Aufgabe 14: Sei

$$x : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h^2 \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung einer Fläche $P \subset \mathbb{R}^3$ und

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) &= (t, \pi), \\ \gamma_2 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) &= (1, t) \end{aligned}$$

Kurven im Definitionsbereich von x.

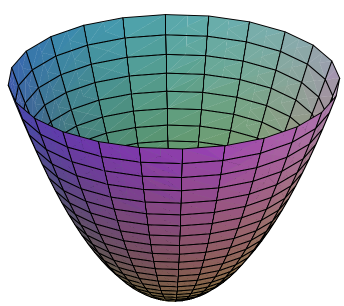
a) Skizzieren Sie die Fläche P.

b) Berechnen Sie die Oberfläche von P.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $x \circ \gamma_2$.

d) Überprüfen Sie, ob es sich bei $x \circ \gamma_1$ und $x \circ \gamma_2$ um eine geodätische Kurve auf P handelt.

Lösung:



a)

b)

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 2h & 0 \end{pmatrix}$$

Metrik:

$$g = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1 + 4h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$\det g = (1+4h^2)h^2 = h^2 + 4h^4$$

Dann gilt

$$\int_P 1 dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} h\sqrt{1+4h^2} d\varphi dh$$

$$\text{(Substitution: } z = 1+4h^2, \frac{dz}{dh} = 8h) = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} h\sqrt{1+4h^2} dh = 2\pi \int_0^3 h\sqrt{z}\frac{dz}{8h}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^3 \sqrt{z} dz = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

c) Aus der Vorlesung: Bogenlänge: $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}(\xi)\| d\xi$, also

$$\int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

d) Aus der Vorlesung ist bekannt: Eine Kurve $\tilde{\gamma} = x \circ \gamma$ auf einer Fläche x ist eine geodätische Kurve genau dann, wenn $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\gamma}(t) \cdot (\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) \times n[\tilde{\gamma}(t)]) = 0$, wobei $n[\tilde{\gamma}(t)]$ die Normale auf der Fläche x ist an der Stelle $\tilde{\gamma}(t)$.
Für $\tilde{\gamma}_1 = x \circ \gamma_1$ gilt

$$\tilde{\gamma}_1 = x \circ \gamma_1 = \begin{pmatrix} t\cos(\pi) \\ t\sin(\pi) \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \text{ und } \frac{d^2}{dt^2}\tilde{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Normale gilt

$$n[\tilde{\gamma}] = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4t^3 + t \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Kurve $\tilde{\gamma}_1 = x \circ \gamma_1$ ist eine geodätische Kurve.
Für $\tilde{\gamma}_2 = x \circ \gamma_2$ gilt

$$\tilde{\gamma}_2 = x \circ \gamma_2 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{d^2}{dt^2}\gamma_2 = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } n[\tilde{\gamma}_2] = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dies wieder ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Die Kurve $\tilde{\gamma}_2 = x \circ \gamma_2$ ist keine geodätische Kurve.