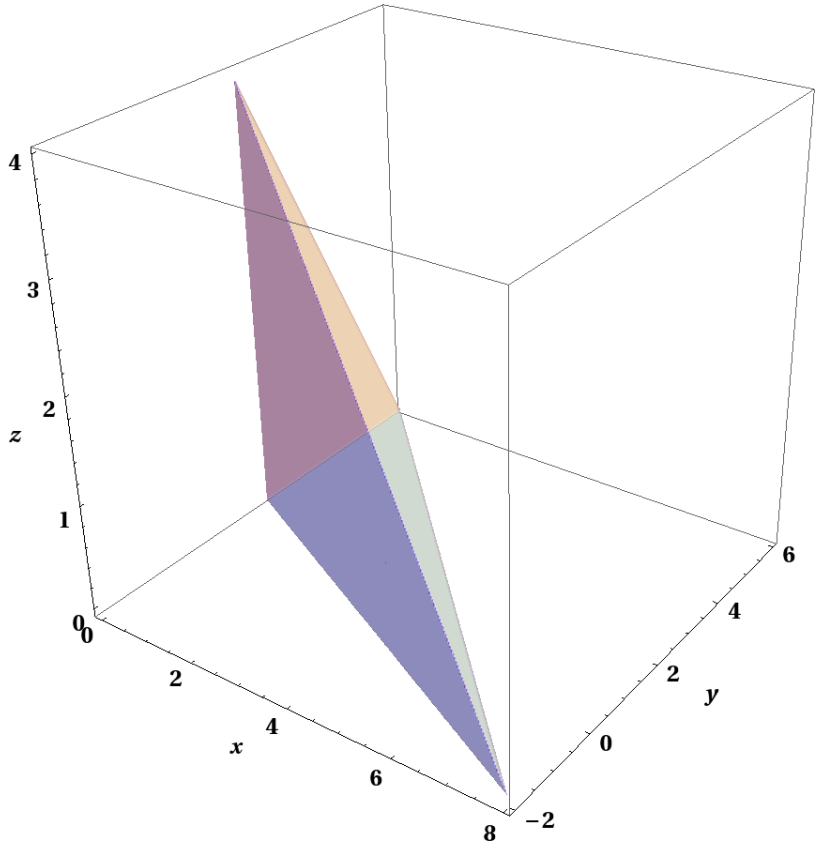
Bei den drei Flächen handelt es sich um folgende Ebenen:

- $x+y+z=6$ ist eine Ebene, die durch die Punkte $(6,0,0)^T$, $(0,6,0)^T$ und $(0,0,6)^T$ aufgespannt wird.

- $z=0$ ist die x,y-Ebene.

- $x=0$ ist die y,z-Ebene.

- $x+2y=4$ ist eine zur x,y-Ebene senkrechte Ebene, die durch die Punkte $(0,2,0)^T$ und $(4,0,0)^T$ läuft.



Wir betrachten die Projektion des Körpers in die x,y-Ebene. Der Körper wird bezüglich der z-Achse von zwei Flächen begrenzt: Der x, y-Ebene und der Ebene $x+y+z=6$. Wenn wir zuerst über z integrieren ergeben sich daher folgende Grenzen für z.

$$0 \leq z \leq 6-x-y.$$

Bezüglich der x-Achse wird der Körper von drei Ebenen begrenzt und bezüglich der y-Achse von zwei Ebenen. Daher ist es einfacher als nächstes über y zu integrieren. Die begrenzenden Flächen sind die Ebenen $x+y+z=6$ und $x+2y=4$, wobei die zweite Ebene die untere Grenze festlegt.

$$x+2y=4 \iff y=2-\frac{x}{2} \quad \ldots \text{ untere Grenze}$$

$$x+y+z=6 \iff y=6-x-z$$

$$\Longrightarrow \quad 2-\frac{x}{2} \leq y \leq 6-x, \text{ da maximales } y \text{ bei } z=0$$

Nun fehlen noch die Grenzen für x. Die untere Grenze für x ist die y,z-Ebene und die obere Grenze ist der Schnittpunkt der Ebenen $x+y+z=6$, $x+2y=4$ und $z=0$.

$$0 \leq x \leq 8$$

Nun können wir das Volumen des Körpers berechnen.

$$\begin{aligned}
Vol_3(K) &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \int_0^{6-x-y} 1 \; dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} 6-x-y \; dy\,dx \\
&= \int_0^8 \left[6y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \; dx \\
&= \int_0^8 8 - 2x + \frac{x^2}{8} \; dx \\
&= \left[8x - x^2 + \frac{x^3}{24}\right]_0^8 \; dx \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

Lösung 11.12

a) Herzuleiten ist die Formel

$$V = \pi R^2 h$$

für das Volumen eines Kreiszylinders.
Nach Gauss gilt:

$$\begin{aligned}
Vol_3(\Omega) &= \int_\Omega 1\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\frac{\mathbf{x}}{3})\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{\partial\Omega} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da
\end{aligned}$$

für eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, für welche $\partial\Omega$ eine glatte Fläche ist.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1\,.$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= Z = \text{ Kreiszylinder} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le z \le h \;,\; x^2+y^2 = R^2\}\,, \\
\partial\Omega &= \partial Z = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \quad \text{ mit} \\
R_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 0 \;,\; x^2+y^2 \le R^2\} = \text{ Boden,} \\
R_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < z < h \;,\; x^2+y^2 = R^2\} = \text{ Mantelfläche,} \\
R_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = h \;,\; x^2+y^2 \le R^2\} = \text{ Deckel.}
\end{aligned}$$

Auf R_1 gilt $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

auf R_2 gilt $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ ist.

Schließlich gilt auf R_3, dass $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} Vol_3(Z) &= \frac{1}{3}\left\{\int_{R_1} 0\cdot(-1)\,da + \int_{R_2}\left(\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R}\right)da + \int_{R_3} h\cdot 1\,da\right\} \\ &= \frac{1}{3}\{R\cdot O(R_2)+h\cdot O(R_3)\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{R\cdot 2\pi Rh + h\cdot\pi R^2\right\} \\ &= \pi R^2 h, \end{aligned}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} O(R_2) &= \text{Oberfläche } (R_2) = 2\pi R\cdot h = \text{ Umfang des Kreises } \cdot \text{ Höhe} \qquad \text{und} \\ O(R_3) &= \text{Oberfläche } (R_3) = \pi R^2 = \text{ Fläche des Kreises !} \end{aligned}$$

gesetzt und benutzt haben.

b) Wie in a) benutzen wir die Formel

$$Vol_3(\Omega) = \frac{1}{3}\int_{\partial\Omega} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da,$$

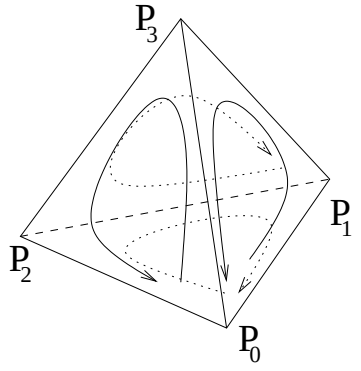
die sich aus dem Satz von Gauss ergibt. Diesmal ist

$$\begin{aligned} \Omega &= T = \text{ Tetraeder} \qquad \text{und} \\ \partial\Omega &= \partial T = \text{ Rand des Tetraeders} \\ &= S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4 \end{aligned}$$

und dies ist die Vereinigung der 4 Seitenflächen des Tetraeders. Jede Seitenfläche wird von 3 Eckpunkten des Tetraeders bestimmt und ist ein Dreieck, welches in der von den Eckpunkten festgelegten Ebene liegt. Wir bezeichnen das von den Punkten P_0, P_1, P_2 bestimmte Dreieck S_1 mit $S_1 = S_1(P_0, P_2, P_1)$. Entsprechendes gilt für

$$S_2 = S_2(P_0,P_1,P_3)\,,\; S_3 = S_3(P_0,P_3,P_2)\,,\; S_4 = S_4(P_1,P_2,P_3)\,.$$

Dabei ist zu beachten, dass wir in allen Dreiecken die Punkte in gleicher Orientierung (in Bezug auf Innen und Außen des Tetraeders) aufzählen. Dies verifiziert man leicht an einer Skizze. Nur auf diese Weise sind später die Vorzeichen der Normalen konsistent.



Es gilt:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(P_0, P_2, P_1) \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = P_0 + \lambda(P_1 - P_0) + \mu(P_2 - P_0), \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir zur Abkürzung uns der Bezeichnung $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ $(i = 0,1,2,3)$ bedient haben.

Entsprechendes gilt natürlich für S_2, S_3, S_4.
Auf S_1 gilt:

$$\mathbf{N}_1 := \mathbf{N} = \frac{1}{||\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1||} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 \,, \text{ mit} \tag{27}$$

$$\mathbf{a}_1 = P_2 - P_0 \,,\ \mathbf{b}_1 = P_1 - P_0 \quad \text{und} \tag{28}$$

$$\mathbf{x} = P_0 + \lambda(P_1 - P_0) + \mu(P_2 - P_0) \tag{29}$$

$$= P_0 + \lambda \mathbf{b}_1 + \mu \mathbf{a}_1 \,. \tag{30}$$

Hieraus folgt, dass auf S_1 gilt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}_1 = P_0 \cdot \mathbf{N}_1 \,,$$

da $\mathbf{N}_1$ senkrecht auf $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_1$ steht.
In diese Rechnung geht die Richtung ein, in der die Punkte des Dreiecks aufgezählt wurden. Zwar ist wegen der Betragsbildung egal, ob man die äußere oder die innere Normale verwendet; da die Beiträge der einzelnen Seiten jedoch später addiert werden, muss man konsistent stets die innere oder stets die äußere Normale verwenden.
Mit $O(S_1)$ sei die Oberfläche von S_1 bezeichnet, also die Fläche des durch P_0, P_1, P_2 bestimmten Dreiecks. Die Definition des Kreuzproduktes zweier Vektoren und eine (entsprechende) Skizze zeigen, dass

$$O(S_1) = \frac{1}{2}||\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1|| = \frac{1}{2}||(P_2 - P_0) \times (P_1 - P_0)||$$

gilt. Dies entspricht der aus der Schule bekannten Regel, dass sich die Fläche eines Dreieckes nach der Formel $\frac{1}{2}$ Grundseite mal Höhe berechnet.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_{\partial S_1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da &= \frac{1}{3}\left(P_0\cdot\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1\|}\right)\frac{1}{2}\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1\| \\
&= \frac{1}{6}\left(P_0\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(P_0\cdot[(P_2-P_0)\times(P_1-P_0)]\right) \\
&= \frac{1}{6}\det(P_0,P_2-P_0,P_1-P_0) \\
&= \frac{1}{6}\det(P_0,P_2,P_1) \\
&= -\frac{1}{6}\det(P_1,P_2,P_0)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Koordinaten von P_0,P_1,P_2 als Spaltenvektoren einzusetzen sind. Die vorletzte Umformung erfolgt durch das Addieren der ersten Spalte der Matrix auf die zweite und dritte Spalte, eine Operation die die Determinante unverändert lässt (vgl. Zeilenoperationen im Gauß-Algorithmus). Die abschließende Spaltenvertauschung ändert schließlich das Vorzeichen.
Entsprechende Formeln ergeben sich natürlich für S_2,S_3,S_4. Das Vorzeichen hängt dabei jeweils von der Anzahl der abschließend durchgeführten Spaltenvertauschungen ab. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_{S_2} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da &= -\frac{1}{6}\det(P_1,P_0,P_3)\,, \\
\frac{1}{3}\int_{S_3} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da &= -\frac{1}{6}\det(P_0,P_2,P_3)\,, \\
\frac{1}{3}\int_{S_4} \mathbf{x}\cdot\mathbf{N}(\mathbf{x})\,da &= \frac{1}{6}\det(P_1,P_2,P_3)\,.
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die in der Aufgabenstellung gegebene Formel, so kann man sie unter Ausnutzung der Spaltenlinearität der Determinanten „ausmultiplizieren“ zu

$$\begin{aligned}
\det(P_1-P_0,P_2-P_0,P_3-P_0) &= \det(P_1,P_2,P_3)-\det(P_0,P_2,P_3) \\
&\quad -\det(P_1,P_0,P_3)-\det(P_1,P_2,P_0)+0\,,
\end{aligned}$$

wobei alle Determinanten, bei denen in der Matrix mindestens zwei Spalten gleich P_0 sind, Null sind und daher wegfallen.
Zur Kontrolle kann man die erhaltenen Formeln (im Sinne einer Stichprobe) überprüfen mit den vier Punkten

$$P_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Es sollte $\frac{1}{6}$ als Ergebnis herauskommen.
c) Nach den vorhergehenden beiden Teilaufgaben sollte klar sein, wie man diese Frage zu beantworten hat. Man nimmt die Formel von Gauss zur Berechnung des Volumens und zerlegt den Rand des Polyeders in Dreiecksflächen. Für jede Dreiecksfläche erhält man eine Formel wie in b). Aufsummieren der erhaltenen Formeln ergibt dann die gesuchte Formel zur Berechnung des Volumens eines Polyeders vermöge Dreiecksflächen. Auch hier muss man selbstverständlich auf eine einheitliche Orientierung der Dreiecke achten.

Lösung 11.13 Da die Fläche achsensymmetrisch zur $x-$ und $y-$Achse ist, reicht es den Flächeninhalt des durch die Punkte $P_4 = (-2,1)$, $P_5 = (0,2)$, $P_7 = (0,0)$ und $P_8 = (-2,0)$ beschriebenen Trapezes zu berechnen und mit 4 zu multiplizieren.
Dazu berechnet man die Fläche unterhalb der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x+2$ von $x = -2$ bis $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(H) &= 4\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x+2\,dx \\
&= 4\left(\frac{1}{4}x^2+2x\Big|_{-2}^{0}\right) \\
&= 4(-1+4) \\
&= 12
\end{aligned}$$

Alternativ integriert man 1 über das Trapez

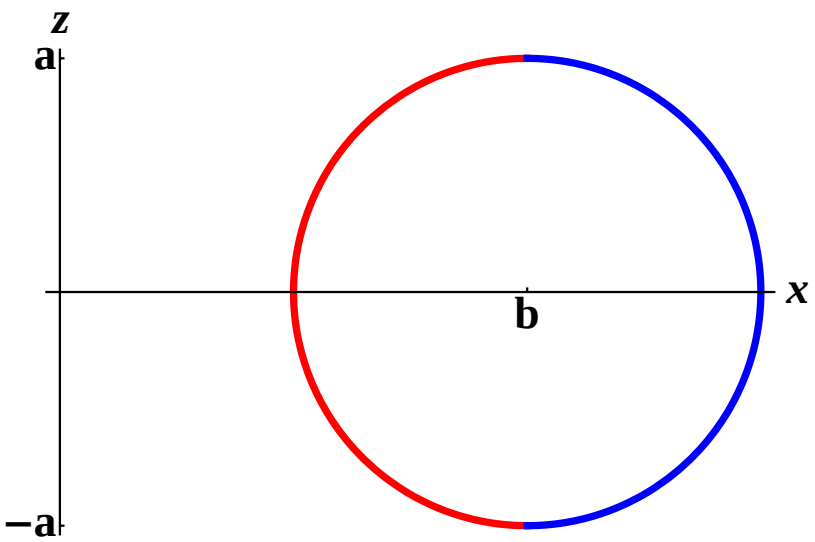
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(H) &= 4\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\frac{1}{2}x+2} 1\,dy\,dx \\
&= 4\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x+2\,dx
\end{aligned}$$

und dann weiter wie oben.

Lösung 11.14 Die Kreisscheibe liegt in der x,z-Ebene, hat den Mittelpunkt $(b,0,0)^T$ und den Radius a. Der Volltorus ergibt sich durch Rotation dieser Kreisscheibe um die z-Achse. Wir benötigen die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers, der um die z-Achse rotiert:

$$Vol(Rot) = \pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)^2 \;\; dz$$

Dabei ist $f(z)$ der Radius der Kreisscheibe in der x,y-Ebene, die durch die Rotation um die z-Achse entsteht.
Das Volumen des Volltorus ergibt sich aus der Differenz des Rotationskörpers, der von dem nach außen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (blau) und des Rotationskörpers, der von dem nach innen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (rot).



Aus der Beziehung $(x-b)^2+z^2=a^2$ erhalten wir die Radien. Sie lauten

$$f_1(z)=b-\sqrt{a^2-z^2}\ldots \text{ innen,}$$

$$f_2(z)=b+\sqrt{a^2-z^2}\ldots \text{ außen.}$$

Da der Mittelpunkt der rotierenden Kreisscheibe in der x,y-Ebene, also bei $z=0$, liegt und die rotierende Kreischeibe den Radius a besitzt, gilt $-a\le z\le a$. Das Volumen des Volltorus ist folglich:

$$\begin{aligned}
Vol(Volltorus) &= \pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-z^2})^2\ dz-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-z^2})^2\ dz\\
&= \pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-z^2})^2-(b-\sqrt{a^2-z^2})^2\ dz\\
&= \pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-z^2}\ dz
\end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir eine Koordinatentransformation (Substitution!) durch:

$$z=z(t)=a\sin t,\ dz=a\cos t\ dt\ ,$$

$$-a\le z\le a\ \implies\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

Damit vereinfacht sich das Integral wie folgt:

$$
\begin{aligned}
Vol(Volltorus) &= \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - z^2}\ dz \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ab\cos t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\ dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b\cos^2 t\ dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b\left(\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right)\ dt \\
&= 4\pi a^2 b\left[\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi a^2 b\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&= 2\pi^2 a^2 b\,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Formel

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\,,$$

verwendet, die sich aus dem Additionstheorem der Cosinus-Funktion

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$$

und der bekannten Formel $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ ergibt. (Alternativ: partielle Integration)

Lösung 11.15 Angenommen die Grundfläche des Kegels liegt in der x_1, x_2-Ebene und die Spitze zeigt nach oben, d.h. in Richtung der positiven x_3-Achse. Um den Schwerpunkt $x_s = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ dieses Kegels K berechnen zu können, müssen wir als erstes seine Masse M_K berechnen. Dies geschieht mit Hilfe von Zylinderkoordinaten, wobei der Radius in

Abhängigkeit von der Höhe angegeben werden muss.

$$
\begin{aligned}
M_K &= \int_K dx \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 \int_0^{2\pi} 1-\frac{2}{5}z+\frac{1}{25}z^2\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 2\pi\left(1-\frac{2}{5}z+\frac{1}{25}z^2\right) dz \\
&= \pi\left(z-\frac{1}{5}z^2+\frac{z^3}{75}\right)\Big|_0^5 \\
&= \pi\left(5-5+\frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Anschließend berechnen wir komponentenweise, unter Benutzung der Zylinderkoordinaten, den Schwerpunkt.

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_1\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,(r\cos\varphi)\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5 \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi\right)}_{=0} dr\,dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Da der Kegel achsensymmetrisch zur x_3-Achse ist, gilt

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 = 0.$$

Wir müssen also nur noch die dritte Komponente des Schwerpunktes berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_3\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} rz\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,dz \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 z-\frac{2}{5}z^2+\frac{z^3}{25}\,dz \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{15}z^3+\frac{z^4}{100}\right)\Big|_0^5 \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{50}{3}+\frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes lauten also

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Symmetrieachse in der Höhe $\frac{5}{4}$ über dem Boden.

Lösung 11.16 Das gegebene Integral läßt sich umschreiben zu

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\,dx\,dy = \int_K \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|^{-1} dx\,dy$$

Anschließend führt man die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} z_1+1 \\ z_2+2 \end{pmatrix}$$

durch. Da

$$Dg(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit $|\det Dg(z_1,z_2)| = 1$ gilt, sieht das transformierte Integral wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\int_K \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|^{-1} dx\,dy &= \int_{g^{-1}(K)} \left\|\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right\|^{-1} dz_1\,dz_2 \\
&= \int_{g^{-1}(K)} \|z\|^{-1}\,dz
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$g^{-1}(K) = K - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = B_{23}(0)$$

und $B_{23}(0)$ bezeichnet die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 23.
Nun ändern wir das Integrationsgebiet, indem wir aus der Kreisscheibe von Radius 23 eine Kreisscheibe von Radius ε heraus schneiden und schreiben das Integral mit Polarkoordinaten um.

$$\begin{aligned}
\int_{B_{23}(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \|z\|^{-1}\,dz &= \int_\varepsilon^{23}\int_0^{2\pi} r^{-1} r\,d\varphi\,dr \\
&= \int_\varepsilon^{23}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\,dr \\
&= 2\pi\int_\varepsilon^{23} 1\,dr \\
&= 2\pi(23-\varepsilon)
\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir den Limes für ε gegen Null.

$$\begin{aligned}
\int_{B_{23}(0)} \|z\|^{-1}\,dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{23}(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \|z\|^{-1}\,dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi(23-\varepsilon) \\
&= 46\pi
\end{aligned}$$

Das Integral existiert also im Sinne des Kapitels “Integration unbeschränkter Funktionen”.

Lösung 11.17 Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K \rho(r(x))\,dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{6\cdot 10^6} \rho(r)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta \left(\int_0^{3\cdot 10^6} 12\cdot 10^3 r^2 - 10^{-3} r^3\,dr + \int_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6} 6\cdot 10^3 r^2 - \tfrac{1}{3}10^{-3} r^3\,dr\right) \\
&= 2\pi(-\cos\pi + \cos 0)\left(4\cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{4}10^{-3} r^4\Big|_0^{3\cdot 10^6} + 2\cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{12}10^{-3} r^4\Big|_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6}\right) \\
&= 4\pi\left(108\cdot 10^{21} - \tfrac{81}{4}\cdot 10^{21} + 432\cdot 10^{21} - 108\cdot 10^{21} - 54\cdot 10^{21} + \tfrac{27}{4}\cdot 10^{21}\right) \\
&= 4\pi\tfrac{364}{2}\cdot 10^{21} = 1458\pi\cdot 10^{21} \approx 4{,}58\cdot 10^{24}
\end{aligned}$$

Die Masse der Erde beträgt tatsächlich ungefähr $5{,}9736\cdot 10^{24}$ kg. Das Modell ist offensichtlich stark vereinfacht.

Lösung 11.18 Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und $r^2 = x^2 + y^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_R \rho(r(x,y,z))\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_R \frac{z+4}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{6}{5}} \frac{z+4}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^{10} z+4\,dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\frac{6}{5}} r^{-1}\,dr \\
&= \left[\tfrac{1}{2}z^2+4z\right]_0^{10}\ 2\pi\ [\ln r]_1^{\frac{6}{5}} \\
&= (50+40)\,2\pi\ln\tfrac{6}{5} = 180\pi\ln\tfrac{6}{5}
\end{aligned}$$

Lösung 11.19

a) Nach Vorlesung ist $\Theta_L = \frac{8}{15}\pi R^5$. Das Volumen einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi R^3$. Wegen $\rho \equiv 1$ ist dies auch die Masse. Also gilt

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\tfrac{4}{3}\pi R^3 R^2 = \tfrac{2}{5} M R^2$$

b) Die Transformation $g(x,y,z) = (ax, ay, bz)$ bildet die Einheitskugel K_1 auf das gegebene Rotationsellipsoid E ab, also $g(K_1) = E$. Hierzu ist $\det Dg(x,y,z) = a^2 b$. Zur Integration über die Einheitskugel werden Kugelkoordinaten verwendet.

$$\begin{aligned}
\Theta_L &= \int_E d_L^2(x,y)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_E x^2+y^2\,dx\,dy\,dz \\
&\quad \text{(Pythagoras: Abstand eines Punktes in der } x,y\text{-Ebene vom Ursprung)} \\
&= \int_{K_1} \left((a\bar{x})^2 + (a\bar{y})^2\right) a^2 b\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z} \\
&= a^4 b \int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (r\sin\vartheta)^2\,r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
&\quad \text{(Abstand von der } z\text{-Achse hängt jetzt von } r \text{ und } \vartheta \text{ ab)} \\
&= a^4 b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4 b\,2\pi\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\int_0^{\pi} 3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4 b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\left[-3\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta\right]_0^{\pi} d\vartheta \\
&= a^4 b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\left(3 - \tfrac{1}{3} + 3 - \tfrac{1}{3}\right) \\
&= a^4 b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{15} a^4 b\pi
\end{aligned}$$

Bemerkung: Im Falle der Kugel in Teil a) ist $a = b = R$ und man erhält die bereits bekannte Formel.

c) Das Volumen des Rotationsellipsoids (und wegen $\rho \equiv 1$ auch die Masse) ist $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt sich sofort

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi a^2 b\, a^2 = \tfrac{2}{5} M a^2$$

Lösung 11.20 Die Kurve Γ ist eine Schraubenlinie um die z-Achse, die im Punkt $(1,0,0)$ startet, den Radius 1 hat und innerhalb von zwei Umdrehungen die Höhe 2 erreicht. Die Länge l der Kurve Γ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^2 \|\dot\gamma(t)\|\,dt \\
&= \int_0^2 \left\| \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2\left(\sin^2(2\pi t)+\cos^2(2\pi t)\right)+1}\,dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2+1}\,dt \\
&= 2\sqrt{4\pi^2+1}
\end{aligned}$$

Lösung 11.21

- $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (St. Petersburg) bzw. $\varphi = -\frac{5}{6}\pi$ (Anchorage)
- $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, wobei $t \in [-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}]$
- $m_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ und
  $m_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}\pi \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
  (Ohne Berücksichtigung der Durchlaufrichtung, da nur nach der Länge gesucht wird)
- $$\text{Länge}(b) = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R\cos\frac{\pi}{3}\,dt = \frac{1}{2}\pi R$$
  $$\text{Länge}(m_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} R\,dt = \frac{1}{6}\pi R$$

Für das zweite Teilstück m_2 ergibt sich analog die selbe Länge.

Damit hat die Kurve entlang des Breitenkreises die Länge $\frac{1}{2}\pi R \approx 10\,000$ [km], die Kurve über den Nordpol insgesamt $\frac{1}{3}\pi R \approx 6\,700$ [km], also ein Drittel kürzer.

Lösung 11.22 Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Sphäre (mit $R = 6\,371\,000$):

$$x(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}x(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}x(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit

$$V = \frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\left\|\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right\|}, W = \frac{\frac{\partial x}{\partial\vartheta}}{\left\|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right\|}, N = V\times W$$

erhält man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei V und W eine Basis der Tangentialebene und N der Normalenvektor sind.
Mit den gegeben Zahlen erhält man

$$X = x(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 4001512 \\ 498730 \\ 4932424 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.123678 \\ 0.992322 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -0.768255 \\ -0.095751 \\ 0.632941 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0.628082 \\ 0.078281 \\ 0.774199 \end{pmatrix}$$

Dann ist $T_X^{aff}S = \{X + \lambda V + \mu W \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ der Tangentialraum.

Der Punkt Y lässt sich eindeutig als $Y = X + \lambda V + \mu W + \nu N$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ schreiben. $X + \lambda V + \mu W$ ist dann die Projektion auf den Tangentialraum, und ν gibt den Abstand von Y zur Ebene an.
Hier erhalten wir $\lambda = 254.14$, $\mu = 247.11$ und $\nu = 63.99$. Der gesucht Punkt liegt demzufolge von der Hofgartenwiese aus 254 Meter nördlich und 247 Meter östlich auf nahezu der gleichen Höhe.
Es handelt sich also um die Terrasse des Alten Zolls.

Lösung 11.23

a) Die Parametrisierung beschreibt einen Zylindermantel. Der Zylinder hat eine Grundfläche von Radius 1, die Höhe 1 und die Symmetrieachse des Zylinders liegt auf der z-Achse des Koordinatensystems.

b)

$$\begin{aligned} x \circ \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ x \circ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

Bei der Kurve $x \circ \gamma_1$ handelt es sich um eine Strecke vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt $(1,0,1)$. Sie verläuft parallel zur Symmetrieachse des Zylinders und steht senkrecht auf der $x-y-$Ebene und somit senkrecht auf der Grundfläche des Zylinders.
Die Kurve $x \circ \gamma_2$ ist eine geschlossene Kreiskurve auf dem Zylindermantel. Sie liegt auf Höhe $\frac{1}{2}$ und verläuft parallel zur Grundfläche des Zylinders.

c) Mit Hilfe der beiden Kurven aus dem vorherigen Aufgabenteil sollen zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt

$$x\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_1(t))\Big|_{t=\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_2(t))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0,\frac{1}{2})$ lauten also $v_1 = (0,0,1)^T$ und $v_2 = (0,2\pi,0)^T$. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den ganzen Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0,\frac{1}{2})$ auf.

d) Da die beiden Vektoren v_1 und v_2 den Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0,\frac{1}{2})$ aufspannen, berechnet sich der Normalenvektor an die Fläche im Punkt $x(0,\frac{1}{2})$ wie folgt:

$$n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad n &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) Der metrische Tensor G auf der Mantelfläche des Zylinders berechnet sich wie folgt

$$G = (Dx)^T Dx$$

und

$$Dx = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\varphi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\varphi) & 2\pi\cos(2\pi\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\varphi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) Aus dem Skript wissen wir, dass sich die Länger l_1 der Kurve $x \circ \gamma_1$ auf dem Zylin-

dermantel wie folgt mit Hilfe des metrischen Tensors berechnen läßt.

$$\begin{aligned}
l_1 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot{\gamma}_1(t)\cdot\dot{\gamma}_1(t)}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Für die Länge l_2 der Kurve $x \circ \gamma_2$ auf dem Zylindermantel ergibt sich

$$\begin{aligned}
l_2 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot{\gamma}_2(t)\cdot\dot{\gamma}_2(t)}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 2\pi\,dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

g) Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $x\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Um den Winkel α zu berechnen, in dem sie sich schneiden, benötigen wir die beiden Tangentialvektoren v_1 und v_2. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die beiden Kurven schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lösung 11.24 Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -h\sin\varphi & h\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\varphi & \cos\varphi \\ h\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die beiden Kurven sich im Punkt $x(\varphi_0, h_0)$ schneiden und $\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ h_0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{m}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ t \end{pmatrix}$ die zugehörigen Kurven im Parameterbereich sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}(t)\bigg|_{t=\varphi_0} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\tilde{m}(t)\bigg|_{t=h_0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die beiden Kuven auf der Hyperfläche schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lösung 11.25 Der Graph der Funktion g ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{g}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}$$

Also können wir die Länge l des Graphen von g zwischen den beiden Punkten $(-1,\cosh(-1))$ und $(1,\cosh(1))$ wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\dot{g}^2(t)}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh t\,dt \\ &= \sinh t\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Graph von cosh wird auch als *Katenoide* bezeichnet. Er beschreibt den Verlauf eines Seils, das an zwei Punkten aufgehangen wird.

Lösung 11.26

a) Um das Integral auf direktem Weg zu berechnen, geben wir als erstes eine Parametrisierung von ∂K als Kurve an:

$$\gamma\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine geschlossene Kreiskurve um den Ursprung mit Radius 1. Der Normalenvektor an die Kurve ist der Vektor $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\,dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\right) dt \\ &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

b) Alternativ kann man das Integral auch mit Hilfe des Satz von Gauß berechnen. Da-

nach gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial K}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}\cdot N\,dl &= \int_K \operatorname{div}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} dx\,dy \\ &= \int_K 3x^2+3y^2\,dx\,dy\end{aligned}$$

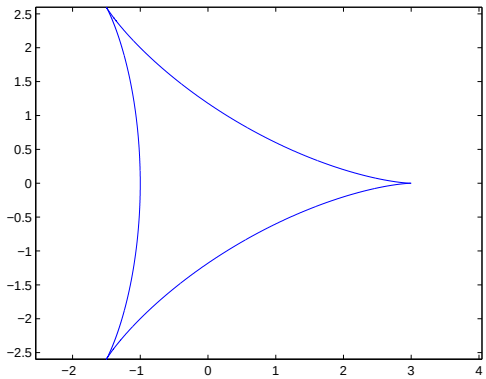
Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial K}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}\cdot N\,dl &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(3\,(r\cos\varphi)^2+3\,(r\sin\varphi)^2\right) r\,dr\,d\varphi \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} 3r^3\,d\varphi\,dr \\ &= 6\pi\int_0^1 r^3\,dr \\ &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Lösung 11.27 Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t+\cos 2t\\ 2\sin t-\sin 2t\end{pmatrix},\qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$\gamma(0)=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ \gamma(\pi)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\gamma(\tfrac{3\pi}{2})=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\ \gamma(2\pi)=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$



Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega)=\int_\Omega 1\,dx$

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1dx=\int_\Omega \operatorname{div}F\,dx\,dy \quad \text{mit div } F=1\text{, z.B. } F(x,y)=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\\ &= \int_\Gamma F\cdot N\,dl \qquad\qquad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} ||\dot\gamma(t)||\, dt\,, \quad N = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t + 2\cos t\cos 2t - 2\cos^2 2t) dt
\end{aligned}
$$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$,

also $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_0^{2\pi} [(2\cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)] dt \\
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Lösung 11.28 Kurve $\Gamma : \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi) \\ \gamma_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Normale $N = \dfrac{1}{||\gamma'(\varphi)||} \begin{pmatrix} \gamma_2'(\varphi) \\ -\gamma_1'(\varphi) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{||\gamma'(\varphi)||} \begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Sei Ω die von Γ eingeschlossene Fläche.

Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega 1 dx dy$

Setze $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt div $F = 1$ und der Gaußsche Integralsatz liefert:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega 1 dx dy &= \int_\Omega \mathrm{div} F dx dy \\
&= \int_\Gamma F \cdot N dl \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{||\gamma'(\varphi)||} \begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} ||\gamma'(\varphi)|| d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (r(\varphi)\cos\varphi(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi) \\
&\quad + r(\varphi)\sin\varphi(-r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi)) d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Lösung 11.29 Die Antworten lauten:

a) Ja!

b) Ja! Die Menge läßt sich auch schreiben als $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja!

f) Ja!

Lösung 11.30

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ sein Rand, unter Voraussetzung daß es eine glatte Fläche ist; (in dem Sinn, daß der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, Stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt). Wir bezeichnen mit $N(x)$ die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V(x)$ auf $\overline{\Omega}$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(V(x))\,dx = \int_{\partial\Omega} V(x)\cdot N(x)da$$

b) Die Gleichung ist explizit

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x)\right) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^n V_i(x)N_i(x)\right) da$$

wobei $V(x) = (V_1(x), V_2(x), \cdots, V_n(x))$ and $N(x) = (N_1(x), N_2(x), \cdots, N_n(x))$.

Lösung 11.31 Die Formel für die Integration der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über eine stetige differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist.

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|dt$$

Lösung 11.32 Laut Skript ist das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}.$$

Lösung 11.33 Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \left(\partial_v x \mid \partial_w x\right) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\sin v & -r\cos v \sin w \\ (R + r\cos w)\cos v & -r\sin v \sin w \\ 0 & r\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R+r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\sqrt{\det G(v,w)} = r(R+r\cos w)$.

$$\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt}(\mathscr{S}) &= \int_{\mathscr{S}} da = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\det G(v,w)}\,dv\,dw \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos w)\,dv\,dw \\
&= 2\pi(2\pi rR + \int_0^{2\pi} r^2\cos w\,dw) \\
&= 4\pi^2 rR.
\end{aligned}$$

Lösung 11.34 Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned}
G &= (Dx)^T Dx \\
&= \begin{pmatrix} -h\sin\varphi & h\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\varphi & \cos\varphi \\ h\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sqrt{\det G} &= \sqrt{2}h
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Fläche

$$\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt(Kegel)} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{H} \sqrt{2}h\,dh\,d\varphi \\
&= 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{2}H^2 = \sqrt{2}\pi H^2.
\end{aligned}$$

12 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Lösung 12.1 Wir nehmen an, dass alle Drehungen in mathematisch positiver Drehrichtung ("Rechte-Faust-Regel" in rechthändigen Koordinatensystem) durchgeführt werden.

a) Sei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, f, g, und h die drei Transformationen (Abbildungen):

f sei die Rotation um die y-Achse, das heißt $f(e_2) = e_2$.

Der Rotationswinkel von f ist $\pi/2$, dadurch bekomen wir $f(e_3) = e_1$ und $f(e_1) = -e_3$.

Die Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

g sei die Rotation um die z-Achse und h die Rotation um die x-Achse. Durch die gleichen Überlegungen bekomen wir, dass die Matrizen zu diesen Abbildungen

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

und

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

sind.

b) Nennen wir nun die gesamte Abbildung k, $k = h \circ g \circ f$ und somit ist ihre Matrix

$$\begin{aligned} M_k &= M_h \cdot M_g \cdot M_f && (35) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (36) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (37) \end{aligned}$$

c) Wir merken, dass wir einfach unser Objekt um mit dem Winkel $\pi/2$ um die z-Achse gedreht haben.

Lösung 12.2

a) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Betrachten wir x, y und z als Funktionen von t, $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$. $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ sind einfach $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{dy}{dt}(t)$ und $\frac{dz}{dt}(t)$ (siehe Vorlesung).

Die Lösung beschreibt also die Flugbahn eines Punktes durch die Eigenschaften seiner Geschwindigkeit.

Die Nullen in der letzten Zeile der Matrix A und die Eins im Vektor b bedeuten eine konstante Geschwindigkeit in z-Richtung. Ferner bedeutet die Matrix eine Rotation um den Ursprung mit dem Winkel $\pi/2$ in der (x,y)-Ebene.

Das heißt, betrachtet man die Projektion der Geschwindigkeit auf die (x,y)-Ebene, so läuft die projizierte Flugbahn auf einem Kreis. Die zusätzlich konstante Geschwindigkeit in z-Richtung besagt, dass es sich insgesamt um eine Schraubenlinie handelt.

c) Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\begin{pmatrix} x & = & r\cos(t+C) \\ y & = & r\sin(t+C) \\ z & = & t \end{pmatrix}$$

Lösung 12.3 Die quadratischen Polynome lassen sich wie folgt darstellen:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

wobei $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.
Wir suchen P so, dass

$$\sum_i (P(x_i) - y_i)^2 = \sum_i \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2 = \|Aa - y\|^2$$

minimal sei.

$$A^\top A a = A^\top y$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T \\ y &= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T = (2,1,0,1,2)^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$g = A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Jetzt lösen wir die Gleichung $Ba = g$ (B und g sind oben definiert) (zum Beispiel) mit QR-Zerlegung.
Sei dazu

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\|u_1\| = 5\sqrt{5}$$
$$\alpha_1 = -\operatorname{sign}(u_{11})\|u_1\| = -5\sqrt{5}$$

und weiter

$$n_1 = u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+5\sqrt{5} \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{125+25\sqrt{5}} n_1 n_1^T \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$R_1 = {Q^{(1)}}^T B = Q^{(1)} B = \begin{pmatrix} -5\sqrt{5} & 0 & -\frac{78}{\sqrt{5}} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir brauchen keinen weiteren Schritt, weil R_1 schon Dreiecks-Gestalt hat und können unser System jetzt durch Rückwärts-Einsetzen lösen.

Die neue System-Gleichung ist

$$R_1 a = g_1 \qquad \text{mit } g_1 = {Q^{(1)}}^T g = Q^{(1)} g = \begin{pmatrix} -\frac{42}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{6}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{14} = \frac{3}{7} \\ a_1 &= 0 \\ -5\sqrt{5} a_0 - \frac{78}{\sqrt{5}} a_2 &= -\frac{42}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow a_0 &= -\frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{78}{\sqrt{5}} a_2 - \frac{42}{\sqrt{5}} \right) = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

und das Polynom ist

$$p = \frac{12}{35} + \frac{3}{7} x^2$$

Lösung 12.4

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \tilde{v}_2 &= a_2 - a_2 \cdot v_1 v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ \tilde{v}_3 &= a_3 - a_3 \cdot v_1 v_1 - a_3 \cdot v_2 v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{50}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \frac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 12.5 Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $\|p_0\| = 1 \Rightarrow q_0(t) = \frac{p_0(t)}{\|p_0\|} = 1$
- $g(p_1, q_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{q}_1(t) = p_1(t) - g(p_1, q_0) q_0(t) = t - \frac{1}{2}$
  $\|\tilde{q}_1\| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q_1(t) = \frac{\tilde{q}_1(t)}{\|\tilde{q}_1\|} = \sqrt{3}(2t - 1)$

- $g(p_2,q_0) = \frac{1}{3}$ und $g(p_2,q_1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, denn

$$\tilde{q}_2(t) = p_2(t) - g(p_2,q_0)q_0(t) - g(p_2,q_1)q_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$\|\tilde{q}_2\| = \frac{1}{6\sqrt{5}} \Rightarrow q_2(t) = \frac{\tilde{q}_2(t)}{\|\tilde{q}_2\|} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$

Lösung 12.6

a) Da $AA^T = \mathbb{1}$ gilt, handelt es sich um eine orthogonale Matrix.

b) Die Eigenwerte der Matrix A lauten

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

c) Es handelt sich weder um eine reine Drehung, noch um eine reine Spiegelung, sondern sowohl um eine Drehung, als auch um eine Spiegelung. Es handelt sich also um eine so genannte "Drehspiegelung", d.h. eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in der xy-Ebene und eine Spiegelung an der xy-Ebene.

Lösung 12.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\operatorname{sign}(1) \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= -\sqrt{1+4+4} \\ &= -\sqrt{9} = -3 \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \mathbb{1} + \frac{1}{\alpha_1 v_{11}} v_1 v_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 18 \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad Q^{(1)} A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^{(2)}
$$

$$
b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
b^{(2)} = Q^{(1)} b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 90 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{15}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_2 = -\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{9+16} = -5
$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^{(2)} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} (0+24+16) \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b^{(3)} = Q^{(2)} b^{(2)} &= \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} (0-120+120) \\ &= \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $(x,y) = (2,3)$ wird $f(x,y)$ minimal.

$$f(2,3) = \|30\|^2 = 900$$

Lösung 12.8

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d)

$$AB - 1\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB - 1\mathbb{1}) = -2 + 0 + 0 - (0 + 0 - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ 1 ist ein Eigenwert der Matrix AB.
Berechnung eines zugehörigen normierten Eigenvektors:

$$\begin{aligned} & (AB - 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist also der Vektor

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Die drei Vektoren u, v und w mit

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

f)

$$\begin{aligned} ABu &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u \\ ABv &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v \\ ABw &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -w \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die darstellende Matrix zu der Abbildung $x \mapsto ABx$ bezüglich der Basis aus Aufgabenteil e) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

g) Bei der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

handelt es sich um eine Rotation um π in der Ebene senkrecht zu u, also um die durch u aufgespannte Gerade als Drehachse.

Lösung 12.9 Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$
- $\tilde{v}_2 = a_2 - (a_2.v_1)v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$
  $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$
- $\tilde{v}_3 = a_3 - (a_3.v_2)v_2 - (a_3.v_1)v_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$
  $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)^T$

Sei $v_4 = (0,0,0,1)^T$, denn

$$\|v_4\| = 1, \quad v_1.v_4 = v_2.v_4 = v_3.v_4 = 0$$

und v_1, v_2, v_3, v_4 ist eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Lösung 12.10

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n-facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{I}) = \det((1-\lambda)\mathbf{I}) = (1-\lambda)^n \det \mathbf{I} = (1-\lambda)^n \,.$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.

Lösung 12.11

a)

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}\,, \\
A^3 &= AA^2 = A \cdot (-\mathbb{1}) = -A\,, \\
A^4 &= AA^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = \mathbb{1}\,, \\
A^5 &= AA^4 = A \cdot \mathbb{1} = A\,.
\end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\Rightarrow A^k = \begin{cases} A & \text{für} \quad k = 4l+1\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -\mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+2\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -A & \text{für} \quad k = 4l+3\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ \mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+4\,,\ l = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \right) \mathbb{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A \\ &= \cos t \cdot \mathbb{1} + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned} A &= C \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{At} &= C \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T.$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\begin{aligned} \Rightarrow B^{-1} = B^T &= \left(e^{tA}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right)^T = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Lösung 12.12

a) Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(AB)^T AB &= B^T A^T AB \\
&\overset{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\
&= B^T B \\
&\overset{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^T = (AB)^{-1}$$

b) Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow \quad A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned}
\det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\
&= (\det Q)^{-1} \, \lambda_1 \cdots \lambda_n \det Q \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_n
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow \quad |\det A| = 1$$

Lösung 12.13

a)

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{2} = \|y\|\,, \\
\cos\varphi &= \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,. \\
Ax &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ax\| = 2\,, \\
Ay &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ay\| = 2\,, \\
\cos\psi &= \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \cos\varphi\,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\angle(Ax,Ay) = \angle(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

$A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ impliziert:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|Ax\| = \|\lambda Qx\| = |\lambda| \|Qx\| = |\lambda| \|x\|, \\
&\quad \|Ay\| = \|\lambda Qy\| = |\lambda| \|y\|, \\
&\quad Ax \cdot Ay = \lambda Qx \cdot \lambda Qy = \lambda^2 (Qx \cdot Qy) = \lambda^2 (x \cdot y), \\
&\Rightarrow \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{\lambda^2 (x \cdot y)}{|\lambda|^2 \|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}, \text{ da } \lambda^2 = |\lambda|^2.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist A offensichtlich invertierbar. ($A^{-1} = \lambda^{-1} Q^T$)

c) Allgemein gilt: $A = \lambda Q$

$$\Rightarrow \det A \quad = \quad \det(\lambda Q) = \lambda^n \det Q$$

Wir wissen: $|\det Q| = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned}
|\det A| &= |\lambda|^n \\
\Leftrightarrow \quad |\det A|^{\frac{1}{n}} &= |\lambda|
\end{aligned}$$

Hier in unserem Beispiel gilt: $\det A = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2} > 0$.

Behauptung: $\lambda = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. Denn

$$(\det A)^{1/3} = \left(2^{3/2}\right)^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q \in O(3)\,!}.$$

Beachte: $\lambda = \sqrt{2} =$ Länge der Spaltenvektoren von A!

Im Allgemeinen muss man das Vorzeichen von λ prüfen. Hier ist das klar wegen $n = 3$!

Lösung 12.14 Um die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A zu berechnen, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda\mathbb{1}) \\
&= \det\begin{pmatrix} \cos\alpha-\lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\cos\alpha-\lambda)(-\cos\alpha-\lambda)-\sin^2\alpha \\
&= -\cos^2\alpha+\lambda\cos\alpha-\lambda\cos\alpha+\lambda^2-\sin^2\alpha \\
&= \lambda^2-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) \\
&= \lambda^2-1
\end{aligned}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$P_A(\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\pm 1$$

Die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A lauten also $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=1$.
Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
& & Ax &= \lambda_{1,2}x \\
&\Leftrightarrow & (A-\lambda_{1,2}\mathbb{1})x &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos\alpha\pm 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{cases} (\cos\alpha\pm 1)x_1+x_2\sin\alpha &= 0 \\ x_1 &= \frac{\cos\alpha\mp 1}{\sin\alpha}x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Setzt man x_1 ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
& (\cos\alpha\pm 1)x_1+x_2\sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\cos\alpha\pm 1)\tfrac{\cos\alpha\mp 1}{\sin\alpha}x_2+x_2\sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha}x_2+x_2\sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -x_2\sin\alpha+x_2\sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 &= 0
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1=-1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{\beta\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\} &= \left\{\beta\begin{pmatrix} -\tan\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\beta\begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

denn mit Hilfe der Additionstheoreme läßt sich zeigen

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\tan\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{\beta\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{\beta\begin{pmatrix} \cot\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\beta\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

wobei man ebenfalls mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen kann, dass

$$\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Lösung 12.15

a)

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos(-\gamma) - \sin\beta\sin(-\gamma) & -\cos\beta\sin(-\gamma) - \sin\beta\cos(-\gamma) \\ \sin\beta\cos(-\gamma) + \cos\beta\sin(-\gamma) & -\sin\beta\sin(-\gamma) + \cos\beta\cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma) & -\sin(\beta-\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.

Lösung 12.16

a) Nein! In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix komplex sein können.

b) Ja! Siehe einleitendes Beispiel im Kapitel Diagonalisierung.
Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spiegelungsmatrix eine orthogonale Matrix ist. Zudem wissen wir, dass der Betrag der Eigenwerte einer orthogonalen Matrix jeweils 1 ist. Da die Spiegelungsmatrix zudem symmetrisch ist und nur reelle Einträge hat, kann sie nur reelle Eigenwerte haben. Somit müssen die Eigenwerte ± 1 sein.

c) Nein! Wie im Fall der Drehmatrix können die Eigenwerte auch komplex sein.

d) Ja! Siehe Vorlesung.

e) Ja! Siehe Vorlesung.

f) Nein! Die Matrix $A = 2\mathbb{1}$ ist zwar winkeltreu aber nicht längentreu.

Lösung 12.17

a)

$$\begin{aligned}
S_n u &= u - 2\frac{u\cdot n}{\|n\|^2}n = u - \frac{2u\cdot(u-v)}{\|u-v\|^2}\cdot(u-v) \\
2u\cdot(u-v) &= 2\|u\|^2 - 2u\cdot v\,. \\
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u\cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\
\Rightarrow\ S_n u &= u - (u-v) = u - u + v = v\,.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v\cdot n = 2v\cdot(u-v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u-v\|^2$.

b)

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\
\Leftrightarrow\quad \sqrt{2} &= |\alpha|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung 12.18

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Wir nehmen

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\|u_1\| &= \sqrt{5} \\
\alpha_1 &= -\operatorname{sign}(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

hierbei sorgt das negative Vorzeichen für Stabilität, vgl. Skript

$$
\begin{aligned}
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{10+2\sqrt{5}} n_1 n_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} n_1 n_1^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anschließend berechnen wir $R_1 = {Q^{(1)}}^T A$, indem wir die Matrix ${Q^{(1)}}^T$ nacheinander auf die Spalten der Matrix A anwenden.

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
R_1 = Q^{(1)^T} A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

Man sieht, dass

$$
\begin{aligned}
A &= Q^{(1)} R_1, \\
Q &= Q^{(1)}
\end{aligned}
$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Wie oben, setzen wir

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\|u_1\| &= \sqrt{2}, \\
\alpha_1 &= -\operatorname{sign}(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} \\
&= \mathbb{1} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} n_1 n_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} n_1 n_1^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir wenden ${Q^{(1)}}^T$ auf die Spalten der Matrix B an:

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+2\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(6+3\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+3\sqrt{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow {Q^{(1)}}^T B &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
u_2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\|u_2\| &= \sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen v_2 als Ergäzung von u_2 mit 0 in der ersten Zeile um einen Vektor im $\mathbb{R}^3$

zu bekommen.

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\|v_2\| &= \sqrt{6}, \\
\alpha_2 &= -\operatorname{sign}(v_{22})\|v_2\| \\
n_2 &= v_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \\ -2 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_2 n_2^T}{\|n_2\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} n_2 n_2^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Um $R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T B$ zu berechnen, wenden wir ${Q^{(2)}}^T$ einzeln auf die Spalten der Matrix ${Q^{(1)}}^T B$ an:

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 0 \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{3}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} (-6) \\
&= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c) Nach Berechnung der QR-Zerlegung läßt sich einfach bestimmen, ob eine quadratische Matrix vollen Rang hat oder nicht, denn eine Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn sie invertierbar ist und eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Eigenwerte ungleich Null sind. Des weiteren ist das Matrixprodukt zweier Matrizen nur dann invertierbar, wenn beide einzelnen Matrizen invertierbar sind. Da die Matrizen $Q^{(k)}$ grundsätzlich invertierbar sind müssen wir nur noch prüfen, ob die Diagonaleinträge der Matrix R ungleich Null sind. Ist das gegeben, so hat die Matrix QR vollen Rang.
$\text{Rang}(A) = 2$, $\text{Rang}(B) = 3$

d) Um ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer QR-Zerlegung zu lösen, formt man das Gleichungssystem wie folgt um

$$\begin{array}{rrcl} & Ax & = & b \\ \Leftrightarrow & QRx & = & b \\ \Leftrightarrow & Rx & = & Q^T b \end{array}$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned} Q^T b = Qb = Q^{(1)} b &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \left(7+5\sqrt{5}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{\sqrt{5}} \\ -\frac{9}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_2 & = & 7 \\ 3x_2 & = & 9 \end{array} \right. & & \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{5}(7-4x_2) = -1 \\ x_2 & = & 3 \end{array} \right. & & \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet also $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem $Bx = d$ lösen wir auf die gleiche Weise. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned}
Q^T d &= Q^{(2)} Q^{(1)} d \\
&= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2}\left(10\sqrt{2}+9\right) \right) \\
&= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{10\sqrt{2}+9}{1+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= Q^{(2)} \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \left(-2\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}+1\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Anschließend lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-10\sqrt{2}+\sqrt{2}x_2+3\sqrt{2}x_3\right) \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(4\sqrt{6}-\sqrt{6}x_3\right) \\ x_3 = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Bx = d$ lautet also $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung 12.19

a) Aus der ersten Zeile ergibt sich sofort $x_1 = 1$, aus der dritten Zeile $x_2 = 1$. Damit steht in der zweiten Zeile $2+1 = 1$, was offensichtlich falsch.

b) Wir berechnen die QR-Zerlegung von A. Setzen wir dazu

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|u_1\| &= \sqrt{5}, \\
\alpha_1 &= -\operatorname{sign}(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{5} \\
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} n_1 n_1^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nun wenden wir die Matrix $Q^{(1)^T} = Q^{(1)}$ auf die Spalten der Matrix A an.

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \left(5+\sqrt{5}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} 2 \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$R = Q^{(1)^T} A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = Q^{(1)^T} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die zu lösende Gleichung hat also nun die Form

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir merken daran, dass die beiden letzte Zeilen sowohl $x_2 = -1$ als auch $x_2 = 1$ liefern. Das ist unmöglich, daran sieht man ebenfalls, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Im zweiten Schritt setzen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

und ergänzen mit 0 in der ersten Zeile, um den Vektor $u_2 \in \mathbb{R}^3$ zu bekommen.

$$\begin{aligned}
u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\|u_2\| &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \\
\alpha_2 &= -\operatorname{sign}(u_{22})\|u_2\| = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\
n_2 &= u_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_2 n_2^T}{\|n_2\|^2} = \mathbb{1} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} n_2 n_2^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Um $R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T A = Q^{(2)} Q^{(1)} A$ zu berechnen, wenden wir $Q^{(2)}$ auf die Spalten der Matrix $Q^{(1)}A$ an.

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Vector n_2 steht.

$$\begin{aligned} Q^{(2)} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{6+\sqrt{6}}{5} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} R = Q^{(2)} Q^{(1)} A &= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b_2 = {Q^{(2)}}^T b_1 = Q^{(2)} b_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{4-\sqrt{6}}{5} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4-\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ A &= QR, \\ Q &= Q^{(1)} Q^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} -\sqrt{5}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2 & = & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} x_2 & = & -\frac{4}{\sqrt{30}} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{3}{5} - \frac{2}{5} x_2 = \frac{1}{3} \\ x_2 & = & \frac{2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Die Lösung unseres Minimierungsproblems ist also $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Lösung 12.20

a)
```
function x = QRSolve( A, b)
% solves the system Ax=b by using QR decomposition

[m,n]=size(A);

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    n = size(v);
    for l = k:n
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:n
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end


% QR decomposition
[A,alpha]=QRDecomposition(A);

% we have to solve the system Rx=Q^Tb, thus we have to compute Q^Tb
for i = 1:n-1
    b = ApplyQ(i, alpha(i), A(:,i), b);
end

[alphaM,alphaN] = size(alpha);

% now we solve the system Rx=Q^Tb
x(m) = b(m) / A(m,m);
for k = m-1:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - A(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/alpha(k);
end

end
```

b) Als Lösung des 2×2 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und als Lösung des 3×3 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Zuerst müssen wir in *QRDecomposition* ein paar kleine Änderungen vornehmen. Zum einen laufen die Schleifen in der Funktion *ApplyQ*, sowie die erste innere Schleife im Hauptprogramm bis m und nicht nur bis n und zum andern muss die äußere for-Schleife im Hauptprogramm bis n und nicht nur $n-1$ laufen.

```
function [A,alpha] = QRDecompositionNonSymmetric( A )
% QR - decomposition
% argument "A" is the matrix we want to decompose

% sign, being either +1 or -1, but not 0
function sig = pmsign (val)
    if (val < 0)
        sig = -1;
    else
        sig = +1;
    end
end

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    m = size(v);
    for l = k:m
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:m
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end

% main program
% get the length of the vector
[m,n] = size( A );

for k = 1:n
    norm = 0;
```

```
    for i =k:m
        norm = norm + A(i,k)*A(i,k);
    end
    norm = sqrt(norm);
    alpha(k) = -pmsign(A(k,k)) * norm;
    A(k,k) = A(k,k) - alpha(k);
    for j = k+1:n
       A(:,j) = ApplyQ( k, alpha(k), A(:,k), A(:,j) );
    end
end

end
```

In *QRSolve* muss man folgende Änderungen vornehmen: Die beiden for-Schleifen in der Funktion *ApplyQ* laufen bis m und nicht nur bis n, bei der Berechnung von $Q^T b$ läuft die Schleife bis n und nicht nur $n-1$ und beim Rückwärts-Einsetzen beginnt die for-Schleife bei n und nicht bei m.

```
function x = QRSolveNonSymmetric( A, b)
% solves the system Ax=b by using QR decomposition

[m,n]=size(A);

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    m = size(v);
    for l = k:m
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:m
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end


% QR decomposition
[A,alpha]=QRDecompositionNonSymmetric(A);

% we have to solve the system Rx=Q^Tb, thus we have to compute Q^Tb
for i = 1:n
    b = ApplyQ(i, alpha(i), A(:,i), b);
```

```
end

% now we solve the system Rx=Q^Tb
for k = n:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - A(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/alpha(k);
end

end
```

Lösung 12.21 Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\sin(ax) = \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right)$$
$$\sin(bx) = \frac{1}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \sin(ax)\sin(bx) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)}{2} - \frac{\left(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x}\right)}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}g(\sin(ax), \sin(bx)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{2(a-b)}\left[\sin\left((a-b)x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)}\left[\sin\left((a+b)x\right)\right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

weil $a - b \neq 0$ und $a + b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ orthogonal sind.

b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3, erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x), \sin(x))}} \sin(x) \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x), \sin(2x))}} \sin(2x) \\ w_3 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x), \sin(3x))}} \sin(3x) \end{aligned}$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g(\sin(ax), \sin(ax)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(ax)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left((2a)x\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^\pi - \frac{1}{2a}\left[\sin\left(2ax\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \\ w_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \\ w_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3x) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot,\cdot)$ analog zum Vorgehen im $\mathbb{R}^3$.

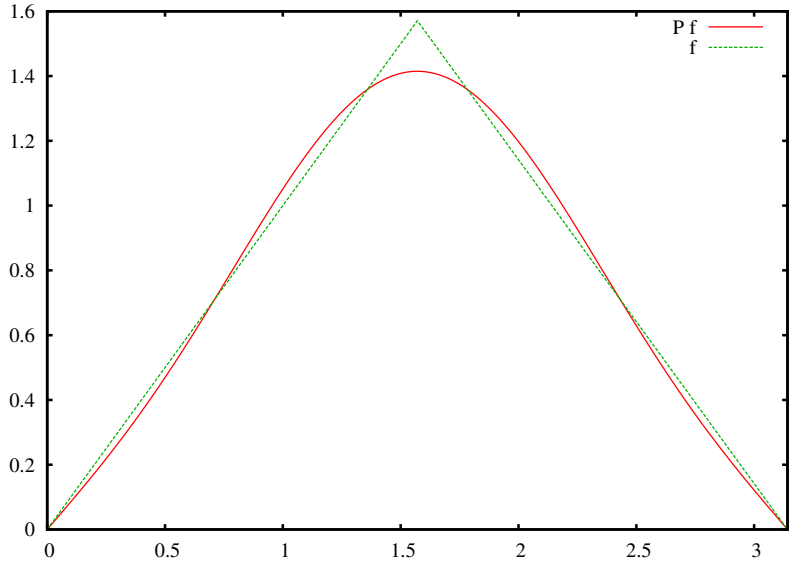
c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x),w_1(x)) &= \int_0^{\pi} f(x)w_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x),w_2(x)) &= \int_0^{\pi} f(x)w_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 \\
g(f(x),w_3(x)) &= \int_0^{\pi} f(x)w_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}w_1(x) - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(x) - \frac{4}{9\pi}\sin(3x)
\end{aligned}
$$



Lösung 12.22 Die Antworten lauten:

a) Ja, denn alle Diagonaleinträge von A sind Null.

b) Nein! Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ja. Man berechnet für eine beliebige schiefsymmetrische 3×3-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = 0 + abc + (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) - 0 - 0 - 0 = 0.$$

d) Ja. $Ax \cdot x = x \cdot A^T x = x \cdot (-A)x = -x \cdot Ax = -Ax \cdot x \Rightarrow 2Ax \cdot x = 0.$

e) Ja. $Ax \cdot x = 0$ bedeutet, dass Ax stets senkrecht auf x steht. Also kann Ax kein Vielfaches von x sein, ausser das Nullfache.

Formal: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann $0 = Ax \cdot x = \lambda x \cdot x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = 0.$

f) Ja, siehe Vorlesung.

g) Ja. $\det(\exp(tA))$ ist stetig (differenzierbar) in t und kann für beliebige t nur die Werte 1 und -1 annehmen, da $\exp(tA)$ stets orthogonal ist. Da die Werte dazwischen nicht möglich sind, muss die (stetige) Funktion für alle t konstant sein. Da

$$\det(\exp(0A)) = \det(\exp(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1,$$

muss auch gelten

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(1A)) = 1.$$

Lösung 12.23 Die Antworten lauten: a) Nein! Bsp. $v = e_3$, $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ b) Ja! c) Ja! Ausmultiplizieren $u_i \cdot u_j = 0$. d) Nein! Siehe a) e) Ja! Wegen c) $v = w = u$, dann $Pv = Pw = u$.

Lösung 12.24 Die Antworten lauten:

a) Nein! Bsp. $A = 0$.

b) Ja! Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $A^T Ax = A^T b$. Dann folgt daraus

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Rightarrow & (x_1 - x_2)A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \|A(x_1 - x_2)\|^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & Ax_1 & = & Ax_2 \end{array}$$

c) Ja! Rang von A gleich n, daraus folgt:

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\Rightarrow A^T Ax \cdot x = \|Ax\|^2 \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Zudem wissen wir, dass die Matrix $A^T A$ positiv semidefinit ist und somit ist $A^T A$ positiv definit.

d) Nein! Beispiel: A sei die Nullmatrix.

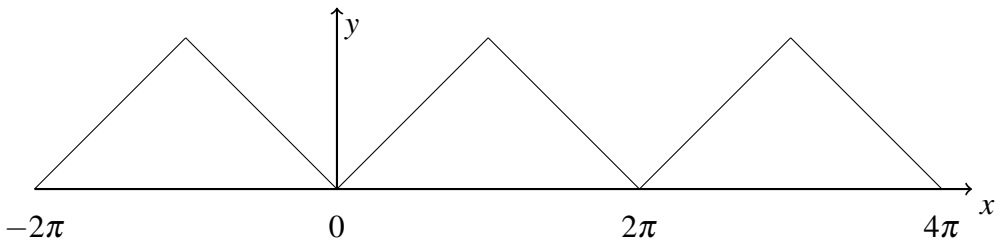
Lösung 12.25

a) Eine orthogonale lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine längentreue Abbildung ($\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$).

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist orthogonal, falls $A^{-1} = A^T$.

Lösung 12.26

a)



b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}xdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi}xdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}x^2\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[2x - \frac{1}{2\pi}x^2\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi}2\pi - \frac{2}{\pi}\pi - \frac{1}{2\pi^2}(2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2}(\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2-\frac{1}{k\pi}y)\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\cos(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\cos(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}-(0\cdot\sin(0)+\underbrace{\cos(0)}_{=1})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[\underbrace{\sin(2k\pi)-\sin(k\pi)}_{=0}\right] \\
& -\frac{1}{k^2\pi^2}\left[2k\pi\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}-(k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k})\right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1+(-1)^k).
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{4}{\pi^2}, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2}, \\
a_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die b_k folgendermaßen berechnen

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2-\frac{1}{k\pi}y)\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\sin(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\sin(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-y\cos(y)+\sin(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[-\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-y\cos(y)+\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-k\pi\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}+\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}-(0\cdot\cos(0)+\underbrace{\sin(0)}_{=0})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[-\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}\right] \\
& -\frac{1}{k^2\pi^2}\left[-2k\pi\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}+\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}-(-k\pi\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}+\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0})\right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-k\pi(-1)^k\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-2k\pi+k\pi(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi}\left[-1+(-1)^k\right] \\
=& \frac{1}{k\pi}\left[-(-1)^k+2-(-1)^k-2+2(-1)^k\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Lösung 12.27

a)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\
\tilde{v}_2 &= \begin{pmatrix}3\\-1\\\sqrt{8}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\\sqrt{8}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\\sqrt{8}\end{pmatrix} \\
v_2 &= \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Die Projektion des Punktes p auf die Ebene berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(p\cdot v_1)v_1+(p\cdot v_2)v_2 &= \left(\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\tilde{n} &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\\sqrt{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{8}\\-4\end{pmatrix}\\
n &= \frac{1}{\|\tilde{n}\|}\tilde{n}=\frac{1}{\sqrt{32}}\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{8}\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Ebene lässt sich also schreiben als

$$
\left\{x\,\middle|\,x\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=0\right\}.
$$

d)

$$
\begin{aligned}
p-(p\cdot n)n &= \begin{pmatrix}1\\2\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\2\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung 12.28

a) Die Fourierdarstellung von g lautet:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\sin(kx)dx.$$

b) Da g dann π periodisch ist, ist g auch 2π periodisch und damit gilt die Fourierdarstellung noch immer.

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

d) Zunaechst stellen wir durch partielle Integration für a_0 fest

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\cos(x) \cdot \cos(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2(x)dx. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx = 1.$$

Kommen wir nun zu a_1. Hier gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)dx \underbrace{=}_{y=\sin(x)} \frac{1}{\pi}\int_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} y^2 dy = 0.$$

Kommen wir nun zu a_2. Hier gilt

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(2x)dx \underbrace{=}_{\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - \cos^2(2x)dx$$

$$\underbrace{=}_{\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - (\frac{1}{2}(1+\cos(4x))dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Hierbei gilt:

$$1-\cos(2x) = 1-(\cos^2(x)-\sin^2(x)) = 1-(1-\sin^2(x)-\sin^2(x)) = 2\sin^2(x).$$

13 Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$

Lösung 13.1 Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!

Für a) und b) beachtet man dazu $\operatorname{grad} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f_1 ist. Wegen $D^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und $D^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0,0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0,t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da t^3 negativ ist für $t < 0$, $= 0$ für $t = 0$ und positiv ist für $t > 0$.

Für c), d) und e) beachtet man $\operatorname{grad} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y-4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt, dass $(0,0)$ kritischer Punkt von f_2 ist. Wegen $D^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-12y^2 \end{pmatrix}$ und $D^2 f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0,0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0,0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0,0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0,\pm 1) = 0$ und $f_2(0,\pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.

Lösung 13.2

a) Kritische Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^3-y)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y(y^2-1)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ und } y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Hessesche Matrix ist

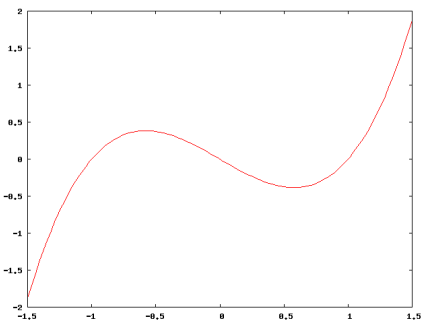
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (y^3-y)(e^x+e^{-x}) & (3y^2-1)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x-e^{-x}) & 6y(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix}$$

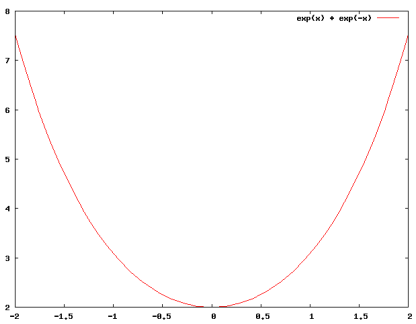
Also

$$(x,y) = (0,+\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$
$$(x,y) = (0,-\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

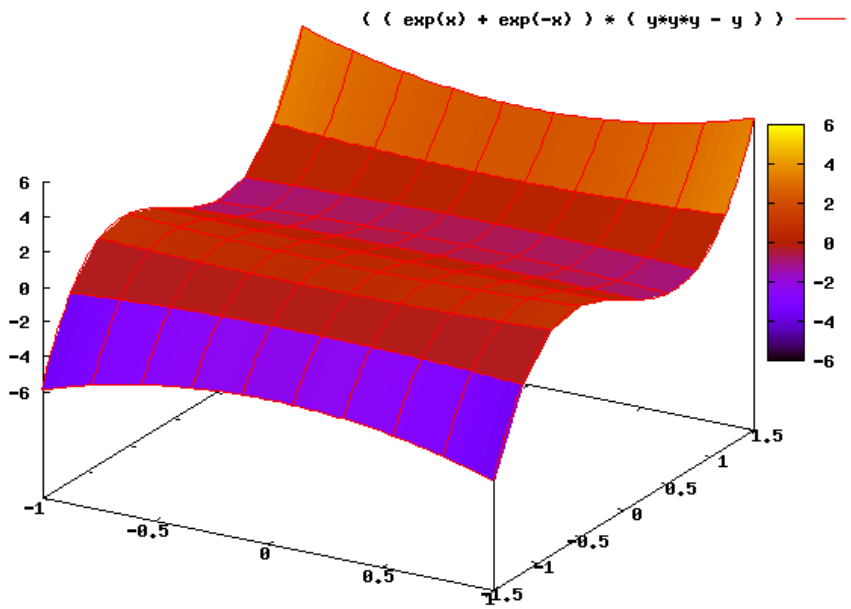
Die Hesse-Matrix ist in beiden Fällen indefinit und beide Punkte $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ sind Sattelpunkte.

b) Wir plotten zunächst die beiden Faktoren von f separat:





und nun den Graphen der gesamten Funktion:



Bemerkung: Für konstantes $y = y_0$ ist $f(x, y_0) = K(e^x + e^{-x})$.

Lösung 13.3

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\xi, y_0+\zeta) = {} & f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)\xi + \partial_y f(x_0,y_0)\zeta \\
& + \partial_y\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(x_0,y_0)\zeta^2 \\
& + \frac{1}{2}\partial_y^2\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta^2 + \frac{1}{2}\partial_y\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2\zeta + \frac{1}{6}\partial_x^3 f(x_0,y_0)\xi^3 + \frac{1}{6}\partial_y^3 f(x_0,y_0)\zeta^3 \\
& + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= -\sin(x+y) = \partial_y f(x,y) \\
\partial_x^2 f(x,y) &= -\cos(x+y) = \partial_y^2 f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) \\
\partial_x^3 f(x,y) &= \sin(x+y) = \partial_y^3 f(x,y) = \partial_y\partial_x^2 f(x,y) = \partial_x\partial_y^2 f(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(\xi,\zeta) &= 1 - \xi\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix} + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right)
\end{aligned}
$$

Lösung 13.4

a)

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ kritischer Punkt $x^* = (0,0)$

b)

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D^2 f(x^*)$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &\Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -\lambda y_1 + y_2 &= 0 \\ y_1 - \lambda y_2 &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -\lambda^2 y_2 + y_2 &= 0 \\ y_1 &= \lambda y_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} (1-\lambda^2) y_2 &= 0 \\ y_1 &= \lambda y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

d)

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= f(-t,t) \\ &= -t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f(t,t) \\ &= t^2 \end{aligned}$$

Lösung 13.5

a) Betrachtet man den Schnitt des Kegels mit einer Ebene parallel zur xy-Ebene in der Höhe z, so erhält man einen Kreis mit Radius $|z|$, d.h. es gilt stets $x^2+y^2=z^2$. Man definiert also

$$g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0.$$

und damit ist

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0\}.$$

b) K ist stetig differenzierbar überall dort, wo $\operatorname{Rang}(Dg) = 1$, also $\nabla g \neq 0$. Das heißt:

$$2\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

K ist also überall außer in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine stetig differenzierbare zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$.

c) Nach der Satz von implizite Funktionen lässt sich K überall dort lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen, wo $\frac{\partial g}{\partial z} = -2z \neq 0$. Falls $z=0$, so ergibt sich $x^2+y^2=0$, also $x=y=0$. K lässt sich also nur in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *nicht* lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen.

d) Nach der Satz von implizite Funktionen lässt sich K überall dort lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen, wo $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \neq 0$. Falls $x=0$, so ergibt sich $y^2-z^2=0$, also $y=\pm z$. K lässt sich also überall außer auf den beiden Geraden $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \pm\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen.

Lösung 13.6

a) Im Fall $c = 1$, $a = b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene P schreiben als

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$$

Setzen wir nun $z = 1$ ein in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, so ergibt sich $x^2 + y^2 = 1$. Die Schnittmenge $P \cap K$ ist also gegeben durch

$$P \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1\}.$$

Das ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,1)$ in der Ebene $z = 1$.

b) Im Fall $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene schreiben als

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 1\}.$$

Alternativ kann man diese Ebene auch schreiben als

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \\ y &= \alpha, \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)^2 \\ \alpha^2 &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\beta = 2\beta \\ \beta &= \frac{1}{2}\alpha^2 \end{aligned}$$

und damit eine Parabel in dem durch die beiden Richtungsvektoren vorgegebenen (orthonormalen) Koordinatensystem.

Bemerkung: Hier wurde der Stützvektor der Ebene so gewählt, dass er im Scheitelpunkt der Parabel liegt. Dadurch ist die Form der Parabelgleichung besonders einfach.

c) Im Fall $c = \frac{4}{5}$, $a = \frac{3}{5}$, $b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene schreiben als

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z = 1\}.$$

Alternativ kann man diese Ebene auch schreiben als

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 0 \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} x &= -\frac{15}{7} + \frac{4}{5}\beta, \\ y &= \alpha, \\ z &= \frac{20}{7} - \frac{3}{5}\beta. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(-\frac{15}{7} + \frac{4}{5}\beta\right)^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{20}{7} - \frac{3}{5}\beta\right)^2 \\ \alpha^2 + \frac{16-9}{25}\beta^2 &= \frac{20^2 - 15^2}{49} - \beta\left(2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{7} - 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{7}\right) \\ \alpha^2 + \frac{7}{25}\beta^2 &= \frac{25}{7} \\ \frac{7}{25}\alpha^2 + \frac{7^2}{25^2}\beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Ellipse in der Ebene P mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 0 \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}$ und Halbachsen der Länge $\frac{5}{\sqrt{7}}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Länge $\frac{25}{7}$ in Richtung $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Auch hier wurde der Stützvektor der Ebene zur Vereinfachung der Rechnung geschickt gewählt.

Lösung 13.7

$$
\begin{aligned}
&f(1,1) = -4\\
&f_x(x,y) = 3x^2 - 7y + 4xy \Rightarrow f_x(1,1) = 0\\
&f_y(x,y) = -7x + 2x^2 \Rightarrow f_y(1,1) = -5\\
&f_{xx}(x,y) = 6x + 4y \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 10\\
&f_{xy}(x,y) = -7 + 4x \Rightarrow f_{xy}(1,1) = -3\\
&f_{yy}(x,y) = 0\\
&f_{xxx}(x,y) = 6\\
&f_{xxy}(x,y) = 4\\
&f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)\\
&\quad + \frac{1}{6}\left(f_{xxx}(1,1)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(x-1)^2(y-1) + 3f_{xyy}(x-1)(y-1)^2 + f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right)\\
&\quad + \mathrm{O}((x-1)^4 + (y-1)^4)\\
&= -4 - 5(y-1) + 5(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1) + \mathrm{O}((x-1)^4 + (y-1)^4)
\end{aligned}
$$

Ausmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
&-4 - 5(y-1) + 5(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1)\\
&= -4 - (5y-5) + (5x^2 - 10x + 5) - (3xy - 3x - 3y + 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x^2y - 4xy - 2x^2 + 4x + 2y -\\
&\qquad = x^3 - 7xy + 2x^2y = f(x,y)
\end{aligned}
$$

Lösung 13.8

- Zunächst sehen wir $f(x_0) = e^{-\|x_0 - x_0\|^2} = e^0 = 1$
- Berechnung des Gradienten: $\operatorname{grad} f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0) \Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) = \mathbf{0}$
- Berechnung der zweiten Ableitungen: $D^2 f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2} \cdot \mathbb{1} + 4e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0)(x - x_0)^T$
$$\Rightarrow \quad D^2 f(x_0) = -2 \cdot \mathbb{1}$$
- Somit gilt
$$
\begin{aligned}
f(x_0 + \xi) &= 1 + \frac{1}{2}(x_0 + \xi - x_0)^T(-2\mathbb{1})(x_0 + \xi - x_0) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3)\\
&= 1 - (\xi)^T(\mathbb{1})(\xi) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3)\\
&= 1 - \|\xi\|^2 + \mathrm{O}(\|\xi\|^3)
\end{aligned}
$$

Lösung 13.9

- $f(0,0,0) = -1$

- $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

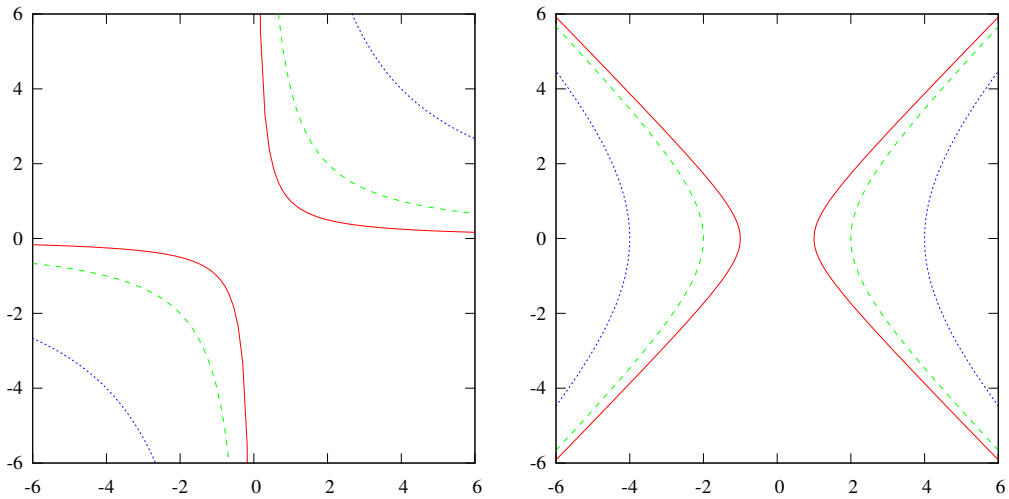
- $D^2 f(x,y,z) = \frac{1}{(1-x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2-1-z^2 & yz \\ -xz & yz & x^2-y^2-1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

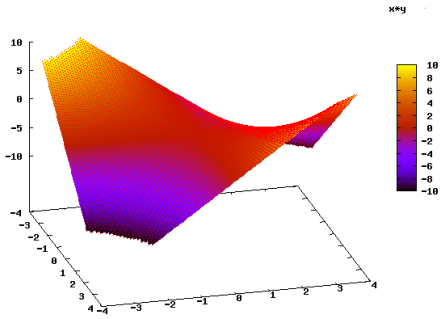
- $f(\xi,\eta,\zeta) = -1 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + \mathrm{O}((\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2})$

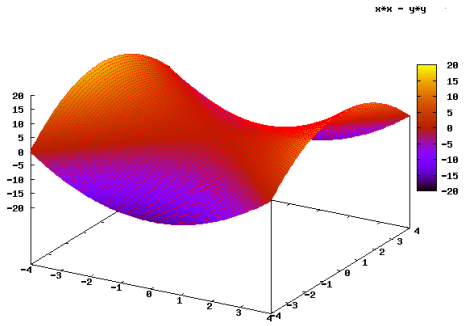
Lösung 13.10

a) $N_{\{z=c\}}$ sind Hyperbeln der Form $y = \frac{c}{x}$. $N_{\{w=c\}}$ sind Kurven der Form $v = \pm\sqrt{u^2 - c}$.



Die Graphen der beiden Funktionen sehen wie folgt aus:





b) Die Niveaulinien gehen auseinander hervor, indem man

$$\begin{aligned} x &= u - v \\ y &= u + v \\ \Rightarrow xy &= (u-v)(u+v) = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

ausdrückt. Das entspricht

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y+x) \\ v &= \frac{1}{2}(y-x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und somit entspricht A einer einer Rotation um 45 Grad gefolgt von einer Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y+x \\ y-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$
$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{aligned}
Dg(u,v)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2(u+v) & 2(u-v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix}, \\
(g\circ A)(x,y) &= g\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ \frac{1}{4}(y+x)^2 - \frac{1}{4}(y-x)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ xy \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ D(g\circ A)(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
Df(x,y)\cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix}, \\
D(f\circ A^{-1})(u,v) &= D\begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung 13.11 Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: grad $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x - 5y\,, \\ f_y(x,y) &= -5x - 4y\,. \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0\,.$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} &(6-\lambda)(-4-\lambda) - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49\,, \\ \Leftrightarrow &(\lambda - 1)^2 = 50 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50}\,. \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0,0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0,0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0,0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3\,, \\ f(t,0) &= 3t^2 + 3 > 3\,, \\ f(0,t) &= -2t^2 + 3 < 3\,, \end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Lösung 13.12

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Die Antwort lautet: Ja!

Denn ein globales Minimum von f ist ein kritischer Punkt von f und ein kritischer Punkt von f ist charakterisiert durch die Bedingung $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann ist die Hesse-Matrix $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit.

Die Antwort lautet: Nein!

Im allgemeinen gilt dies nicht. Dazu folgendes Gegenbeispiel: Für die Funktion $f(x,y) := x^2$ gilt

$$\begin{aligned} f_x = 2x, f_y = 0, \text{ also gilt } \nabla f(x,y) = (2x,0), \\ f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0, \text{ also gilt } D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ist hier also äquivalent mit $x = 0$. Wegen

$$f(0,y) = 0 \leq x^2 = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

hat f in allen Punkten $(0,y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ ein globales Minimum, die Hesse-Matrix $D^2 f(x,y)$ ist aber nur positiv semidefinit, da

$$\begin{aligned} D^2 f(x,y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Man erkennt auch, dass

$$D^2 f(x,y) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = 0$$

gilt.

Ein ähnliches Gegenbeispiel liefert die Funktion $g(x,y) = x^2 + y^4$, wie man durch nachrechnen sieht!

c) Gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ und hat $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum.

Die Antwort lautet: Ja!

Denn wenn $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte hat, so ist $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit und die Aussage folgt aus einem Satz der Vorlesung.

Lösung 13.13

a)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+3\alpha y \\ -3y^2+3\alpha x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4+\alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} y(y^3+\alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y=0 \text{ und } x=0) \text{ oder } (y=-\alpha \text{ und } x=\alpha) \\
&P_0 = (0,0), P_1 = (\alpha,-\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $P_0 = (0,0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda+3\alpha)(\lambda-3\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\qquad \lambda_1\lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunk handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha,-\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
(6\alpha-\lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$. D.h. $(\alpha,-\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha,-\alpha) = \alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 3x^2-3 \\ 3y^2-12 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{l} x^2=1 \\ y^2=4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{array} \right\} \\
\Rightarrow &P_0=(-1,-2),\ P_1=(-1,2),\ P_2(1,-2),\ P_3(1,2) \\
&D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i) Für $P_0=(-1,-2)$ gilt: $D^2 f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

$f(-1,-2) = -1-8+3+24+20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1=(-1,2)$ gilt: $D^2 f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

$f(-1,2) = -1+8+3-24+20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.

Für $P_2=(1,-2)$ gilt: $D^2 f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,

$f(1,-2) = 1-8-3+24+20 = 34$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

iii) Für $P_3=(1,2)$ gilt: $D^2 f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

$f(1,2) = 1+8-3-24+20 = 2$

$\Rightarrow$ (lokales)Minimum.

Lösung 13.14 Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x,y) mit $\nabla f(x,y)=0$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad x=\dfrac{3\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y=\dfrac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y=\dfrac{3\pi}{2} \\ x=0, \quad \text{oder} \quad x=\pi, \quad \text{oder} \quad y=0, \quad \text{oder} \quad y=\pi \end{cases}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, \\
A_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ist negativ definit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ist negativ definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit, d.h. } A_5 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(0,\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit, d.h. } A_6 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit, d.h. } A_7 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit, d.h. } A_8 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Lösung 13.15

a)

$$x_0 = \begin{pmatrix} r_0\cos\varphi_0 \\ r_0\sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} d(\varphi,z) &= \|x_0 - x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r_0\cos\varphi_0 - \cos\varphi \\ r_0\sin\varphi_0 - \sin\varphi \\ z_0 - z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (r_0\cos\varphi_0 - \cos\varphi)^2 + (r_0\sin\varphi_0 - \sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi d(\varphi,z) &= 2\,(r_0\cos\varphi_0-\cos\varphi)\sin\varphi+2\,(r_0\sin\varphi_0-\sin\varphi)\,(-\cos\varphi)\\
&= 2r_0\cos\varphi_0\sin\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi-2r_0\sin\varphi_0\cos\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi\\
&= 2r_0\,(\cos\varphi_0\sin\varphi-\sin\varphi_0\cos\varphi)\\
&= 2r_0\,(\cos(-\varphi_0)\sin\varphi+\sin(-\varphi_0)\cos\varphi)\\
&= 2r_0\sin(\varphi-\varphi_0)\\
\partial_z d(\varphi,z) &= -2\,(z_0-z)
\end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\nabla d(\varphi,z)=0.$$

Für $r_0\neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 2r_0\sin(\varphi-\varphi_0)\\ 2\,(z-z_0)\end{pmatrix}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \varphi=\varphi_0 \text{ oder } \varphi_0+\pi \text{ und } z=z_0$$

$\Rightarrow$ (φ_0,z_0) und $(\varphi_0+\pi,z_0)$ sind kritische Punkte der Funktion $d(\varphi,z)$.

Im Fall $r_0=0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2r_0\sin(\varphi-\varphi_0)\\ 2\,(z-z_0)\end{pmatrix}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{pmatrix} 0\\ 2\,(z-z_0)\end{pmatrix}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad z=z_0$$

Kritische Punkte sind in diesem Fall also alle Punkte (φ,z_0) mit $\varphi\in[0,2\pi]$.

d)

$$D^2d(\varphi,z)=\begin{pmatrix} 2r_0\cos(\varphi-\varphi_0) & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

e) $\underline{r_0\neq 0}$

$$\begin{aligned}
D^2d(\varphi_0,z_0) &= \begin{pmatrix} 2r_0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} && \text{ist positiv definit } \Rightarrow \text{ Minimum}\\
D^2d(\varphi_0+\pi,z_0) &= \begin{pmatrix} -2r_0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} && \text{ist indefinit } \Rightarrow \text{ Sattelpunkt}
\end{aligned}$$

Im Fall $r_0\neq 0$ gilt

$$x_Z=\begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\\ z_0\end{pmatrix}.$$

Im Fall $r_0 = 0$ ist die Matrix $D^2 d$ positiv semidefinit, so dass wir keine allgemeine Aussage machen können. Allerdings gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + (z_0 - z)^2 \\ &= 1 + (z_0 - z)^2, \end{aligned}$$

d.h. der Abstand hängt nicht mehr von φ sondern nur noch von z ab. Da für $d(z) = d(\varphi, z)$ die zweite Ableitung $d''(z) = 2$ größer Null ist, handelt es sich bei allen kritischen Punkten um Minima. Es gibt in diesem Fall also nicht nur einen Punkt x_z, der auf dem Zylinder Z liegt und minimalen Abstand zum Punkt x_0 hat sondern eine Menge M_Z von Punkten, die alle auf Z liegen und minimalen Abstand zum Punkt x_0 haben.

$$M_Z = \{(\varphi, z_0) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Lösung 13.16

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + x_1 + x_2 + 2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 2+t \\ 3+t \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2+t)^2 + (3+t)^2 + 2 + t + 3 + t + 2 \\ &= \frac{1}{2}\left(4 + 4t + t^2\right) + 9 + 6t + t^2 + 7 + 2t \\ &= 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + 16 + 8t + t^2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 + 10t + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t + 10 \\ g''(t) &= 3 \end{aligned}$$

b) $g(t) = f \circ h$ mit $h(t) = x_0 + t\xi$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df\left(h(t)\right) Dh(t) \\ &= \nabla f\left(h(t)\right) h'(t) \\ &= \left(A\left(x_0 + t\xi\right) + b\right)^T \xi \\ &= A\left(x_0 + t\xi\right) \cdot \xi + b \cdot \xi \end{aligned}$$

c) Die Regel zum Ableiten von Skalarprodukten sieht wie folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(v(t) \cdot w(t)\right) = \dot{v}(t) \cdot w(t) + v(t) \cdot \dot{w}(t).$$

Zudem läßt sich komponentenweise nachrechen, dass für konstante Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und Vektoren $v(t) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left(Av(t)\right) = A\dot{v}(t).$$

Mit diesem Wissen läßt sich nun auch die zweite Ableitung der Funktion g berechnen:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} g'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(A\left(x_0 + t\xi\right) \cdot \xi + b \cdot \xi\right) \\ &= A\xi \cdot \xi \end{aligned}$$

Lösung 13.17

a) Die Formel für die Taylor-Entwicklung bis Ordnung n an einem Punkt x_0 ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + O(|x - x_0|^{n+1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + O(|x - x_0|^{n+1}) \end{aligned}$$

wobei $f^{(i)}(x_0)$ die $i$te Ableitung an der Stelle x_0 ist.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) &= -\sin(x_0) \\ f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) &= -\cos(x_0) \\ f^{(3)}(x_0) &= \sin(x_0) \\ f^{(4)}(x_0) &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

und dann für alle $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(x_0) &= (-1)^t \sin(x_0) \\ f^{(2t)}(x_0) &= (-1)^t \cos(x_0) \end{aligned}$$

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(\frac{\pi}{2}) &= (-1)^t \\ f^{(2t)}(\frac{\pi}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

und die Taylor-Entwicklung bis Ordnung $(2n-1)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ist:

$$f(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(2t-1)!}(-1)^t (x - \frac{\pi}{2})^{(2t-1)} + O\left(\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{2n}\right)$$

b) Die Taylor-Entwicklungsformel für g an der Stelle x_0 ist:

$$g(x_0+\xi, y_0+\zeta) = g(x_0,y_0) + \sum_n \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha g}{\partial(x,y)^\alpha}(x_0,y_0)(\xi,\zeta)^\alpha + O\left(\left\|\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right\|^{n+1}\right)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2) \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \\ \frac{\partial^\alpha g}{\partial(x,y)^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}} \\ (\xi,\zeta)^\alpha &= \xi^{\alpha_1} \zeta^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g(\xi,\zeta) = g(0,0) &+ \frac{\partial}{\partial x} g(0,0)\xi + \frac{\partial}{\partial y} g(0,0)\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(0,0)\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0,0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(0,0)\zeta^2 + O\left(\left\|\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right\|^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) &= -1 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(0,0) &= -1
\end{aligned}$$

und somit

$$g(\xi,\zeta) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\|\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right\|^3\right)$$

Lösung 13.18

$$f(x) = \|x-a\| = \left((x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

setze $x = x_0 + h, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + O(\|h\|^3)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\right)^T \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x-a\|} \cdot 2(x_1-a_1), \ldots, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x-a\|} \cdot 2(x_n-a_n)\right)^T \\
&= \left(\frac{x_1-a_1}{\|x-a\|}, \ldots, \frac{x_n-a_n}{\|x-a\|}\right)^T = \frac{1}{\|x-a\|}(x-a)
\end{aligned}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(x_i-a_i)}{f(x)} \\
&= \frac{1}{f(x)} - \frac{(x_i-a_i)(x_i-a_i)}{f^3(x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|x-a\|} - \frac{1}{\|x-a\|^3}(x_i-a_i)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^3}(x_i-a_i)^2$$

$$i \neq j: \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{(x_i-a_i)}{f(x)}$$

$$= -\frac{1}{f^3(x)}(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$

$$= -\frac{(x_i-a_i)(x_j-a_j)}{\|x-a\|^3}$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right)$$

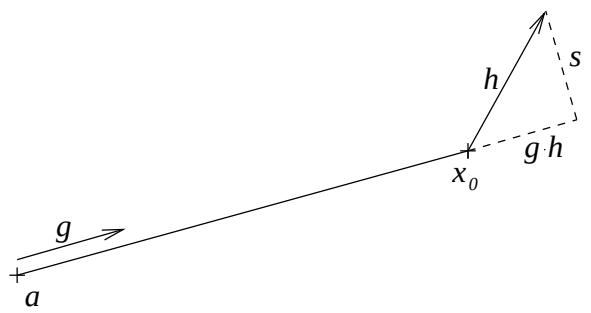
Insgesamt ergibt sich

$$f(x_0+h) = \|x_0-a\| + \frac{(x_0-a)}{\|x_0-a\|}\cdot h + \frac{1}{2\|x_0-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right) h\cdot h + O(\|h\|^3)$$

Zusätzliche Erläuterung: (Nicht Teil der Lösung!)
Mit der Bezeichnung $g = \operatorname{grad} f(x_0)$ erhalten wir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + g\cdot h + \frac{1}{2\|x_0-a\|}\left(\|h\|^2 - (g\cdot h)^2\right) + (\|h\|^3).$$

Dabei ist offenbar $\|g\| = 1$, also ist g der Einheitsvektor, der von a in Richtung x_0 zeigt. Der lineare Term (also die Approximation der Änderung in erster Ordnung) ist daher die Projektion von h auf die Gerade durch x_0 und a. Hier spielt also nur der Anteil von h eine Rolle, der auf a zu oder von a weg zeigt, nicht der Anteil „seitwärts“.
In ähnlicher Weise erklärt sich der quadratische Term: Mit $s^2 = \|h\|^2 - (g\cdot h)^2$ ist s der „Seitwärts-Anteil“ von h (Pythagoras!). Der Term zweiter Ordnung berücksichtigt also die Änderung „seitwärts“.
Die Skalierung überlegt man sich beispielweise folgendermaßen: Mit $a = (0,0)^T$, $x_0 = (1,0)^T$ und $h = (t,s)^T$ erhält man $f(x_0+h) = 1 + t + \frac{1}{2}s^2 + O(\|h\|^3)$. Zu $x_0 = (L,0)^T$ erhält man die skalierte Gleichung $\frac{f(x_0+h)}{L} = 1 + \frac{t}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{L}\right)^2 + O(\|h\|^3)$. Multiplikation mit $L = \|x_0-a\|$ ergibt schließlich die obige Form.



Lösung 13.19

$$\begin{aligned} f(x) &= \|Ax\|^2 - 2Ax\cdot b = Ax\cdot Ax - 2Ax\cdot b \\ &= A^TAx\cdot x - 2Ax\cdot b \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimierers ist

$$\operatorname{grad} f(x) = 2\left(A^TAx - A^Tb\right) \overset{!}{=} 0 \quad \in \mathbb{R}^n \,! \Leftrightarrow \quad A^TAx = A^Tb \text{ (Normalgleichungen-System) } (*)$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $(*)$. Wir wissen $D^2f(x) = 2A^TA$ ist positiv semidefinit und da zusätzlich $\det A = \det A^T \neq 0$ gilt ist $D^2f(x) = 2A^TA$ positiv definit, so dass x_0 ein (lokales) Minimum von f ist.
Außerdem wissen wir: $\det A \neq 0$ bedeutet, dass A invertierbar ist. D.h. wir können aus $\det A^T = \det A \neq 0$ die Invertierbarkeit von A^T schließen.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A^TAx = A^Tb \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b, \end{aligned}$$

d.h. x_0 ist eindeutig bestimmt.
Beachte:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= A(x+h)\cdot A(x+h) - 2A(x+h)\cdot b \\ &= Ax\cdot Ax + Ah\cdot Ax + Ax\cdot Ah + Ah\cdot Ah - 2Ax\cdot b - 2Ah\cdot b \\ &= f(x) + \underbrace{2\left(A^TAx - A^Tb\right)}_{=\operatorname{grad} f(x)}\cdot h + \underbrace{\|Ah\|^2}_{=O\left(\|h\|^2\right)} \end{aligned}$$

Lösung 13.20

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{f(h,y)}{h} = y\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}$$

Für $y \neq 0$ gilt:

$$y\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} \to y\frac{-y^2}{y^2} = -y \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $y = 0$ gilt:

$$\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = -y$$

$$\frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{f(x,h)}{h} = x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2}$$

Für $x \neq 0$ gilt:

$$x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} \to x\frac{x^2}{x^2} = x \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = \frac{-h^2}{h^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,0) = x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(-y)\bigg|_{y=0} = -1$$

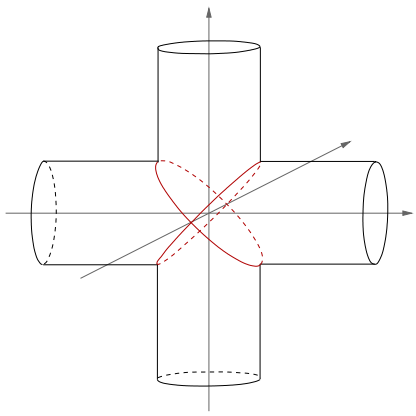
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0} = 1$$

Lösung 13.21 Die Formel der Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 bis zur Ordnung 2 lautet:

$$f(x) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\left(D^2 f(x_0)(x-x_0)\right) \cdot (x - x_0) + O(|x-x_0|^3)$$

wobei $D^2 f$ die Hesse-Matrix ist.

Lösung 13.22



(i) Subtraktion der beiden Gleichungen liefert $y^2 = z^2$. Also gilt für alle Punkte der Schnittmenge $y = \pm z$. Somit liegt die Schnittmenge der beiden Zylinder in der Vereinigung der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} y - z &= 0, \\ y + z &= 0, \end{aligned}$$

und die Schnittmenge der beiden Zylinder liegt natürlich auch im Zylinder $x^2+y^2=1$. Umgekehrt folgt durch Rechnung, dass jeder Punkt, der auf diesem Zylinder und in einer der beiden Ebenen liegt, auch auf dem anderen Zylinder liegt.

(ii) Wir können den Zylinder $x^2+y^2=1$ in Parameterform

$$\begin{aligned} x &= \cos s, \\ y &= \sin s, \\ z &= t \end{aligned}$$

schreiben. Die Bedingung $y=\pm z$ liefert als Parameterdarstellung der beiden Schnittkurven

$$\begin{aligned} x &= \cos s, \\ y &= \sin s, \\ z &= \pm \sin s \end{aligned}$$

(iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.
Die Schnittmenge der beiden Zylinder ist gegeben duch

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = 0\right\},$$

wobei

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ x^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

ist der Tangentialraum an M im Punkt (x,y,z) gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ -xy \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wie wir aus Aufgabenteil (i) wissen, muss gelten $y=\pm z$, damit $(x,y,z) \in M$ liegt. D.h.

$$\begin{aligned} T_{(x,z,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} z^2 \\ -xz \\ -xz \end{pmatrix} \right\} \\ T_{(x,-z,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -z^2 \\ -xz \\ xz \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Wir müssen jedoch aufpassen an den Punkten $(1,0,0)$ und $(-1,0,0)$. Nach dem, was wir gerade eben berechnet haben wäre $(0,0,0)$ in beiden Fällen der Tangentialvektor, was nicht sein kann. Der Grund dafür, dass wir an diesen beiden Stellen ein falsches Ergebnis berechnen, liegt darin, dass

$$DF((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF((-1,0,0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen ist der $\operatorname{Rang}(DF) = 1$, so dass die Voraussetungen für den Satz über implizite Funktionen nicht erfüllt sind.

Lösung 13.23

a) $h(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt eine Kugel $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 2$ ($R^2 = 4\,!$) und Mittelpunkt $M = (2,0,0)^T$.

$g(x,y,z) = x - 1 = 0$ beschreibt die Ebene $x = 1$, die parallel zur y-z-Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene $x = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = h(1,y,z) &= (1-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ y^2 + z^2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius $\tilde{R} = \sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\tilde{M} = (1,0,0)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \ \Rightarrow\ z = z(y) = \pm\sqrt{3-y^2} \quad \text{für } |y| \le \sqrt{3}$$
$$(\text{sowie } x(y) = 1)$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \ \Rightarrow\ y = y(z) = \pm\sqrt{3-z^2} \quad \text{für } |z| \le \sqrt{3}\,.$$
$$(\text{sowie } x(z) = 1)$$

Beachte: Wegen der $\pm$ erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3},$$

$$\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3},$$

$$\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_3(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3},$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}.$$

Lösung 13.24

a) Nach Voraussetzung gilt:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ und } \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

daher kann lokal (d. h. in einer geeigneten Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0)) $z = g(x, y)$ geschrieben werden und die durch „$f(x, y, z) = 0$“ definierte Fläche wird lokal als Graph der Funktion $z = g(x, y)$ gegeben. Wir suchen also die Tangentialebene an den Graphen

$$G_g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$T_{(x,y,g(x,y))} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x, y) \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x g(x_0, y_0) \\ -\partial_y g(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht also senkrecht auf der Tangentialebene an den Graphen G_g im Punkt (x_0, y_0, z_0). Daraus folgt

$$T_{(x_0,y_0,z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\partial_x g(x_0, y_0)\, x - \partial_y g(x_0, y_0)\, y + z = d \right\},$$

wobei d noch zu bestimmen ist. Da der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf der Tangentialeben liegt, gilt

$$d = -\partial_x g(x_0, y_0)\, x_0 - \partial_y g(x_0, y_0)\, y_0 + z_0.$$

$$\Rightarrow T_{(x_0,y_0,z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z - z_0 = \partial_x g(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)\,(y - y_0) \right\}$$

Aus $0 = f(x, y, g(x, y))$ folgt nach der Kettenregel (und dem Satz über implizite Funktionen):

$$\partial_x g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{und} \quad \partial_y g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)}$$

Setzt man dies ein und multipliziert mit $\partial_z f(x_0, y_0, z_0)$ (was nach Vorausetzung $\neq 0$!), ergibt sich

$$T_{(x_0,y_0,z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

<u>Bemerkung:</u>
Im Graphenfall wird die Tangentialebene an den Graphen meinst wie oben angegeben definiert, doch es gibt auch Definitionen ohne Aufpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$. In diesem Fall gilt $d = 0$, so dass der Abschnitt zur Berechnung von d wegfällt und sich folgende Lösung ergibt:

$$T_{(x_0,y_0,z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

b) Wir setzen natürlich $a, b, c > 0$ voraus.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,, \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \quad \checkmark\,, \\ \nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right), \\ \nabla f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}x+\frac{1}{\sqrt{3}b}y+\frac{1}{\sqrt{3}c}z=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}\right\}
$$

ist damit die Tangentialebene im Punkt $\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$ an das Ellipsoid.

Bemerkung:
Analog zum vorherigen Aufgabenteil gibt es auch hier eine zweite Mögliche Lösung. Diese lautet

$$
\begin{aligned}
T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\\frac{1}{b}\\\frac{1}{c}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\right\}
\end{aligned}
$$

Lösung 13.25

a)

$$
\begin{aligned}
U(x)=c &\Leftrightarrow \|x-a\|=\frac{mG}{c}=:R\\
&\Leftrightarrow \|x-a\|^2=R^2
\end{aligned}
$$

Dies sind Kugeloberflächen vom Radius $R=\frac{mG}{c}>0$ und Mittelpunkt $M=a\in\mathbb{R}^3$.

Wegen

$$
\nabla U(x)=-mG\frac{x-a}{\|x-a\|^3}\text{ für } x\neq a
$$

gilt $\nabla U(x)\neq 0$ für alle $c>0$. Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass es sich bei $\mathscr{F}_c$ um eine zweidimensionale Flächen handelt.

Bemerkung: Der Satz über implizite Funktionen wäre/ist hier nicht absolut nötig, da man die Auflösungen explizit (s. oben) vornehmen kann und damit auch explizit Tangentialvektoren ausrechnen kann!

b) Zuerst zeigen wir, daß diese Menge nicht leer ist. Da $m_1 = m_2 = m$ gilt

$$V(x) = mG\left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}\right)$$

und

$$\begin{aligned} V(x) &\to 0 \text{ für } \|x\| \to \infty \\ V(x) &\to +\infty \text{ für } x \to a, b. \end{aligned}$$

Also gibt es für alle $c > 0$ Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die in der Niveaumenge

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, V(x) = c\}$$

liegen. Sei

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{m_1 G}{\|x-a\|} + \frac{m_2 G}{\|x-b\|} - c \\ &= mG\left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}\right) - c \end{aligned}$$

die Funktion, die die Niveaumenge $V(x) = c$ als Null-Niveaumenge beschreibt.

$$\nabla g(x) = -mG\left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} + \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3}\right)$$

Die Niveaumenge ist keine Fläche, falls

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} - \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{a-x}{\|x-a\|^3} = \frac{x-b}{\|x-b\|^3} \end{aligned}$$

Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &a - x = x - b \\ \Leftrightarrow &x = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Solche Punkte gehören zu der Niveauflächen $V(x) = c_0$ wobei

$$c_0 = \frac{mG}{\|\frac{b-a}{2}\|} + \frac{mG}{\|\frac{a-b}{2}\|} = \frac{4mG}{\|a-b\|}$$

Somit sind alle Niveaumengen

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, V(x) = c\}$$

mit $c \neq c_0$ Flächen. F_{c_0} ist hingegen keine Fläche.

Bemerkung:
Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Aufgabenteiles, weil ∇g nur an einer Stelle Null ist, und weil die Niveaumengen sich nicht schneiden, kann man sagen, dass:

- Für $c < c_0$ ist die Niveaumenge $V(x) = c$ ist eine Hyperfäche in $\mathbb{R}^3$, das heißt eine geschlossene 2D Fläche;
- Für $c = c_0$ hat die Niveaumenge $V(x) = c$ einen singulären Punkt (Siehe Abbildung 4)
- Für $c > c_0$ besteht die Niveaumenge $V(x) = c$ aus zwei Hyperfächen in $\mathbb{R}^3$, das heißt zwei geschlossene 2D Flächen.

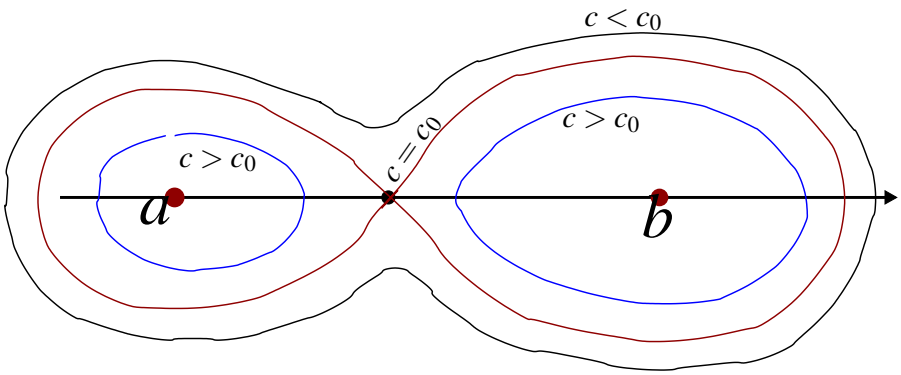


Abbildung 4: Skizze der Niveaufächen in 2D

Lösung 13.26 Minimieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

f ist das Quadrat des Abstandes!

Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned}
\partial_x F &=: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0\,,\\
\partial_y F &=: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y+1) - 2\lambda y = 0\,,\\
\partial_z F &=: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0\,,\\
\partial_\lambda F &= F_\lambda = -g = 0\,.\\
&\Rightarrow \begin{cases} 2z(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda)+2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y(1-\lambda) = -1 \\ 2x(1-\lambda)-2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1-\lambda) = 1 \end{cases}\\
&\Rightarrow 1-\lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \boxed{x=-y} \quad (\lambda \neq 1\,!)
\end{aligned}$$

und ($\boxed{z=0}$ oder $\boxed{\lambda=-1}$).
Fall 1: $x=-y$ und $z=0$:

$$\Rightarrow\; 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\
&= \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}\\
&= (\sqrt{2}-1)^2\,.\\
f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2\\
&= \frac{2(2+\sqrt{2})^2}{4} = (1+\sqrt{2})^2\,.
\end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda = -1 \;\Rightarrow\; 1-\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} 4y+2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}\,, \\ 4x-2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\,. \end{cases}\\
&\Rightarrow 0 = g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z^2 - 1\\
&\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \text{keine Lösung!}
\end{aligned}$$

Der minimale Wert ist also: $(\sqrt{2}-1)^2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Beachte: Die Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2$ ist stetig und für jedes feste $z_0 \in \mathbb{R}$ ist $M_{z_0} = \{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z_0^2\}$ ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt $M = (0,0,z_0)$ und Radius $R = \sqrt{1+z_0^2}$, also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt f in M_{z_0} sowohl Minimum als auch Maximum.
Bemerkung: Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor $(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ parallel zu $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ liegt.

Lösung 13.27

a) Auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nimmt die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$$

einen größten Wert an, da f stetig ist und die Kugeloberfläche beschränkt und abgeschlossen ist.

Nach dem Satz über Extrema unter Nebenbedingungen bilden wir:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2y^2z^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

und erhalten durch Ableiten:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_x F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_z F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2xy^2z^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2x^2yz^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2y^2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x(y^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2y(x^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2z(x^2y^2 - \lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Lösungen mit $x = y = z = 0$ können wir ausschließen, da $f(0,0,0) = 0$ offenbar der kleinste Wert von f überhaupt ist und $(0,0,0)$ nicht auf der Kugeloberfläche liegt. Die anderen (möglichen) Lösungen ergeben:

$$\begin{aligned}
&\lambda = y^2z^2 = x^2z^2 = x^2y^2 \\
\Rightarrow &x^2 = y^2 = z^2 \text{ und } \lambda = x^4 = y^4 = z^4\,. \\
\Rightarrow &x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}, \quad \text{wegen der Nebenbedingung } x^2+y^2+z^2 = 1\,. \\
\Rightarrow &\lambda = x^4 = \frac{1}{9} \text{ und} \\
&x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,. \\
\Rightarrow &f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27} > 0\,.
\end{aligned}$$

Dies liefert den maximalen Wert von f unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2=1$, da f seinen größten Wert auf der Kugel annimmt und in allen in Frage kommenden Punkten denselben Wert – nämlich $\frac{1}{27}$ – hat.

b) Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, dass für Punkte auf der Kugeloberfläche der Einheitskugel gilt

$$f(x,y,z) \leq \frac{1}{27} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2y^2z^2 \leq \frac{1}{27}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2+z^2=1$.
Setze nun

$$x^2 = \frac{a}{a+b+c} \geq 0\,,\ y^2 = \frac{b}{a+b+c} \geq 0\,,\ z^2 = \frac{c}{a+b+c} \geq 0\,,$$

dann folgt daraus

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Die so gewählten x,y und z erfüllen also unsere Nebenbedingung. Somit können wir sie einsetzen in

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+c)^3}} \leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \qquad &\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a,b,c \geq 0$ und $a+b+c>0$.

Lösung 13.28 Wir müssen die Funktion

$$f(x,y,z) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0$$

minimieren. Dazu bilden wir die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 - \lambda(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{r} \partial_x F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2(x-x_0)-2\lambda x=0 \\ 2(y-y_0)-2\lambda y=0 \\ 2(z-z_0)=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right\}$$

Daraus folgt $z=z_0$,

$$x=\frac{x_0}{1-\lambda} \qquad \text{und} \qquad y=\frac{y_0}{1-\lambda}.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{x_0^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{y_0^2}{(1-\lambda)^2}=1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^2+y_0^2=(1-\lambda)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda=1\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2} \end{aligned}$$

und damit können wir nun x und y ausrechnen:

$$\begin{aligned} x&=\frac{x_0}{1-\lambda}=\frac{x_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ y&=\frac{y_0}{1-\lambda}=\frac{y_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},z_0\right) &= \frac{x_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2}+\frac{y_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\ &= \left(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},z_0\right) &= \frac{x_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2}+\frac{y_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\ &= \left(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_Z=\begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Lösung 13.29

$$f(x+\xi)=\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha+\sum_{|\alpha|=3}\frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha=\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha+O(\|\xi\|^3)$$

α ist ein Multiindex,
$\vartheta \in (0,1)$ ist abhängig von f, x und ξ.

Lösung 13.30

$$
\begin{aligned}
&g(1,1,0) = 2\\
&g_x(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^3 \Rightarrow g_x(1,1,0) = 4\\
&g_y(x,y,z) = 2xy \Rightarrow g_y(1,1,0) = 2\\
&g_z(x,y,z) = 3xz^2 \Rightarrow g_z(1,1,0) = 0\\
&g_{xx}(x,y,z) = 6x \Rightarrow g_{xx}(1,1,0) = 6\\
&g_{xy}(x,y,z) = 2y \Rightarrow g_{xy}(1,1,0) = 2\\
&g_{xz}(x,y,z) = 3z^2 \Rightarrow g_{xz}(1,1,0) = 0\\
&g_{yy}(x,y,z) = 2x \Rightarrow g_{yy}(1,1,0) = 2\\
&g_{yz}(x,y,z) = 0\\
&g_{zz}(x,y,z) = 6xz \Rightarrow g_{zz}(1,1,0) = 0\\
&g_{xxx}(x,y,z) = 6\\
&g_{xxy}(x,y,z) = g_{xxz}(x,y,z) = 0\\
&g_{xyy}(x,y,z) = 2\\
&g_{xyz}(x,y,z) = 0\\
&g_{xzz}(x,y,z) = 6z \Rightarrow g_{xzz}(1,1,0) = 0\\
&g_{yyy}(x,y,z) = g_{yyz}(x,y,z) = g_{yzz}(x,y,z) = 0\\
&g_{zzz}(x,y,z) = 6x \Rightarrow g_{zzz}(1,1,0) = 6\\
&g_{xzzz}(x,y,z) = 6\\
&\text{alle anderen vierte Ableitungen } = 0
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
&g(x,y,z) = 2 + 4(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right)\\
&+\frac{1}{6}\left(6(x-1)^3 + 3\cdot 2(x-1)(y-1)^2 + 6z^3\right) + \frac{1}{24}\cdot 4\cdot 6(x-1)z^3 + \mathrm{O}(\|(x-1,y-1,z)\|^5)
\end{aligned}
$$

Ausmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
&2 + 4(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right)\\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(6(x-1)^3 + 6(x-1)(y-1)^2 + 6z^3\right) + \frac{1}{24}\cdot 24(x-1)z^3\\
&\qquad = 2 + (4x+2y-6) + \left(3x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 4y + 6\right)\\
&\qquad + \left(x^3 + xy^2 + z^3 - 3x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2y - 2\right) + (xz^3 - z^3)\\
&\qquad = x^3 + xy^2 + xz^3 \checkmark
\end{aligned}
$$

Lösung 13.31 $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $h(\rho) = \sqrt{r^2-(\rho-R)^2}$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g_x(x,y) &= h'(d(x,y))\,d_x(x,y)\\
g_y(x,y) &= h'(d(x,y))\,d_y(x,y)\\
g_{xx}(x,y) &= h''(d(x,y))\,d_x(x,y)^2 + h'(d(x,y))\,d_{xx}(x,y)\\
g_{xy}(x,y) &= h''(d(x,y))\,d_x(x,y)\,d_y(x,y) + h'(d(x,y))\,d_{xy}(x,y)\\
g_{yy}(x,y) &= h''(d(x,y))\,d_y(x,y)^2 + h'(d(x,y))\,d_{yy}(x,y)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
d_x(x,y) &= \frac{x}{d(x,y)}\\
d_y(x,y) &= \frac{y}{d(x,y)}\\
d_{xx}(x,y) &= \frac{y^2}{d(x,y)^3}\\
d_{xy}(x,y) &= -\frac{xy}{d(x,y)^3}\\
d_{yy}(x,y) &= \frac{x^2}{d(x,y)^3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h'(\rho) &= \frac{R-\rho}{h(\rho)}\\
h''(\rho) &= -\frac{r^2}{h(\rho)^3}
\end{aligned}$$

An der Stelle $(R,0)$:

$$\begin{aligned}
d(R,0) &= R\\
d_x(R,0) &= 1\\
d_y(R,0) &= 0\\
d_{xx}(R,0) &= d_{xy}(R,0) = 0\\
d_{yy}(R,0) &= \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h(d(R,0)) &= h(R) = r\\
h'(R) &= 0\\
h''(R) &= -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
g(R,0) &= h(d(R,0)) = r \\
g_x(R,0) &= h'(R)\, d_x(R,0) = 0 \\
g_y(R,0) &= h'(R)\, d_y(R,0) = 0 \\
g_{xx}(R,0) &= -\frac{1}{r}\cdot 1^2 + 0\cdot 0 = -\frac{1}{r} \\
g_{xy}(x,y) &= -\frac{1}{r}\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0 \\
g_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{r}\cdot 0^2 + 0\cdot \frac{1}{R} = 0
\end{aligned}$$

Die Taylor-Entwicklung ist dann

$$g(x,y) = r - \frac{1}{2r}(x-R)^2 + \mathrm{O}(\|(x-R,y)\|^3)$$

14 Ein kurzer Ausflug in die Differentialgeometrie

Lösung 14.1 Eine Parametrisierung dieser Ellipse ist:

$$\begin{cases} x &= a\cos(\theta) \\ y &= -b\sin(\theta) \end{cases}$$

Dies ergibt den Tangentialvektor

$$t = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin(\theta) \\ -b\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

am Punkt $M = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$.
Die Ableitung von t nach θ ist

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

und nach der Vorlesung ist die Krümmung an M definiert als

$$\begin{aligned}
\kappa(M) = \kappa(\theta) = \|t\|^{-3}\frac{\partial t}{\partial \theta}\cdot\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} &= \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)}^3} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}}^3},
\end{aligned}$$

weil

$$\sin(\theta) = -\frac{y}{b} \quad \text{und} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{a}.$$

Die Scheitelpunkte dieser Ellipse sind

$$A_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Krümmungen sind $\kappa(A_1) = \kappa(A_2) = \frac{a}{b^2}$ und $\kappa(B_1) = \kappa(B_2) = \frac{b}{a^2}$.

Lösung 14.2

a) Eine Parametrisierung des Äquators der Einheitskugel ist gegeben durch

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Bogenlängenparametrisierung, denn

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1.$$

Zudem gilt

$$n(x(t)) = n(t) = x(t)$$

und

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = -x(t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\ddot{x}(t) \cdot n(t))\, n(t) &= \left(-\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) n(t) \\ &= -n(t) \\ &= \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

und somit ist der Äquator der Einheitskugel eine geodätische Kurve.

b) Eine Bogenlängenparametrisierung einer Schraubenlinie ist gegeben durch

$$x : [0, \sqrt{r^2 + h^2}] \to \mathbb{R}^3, x(t) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ r\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} h \end{pmatrix},$$

denn

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}$$

und

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2}\left(\sin^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} + \cos^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) + \frac{h^2}{r^2+h^2}} = 1.$$

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{r^2+h^2} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ -\frac{r}{r^2+h^2} \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n(x(t)) = n(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\ddot{x}(t) \cdot n(t))\, n(t) &= \left(-\frac{r}{r^2+h^2} \cos^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} - \frac{r}{r^2+h^2} \sin^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) n(t) \\ &= -\frac{r}{r^2+h^2} n(t) \\ &= \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

und somit sind Schraubenlinien geodätische Kurven auf den entsprechenden Zylindern.

Lösung 14.3

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Die Einheitstangente an diese Kurve ist

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + t^2 r_1^2 r_2^2}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 2t r_1 r_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 r_1^2 r_2^2}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 2t r_1 r_2 \end{pmatrix} \\
T &= \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{am Ursprung, d. h. für } t = 0
\end{aligned}$$

weil $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Die zweite Ableitung der Parametrisierung liefert

$$\ddot{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_1 r_2 \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung ist die absolute Krümmung an einem Punkt $M = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ auf dieser Kurve

$$\begin{aligned}
k(M) &= (1 + t^2 r_1^2 r_2^2)^{-2} \left\| \ddot{\mathrm{M}} - (\ddot{\mathrm{M}} \cdot T) T \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_1 r_2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_1 r_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&= |2r_1 r_2|
\end{aligned}$$

Lösung 14.4

a) Sei G der Mittelpunkt dieses Kreises und $G(t) = G_0 + vt = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Parametrisierung der Bewegung von G, wobei t die Zeit ist.

P rotiert um G und daraus kann man $X - G$ als $X - G = \begin{pmatrix} -r\sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ parametrisieren, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die sich als $\omega = \frac{1}{r}$ ergibt.

Dies wird anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass bei gleicher Geschwindigkeit ein halb so großer Kreis doppelt so oft rotiert.

Damit schließen wir, dass die Parametrisierung von X sich schreiben lässt als

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin(\frac{1}{r}t) \\ -r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin(\frac{1}{r}t) \\ r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt P berührt immer dann die x-Achse, wenn die y-Komponente von $X(t)$ gleich Null ist, das heißt wenn

$$\begin{aligned} & r - r\cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{r}t = 2\pi j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = 2\pi r j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ berührt der Punkt P die x-Achse also zum ersten Mal und die zweite Berührung findet zur Zeit $t = 2\pi r$ statt.

c) Die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P von der ersten bis zur zweiten Berührung mit der x-Achse bewegt hat, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} s(2\pi r) &= \int_0^{2\pi r} \|\dot{X}(\xi)\| \, d\xi \\ &= \int_0^{2\pi r} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{r}\xi\right) \end{pmatrix} \right\| d\xi \\ &= \int_0^{2\pi r} \left(\left(1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{1}{r}\xi\right) \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &= \int_0^{2\pi r} \left(2 - 2\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)} \, d\xi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\right)} \, d\xi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)} \, d\xi. \end{aligned}$$

Da $\sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \geq 0$ für $\xi \in [0, 2\pi r]$ gilt

$$\begin{aligned} s(2\pi r) &= 2\int_0^{2\pi r} \sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) d\xi \\ &= -4r\cos\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\Big|_0^{2\pi r} \\ &= -4r(-1-1) \\ &= 8r. \end{aligned}$$

Lösung 14.5 Der Tangentialvektor an diese Kurve ist

$$T = \frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

und seine Bogenlänge ist

$$s(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2}dt = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$$

Im Spezialfall $h = 0$ ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir haben einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius $r \geq 0$. Wir finden hier den wohlbekannnten Kreisumfang $2\pi r$.

Grundsätzlich ist es so, dass die Schraubenlinie auf einer Zylinderfläche liegt, deren Grundfläche den Radius r hat. Stellt man sich die Zylinderfläche abgewickelt vor, so erhält man ein Rechteck mit den Seitenlängen $2\pi r$ und $2\pi h$. Beginnt man die Zylinderfläche an der richtigen Stelle abzuwickeln, so entspricht die Kurve $\gamma(t)$ auf dem Rechteck der Diagonalen und ihre Länge lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.

Lösung 14.6 Aus der Vorlesung wissen wir

$$\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|^2 = \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 - (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2$$

und diese Eigenschaft wollen wir nutzen, um die Gleichheit von $k(t)$ und $\kappa(t)$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} & & \kappa(t) &= k(t) \\ \Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-4}\left\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\dot{x}(t)\right\| &= \|\dot{x}(t)\|^{-3}\|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\| \\ \Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-1}\left\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\dot{x}(t)\right\| &= \|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\| \\ \Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-2}\left\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\dot{x}(t)\right\|^2 &= \|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\|^2 \\ \Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-2}\left(\|\dot{x}(t)\|^4\|\ddot{x}(t)\|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2(\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))^2\right) &= \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2 \\ \Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2 &= \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2 \end{aligned}$$

Lösung 14.7

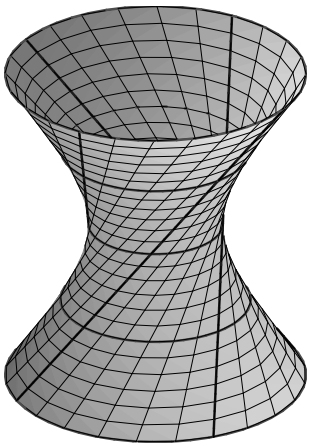
a) Mit

$$\begin{aligned} x &= \cos s - v\sin s \\ y &= \sin s + v\cos s \\ z &= v \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2+y^2-z^2 &= (\cos s - v\sin s)^2 + (\sin s + v\cos s)^2 - v^2 \\ &= \cos^2 s - 2v\cos s\sin s + v^2\sin^2 s \\ &\quad + \sin^2 s + 2v\cos s\sin s + v^2\cos^2 s - v^2 \\ &= 1 + v^2 - v^2 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: $x^2+y^2-z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z^2 = x^2+y^2-1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2+y^2-1}$.



b) $\gamma_1(s) = X(s,v_0) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{1+v_0^2}$:

$$\left\| \gamma_1(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + v_0^2$$

$\gamma_2(v) = X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $v = 0$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf obigem einschaligen Drehhyperboloid liegt.

c) Die Absolutkrümmung $\kappa_1(s)$ von $\gamma_1(s)$ ergibt sich als

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}.$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s - v_0 \cos s \\ \cos s - v_0 \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\| &= (\sin^2 s + 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \cos^2 s \\
&\quad + \cos^2 s - 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \sin^2 s)^{1/2} \\
&= \sqrt{1+v_0^2}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3 &= \sqrt{1+v_0^2}^3, \\
\ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\cos s + v_0 \sin s \\ -\sin s - v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sin s - v_0 \cos s)(-\sin s - v_0 \cos s) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\cos s + v_0 \sin s)(\cos s - v_0 \sin s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+v_0^2 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s)\| &= 1+v_0^2, \\
\Rightarrow \kappa_1(s) &= \frac{\|\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s)\|}{\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3} = \frac{1+v_0^2}{(1+v_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies sollte auch so sein, da ein Kreis die Krümmung $\kappa = \frac{1}{\text{Radius}}$ hat!

Die Absolutkrümmung $\kappa_2(s)$ von $\gamma_2(s)$ lautet dementsprechend

$$\kappa_2(v) \equiv 0\,.$$

Anschaulich ist das klar, da $\gamma_2(s)$ eine Gerade beschreibt!

In Formeln:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konstanter Vektor!} \\
\Rightarrow\ \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \dot{\gamma}_2(v) \times \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \kappa_2(v) = 0\,!
\end{aligned}$$

Beachte: $\|\dot{\gamma}_2(v)\| = \sqrt{2} > 0\,!$

Lösung 14.8

a) Drehzylinder mit $x^2 + y^2 = 4$ und Höhe $h = 100$:

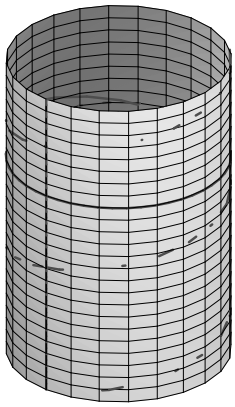
Mit

$$\begin{aligned}
x &= 2\cos u\,, \\
y &= 2\sin u
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4 \quad \checkmark$$

$v \in [0, 100] \ \Rightarrow\ h = 100\,.$



b) $\gamma_1(t) = X(0,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (für $t = 0$) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \partial_t X$, welche ganz auf dem Drehzylinder liegt. Es handelt sich um eine Mantellinie.

$\gamma_2(t) = X(t,10) = 2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 5 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und Radius $r = 2$, welcher ganz auf dem Drehzylinder liegt.
Es handelt sich um einen Breitenkreis des Drehzylinders in der Höhe $h = z = 10$.

$\gamma_3(t) = X(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie, die auf dem Drehzylinder liegt.

c) $\dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ddot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\gamma}_1 \times \ddot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ddot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}_2 \times \ddot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \ddot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}_3 \times \ddot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$
\begin{aligned}
N_1(t)\cdot\dot{\gamma}_1(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_1\perp\dot{\gamma}_1\,!\\
N_1(t)\cdot(\dot{\gamma}_1(t)\times\ddot{\gamma}_1(t)) &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_1\perp(\dot{\gamma}_1\times\ddot{\gamma}_1)\,!\\
N_2(t)\cdot\dot{\gamma}_2(t) &= \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}\cdot 2\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_2\perp\dot{\gamma}_2\,!\\
N_2(t)\cdot(\dot{\gamma}_2(t)\times\ddot{\gamma}_2(t)) &= \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_2\perp(\dot{\gamma}_2\times\ddot{\gamma}_2)\,!\\
N_3(t)\cdot\dot{\gamma}_3(t) &= \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\1\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_3\perp\dot{\gamma}_3\,!\\
N_3(t)\cdot(\dot{\gamma}_3(t)\times\ddot{\gamma}_3(t)) &= \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sin t\\-2\cos t\\4\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; N_3\perp(\dot{\gamma}_3\times\ddot{\gamma}_3)\,!
\end{aligned}
$$