Aufgabe 7: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch die Abbildung $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix}$$

auf $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert ist (mit Radii $r > 0$ und $R > 0$).

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{S}$ (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a,t)$ und $v(t) = x(t,a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v,w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.

c) Berechnen Sie die Normale $N(v,w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0,1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

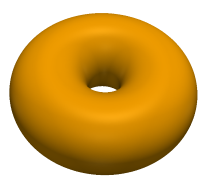
$$c : \xi \mapsto (\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

LÖSUNG:

a) Kurve $h(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis mit Radius r:



- $a = 0$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)$.
- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R, 0)$.
- $a = \pi$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(-R, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, -R, 0)$.

Kurve $v(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis in der x-y-Ebene:

- $a = 0$: Kreis hat Radius $R + r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, r)$.
- $a = \pi$: Kreis hat Radius $R - r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, -r)$.

b) Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \Big(\partial_v x \;\Big|\; \partial_w x\Big) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Normale ist gegeben durch

$$N(v,w) = \frac{\partial_v x \times \partial_w x}{\|\partial_v x \times \partial_w x\|}\,, \quad \partial_v x \times \partial_w x = \begin{pmatrix} r(R + r\cos w)\cos v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin w \end{pmatrix}$$

und $\|\partial_v x \times \partial_w x\| = r(R + r\cos w)$, daher

$$N(v,w) = \begin{pmatrix} \cos v\,\cos w \\ \sin v\,\cos w \\ \sin w \end{pmatrix}.$$

d) Die Länge einer Kurve γ ist definiert als $L[\gamma] = \int_0^1 \|\dot\gamma(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi$. Es gilt

$$\gamma = x \circ c : \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(2\pi\,\xi) \\ r\,\sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix},$$

oder alternativ mit Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\Big(x \circ c\Big)(\xi) = Dx(c(\xi)) \cdot \dot c(\xi) &= \begin{pmatrix} -(R + r\cos(2\pi\xi))\,\sin\frac{\pi}{2} & -r\cos\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ (R + r\cos(2\pi\xi))\,\cos\frac{\pi}{2} & -r\sin\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ 0 & r\,\cos(2\pi\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit

$$\|\dot\gamma(\xi)\|^2 = (2\pi r)^2\,(\sin^2(2\pi\,\xi) + \cos^2(2\pi\,\xi)) = (2\pi r)^2\,.$$

Es folgt $L[\gamma] = 2\pi r$.