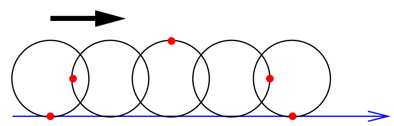
Aufgabe 12: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

LÖSUNG:

a) Sei G der Mittelpunkt dieses Kreises und $G(t) = G_0 + vt = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Parametrisierung der Bewegung von G, wobei t die Zeit ist.

P rotiert um G und daraus kann man $X - G$ als $X - G = \begin{pmatrix} -r\sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ parametrisieren, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die sich als $\omega = \frac{1}{r}$ ergibt. Dies wird anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass bei gleicher Geschwindigkeit ein halb so großer Kreis doppelt so oft rotiert.

Damit schließen wir, dass die Parametrisierung von X sich schreiben lässt als

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin(\frac{1}{r}t) \\ -r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin(\frac{1}{r}t) \\ r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt P berührt immer dann die x-Achse, wenn die y-Komponente von $X(t)$ gleich Null ist, das heißt wenn

$$\begin{aligned} & r - r\cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{r}t = 2\pi j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow\quad & t = 2\pi r j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ berührt der Punkt P die x-Achse also zum ersten Mal und die zweite Berührung findet zur Zeit $t = 2\pi r$ statt.

c) Die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P von der ersten bis zur zweiten Berührung mit der x-Achse bewegt hat, berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
s(2\pi r) &= \int_0^{2\pi r} \|\dot{X}(\xi)\| \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{r}\xi\right) \end{pmatrix} \right\| \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(\left(1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{1}{r}\xi\right) \right)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(2 - 2\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)} \, d\xi.
\end{aligned}
$$

Da $\sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \geq 0$ für $\xi \in [0, 2\pi r]$ gilt

$$
\begin{aligned}
s(2\pi r) &= 2 \int_0^{2\pi r} \sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \, d\xi \\
&= -4r \cos\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \Big|_0^{2\pi r} \\
&= -4r\,(-1 - 1) \\
&= 8r.
\end{aligned}
$$