Aufgabe 8: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}$$

LÖSUNG:

a) Um das Integral auf direktem Weg zu berechnen, geben wir als erstes eine Parametrisierung von ∂K als Kurve an:

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine geschlossene Kreiskurve um den Ursprung mit Radius 1. Der Normalenvektor an die Kurve ist der Vektor $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\right) dt \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

b) Alternativ kann man das Integral auch mit Hilfe des Satz von Gauß berechnen. Danach gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl &= \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} dx\, dy \\
&= \int_K 3x^2 + 3y^2\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3\,(r\cos\varphi)^2 + 3\,(r\sin\varphi)^2\right) r \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 \, d\varphi \, dr \\
&= 6\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$