Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik III **WS 2014/15**
Blatt 1 **24.10.2014**

Aufgabe 1: Betrachten Sie die folgenden Rotationen einer Sphäre S : Man drehe S um die y-Achse um den Winkel $\pi/2$, anschließend macht man dieselbe Operation um die z-Achse und rotiert zum Schluss nocheinmal um $\pi/2$ um die x-Achse.

a) Schreiben Sie die Matrix zu jeder Operation auf.

b) Geben Sie die Matrix von der gesamten Operation an.

c) Was hat man eigentlich getan?

LÖSUNG:Wir nehmen an, dass alle Drehungen in mathematisch positiver Drehrichtung ("Rechte-Faust-Regel" in rechthändigen Koordinatensystem) durchgeführt werden.

a) Sei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, f, g, und h die drei Transformationen (Abbildungen):

f sei die Rotation um die y-Achse, das heißt $f(e_2) = e_2$.

Der Rotationswinkel von f ist $\pi/2$, dadurch bekomen wir $f(e_3) = e_1$ und $f(e_1) = -e_3$.

Die Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

g sei die Rotation um die z-Achse und h die Rotation um die x-Achse. Durch die gleichen Überlegungen bekomen wir, dass die Matrizen zu diesen Abbildungen

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sind.

b) Nennen wir nun die gesamte Abbildung k, $k = h \circ g \circ f$ und somit ist ihre Matrix

$$
\begin{aligned}
M_k &= M_h \cdot M_g \cdot M_f && (5)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (6)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (7)
\end{aligned}
$$

c) Wir merken, dass wir einfach unser Objekt um mit dem Winkel $\pi/2$ um die z-Achse gedreht haben.