**Aufgabe 4:** Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine orthogonale Matrix handelt.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante.

c) Handelt es sich um eine Drehung oder um eine Spiegelung?

LÖSUNG:

a) Da $A\,A^T = \mathbb{1}$ gilt, handelt es sich um eine orthogonale Matrix.

b) Die Eigenwerte der Matrix $A$ lauten

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

c) Es handelt sich weder um eine reine Drehung, noch um eine reine Spiegelung, sondern sowohl um eine Drehung, als auch um eine Spiegelung. Es handelt sich also um eine so genannte "Drehspiegelung", d.h. eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in der $xy$-Ebene und eine Spiegelung an der $xy$-Ebene.

**Aufgabe 5:**

a) Geben Sie die Matrix $A$ an, die eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$ in der $xy$-Ebene beschreibt.

b) Geben Sie die Matrix $B$ an, die eine Rotation um $\pi$ in der $yz$-Ebene beschreibt.

c) Berechnen Sie $AB$.

d) Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert der Matrix $AB$ ist. Geben Sie einen zugehörigen normierten Eigenvektor an.

e) Ergänzen Sie diesen zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

f) Berechnen Sie die darstellende Matrix zu der Abbildung $x \mapsto ABx$ bezüglich dieser Basis.

g) Um welche Art von Matrix handelt es sich?

Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d)

$$AB - 1\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB - 1\mathbb{1}) = -2 + 0 + 0 - (0 + 0 - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ 1 ist ein Eigenwert der Matrix $AB$.
Berechnung eines zugehörigen normierten Eigenvektors:

$$\begin{aligned}
(AB - 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist also der Vektor

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Die drei Vektoren $u$, $v$ und $w$ mit

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

f)

$$\begin{aligned}
AB\,u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u \\
AB\,v &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v \\
AB\,w &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -w
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die darstellende Matrix zu der Abbildung $x \mapsto ABx$ bezüglich der Basis aus Aufgabenteil e) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

g) Bei der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

handelt es sich um eine Rotation um $\pi$ in der Ebene senkrecht zu $u$, also um die durch $u$ aufgespannte Gerade als Drehachse.