Aufgabe 9: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1 x_2.$$

a) Berechnen Sie den kritischen Punkt x^* der Funktion $f(x)$.

b) Berechnen Sie die Hessesche $D^2 f(x^*)$ der Funktion f an der Stelle x^*.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i und zugehörige Eigenvektoren v_i der Matrix $D^2 f(x^*)$.

d) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Funktion

$$g_i(t) = f(x^* + t v_i).$$

Bemerkung: Gilt $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ so folgt daraus, dass g_1 in $t = 0$ ein Maximum und g_2 in $t = 0$ ein Minimum hat. Daraus folgt, dass die Funktion f an der Stelle x^* einen Sattelpunkt besitzt.

LÖSUNG:

a)

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ kritischer Punkt $x^* = (0, 0)$

b)

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D^2 f(x^*)$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda y_1 + y_2 &=& 0 \\ y_1 - \lambda y_2 &=& 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda^2 y_2 + y_2 &=& 0 \\ y_1 &=& \lambda y_2 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} (1-\lambda^2) y_2 &=& 0 \\ y_1 &=& \lambda y_2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

d)

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f(-t, t) \\
&= -t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f(t, t) \\
&= t^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \cos(x + y).$$

Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt $(0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 4.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + \xi, y_0 + \zeta) = {} & f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\xi + \partial_y f(x_0, y_0)\zeta \\
& + \partial_y \partial_x f(x_0, y_0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x_0, y_0)\xi^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(x_0, y_0)\zeta^2 \\
& + \frac{1}{2}\partial_y^2 \partial_x f(x_0, y_0)\xi\zeta^2 + \frac{1}{2}\partial_y \partial_x^2 f(x_0, y_0)\xi^2\zeta + \frac{1}{6}\partial_x^3 f(x_0, y_0)\xi^3 + \frac{1}{6}\partial_y^3 f(x_0, y_0)\zeta^3 \\
& + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_x f(x,y) = -\sin(x+y) = \partial_y f(x,y)\\
&\partial_x^2 f(x,y) = -\cos(x+y) = \partial_y^2 f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)\\
&\partial_x^3 f(x,y) = \sin(x+y) = \partial_y^3 f(x,y) = \partial_y \partial_x^2 f(x,y) = \partial_x \partial_y^2 f(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(\xi,\zeta) &= 1 - \xi\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix} + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right)
\end{aligned}
$$