Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: a) Zeigen Sie, dass die Spiegelung

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T$$

mit $\|n\| = 1$ orthogonal ist.

b) Berechnen sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} SS^T &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T)^T \\ &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1}^T - 2(n^T)^T n^T) \\ &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + (2nn^T)(2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T nn^T \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4n(n^T n)n^T \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4\|n\|^2 nn^T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

so $S^T = S^{-1} \Rightarrow S$ is orthogonal.

b)
- $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ and so $\alpha_1 = -\operatorname{sgn}(a_{11})\|a_1\| = -\sqrt{3^2+4^2} = -5$
- $v_1 = a_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $Q^{(1)} = \mathbb{1} + \dfrac{v_1 v_1^T}{\alpha_1 v_{11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{40} \begin{pmatrix} 8^2 & 8\cdot 4 \\ 8\cdot 4 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$
  Alternativ (und effizienter):

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $A^{(1)} = Q^{(1)} A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Die QR-Zerlegung ist dann $A = QR$ mit $Q = (Q^{(1)})^T$ und $R = A^{(1)}$, d.h.

$$
A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 2: Sei

$$
x : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h^2 \end{pmatrix}
$$

die Parametrisierung einer Fläche $P \subset \mathbb{R}^3$ und

$$
\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (1, t)
$$

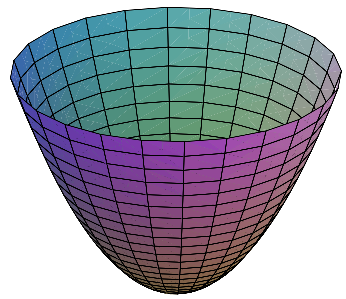
eine Kurve im Definitionsbereich von x.

a) Skizzieren Sie die Fläche P.

b) Berechnen Sie die Oberfläche von P.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $x \circ \gamma$.

Lösung:

a) 

b)

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 2h & 0 \end{pmatrix}$$

Metrik:

$$g = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1+4h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$\det g = (1+4h^2)h^2 = h^2 + 4h^4$$

Dann gilt

$$\int_P 1 dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} h\sqrt{1+4h^2} d\varphi dh$$

$$\text{(Substitution: } z = 1+4h^2, \frac{dz}{dh} = 8h) = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} h\sqrt{1+4h^2} dh = 2\pi \int_0^3 h\sqrt{z}\frac{dz}{8h}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^3 \sqrt{z} dz = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

c) Aus der Vorlesung: Bogenlänge: $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}(\xi)\| d\xi$, also

$$\int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die Fläche eines Kreises mit Radius 2 mit Hilfe eines geeigneten Integrals über den Rand des Kreises.

Lösung: Der Kreis K mit Radius 2 is gegeben als die Menge

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

d.h. der Rand ∂K ist

$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Parametrisierung: $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt von K ist nun

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}(K) &= \int_K dx = \int_{\partial K} N \cdot f(x_1, x_2) dl \overset{\text{div} f = 1}{=} \int_{\partial K} \frac{x}{\|x\|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} dl \\
&= \int_{\partial K} \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dl \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(2\cos(\varphi))^2}{\sqrt{(2\cos(\varphi))^2 + (2\sin(\varphi))^2}} 2d\varphi \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \frac{(\cos(\varphi))^2}{2} 2d\varphi \\
&= 4 \left[\frac{1}{2}(\varphi + \sin(\varphi) + \cos(\varphi)) \right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$