Aufgabe 2: Betrachte die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie sie in der Form

$$\dot{P} = AP + b \tag{1}$$

wobei A eine 3×3 Matrix ist, und

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Interpretieren Sie die Form (1) der Differentialgleichung und die Lösung.

c) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung.

LÖSUNG:

a) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Betrachten wir x, y und z als Funktionen von t, $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$. $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ sind einfach $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{dy}{dt}(t)$ und $\frac{dz}{dt}(t)$ (siehe Vorlesung).
Die Lösung beschreibt also die Flugbahn eines Punktes durch die Eigenschaften seiner Geschwindigkeit.

Die Nullen in der letzten Zeile der Matrix A und die Eins im Vektor b bedeuten eine konstante Geschwindigkeit in z-Richtung. Ferner bedeutet die Matrix eine Rotation um den Ursprung mit dem Winkel $\pi/2$ in der (x, y)-Ebene.

Das heißt, betrachtet man die Projektion der Geschwindigkeit auf die (x, y)-Ebene, so läuft die projizierte Flugbahn auf einem Kreis. Die zusätzlich konstante Geschwindigkeit in z-Richtung besagt, dass es sich insgesamt um eine Schraubenlinie handelt.

c) Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\begin{pmatrix} x &=& r\cos(t + C) \\ y &=& r\sin(t + C) \\ z &=& t \end{pmatrix}$$