Aufgabe 13: Berechnen Sie die Krümmung der Graphenkurve

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{für } f(t) = \sin(t) \text{ und } t \in [0, 2\pi]$$

in den Punkten $\gamma(\pm\frac{\pi}{2})$.

LÖSUNG: Zur Berechnung der Krümmung überprüfen wir zunächst, ob die Kurve γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist (siehe Skript: Definition 14.2). Falls ja, so vereinfacht sich die Berechnung zu (siehe Skript: Definition 14.7)

$$\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\|.$$

Andernfalls ist die Berechnung etwas komplizierter (siehe Skript: Satz 14.11)

$$\kappa(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^{-3}(\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t)).$$

Es gilt

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + \dot{f}^2(t)},$$

d.h. γ ist nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, da $\dot{f}(t) = \cos(t)$ nicht konstant Null ist. Des Weiteren gilt

$$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{f}(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \|\dot{\gamma}(t)\|^{-3}(\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t)) \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \dot{f}^2(t)}\right)^3} \cdot \left(0 \cdot \dot{f}(t) - 1 \cdot \ddot{f}(t)\right) = -\frac{\ddot{f}(t)}{(1 + \dot{f}^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sin(t)}{(1 + \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Daher ist die Krümmung der Kurve γ in den Punkten $t = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\kappa(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2})}{(1 + \cos^2(\pm\frac{\pi}{2}))^{\frac{3}{2}}} = \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1.$$

ACHTUNG: $\|\ddot{\gamma}(\pm\frac{\pi}{2})\| = 1$, dies entspricht aber nicht dem korrekten Lösungsweg, sondern ist eine zufällige Übereinstimmung.