Ingenieurmathematik III — Lernstandserhebung 2 **22./23.01.2015**

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \exp(1 + x_1 x_2)\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f.

c) Bestimmen Sie den kritischen Punkt von f und geben Sie an, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

d) Geben Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung (d.h. mit Restterm dritter Ordnung) von f um den Punkt $(0, 0)$ an.

Lösung:

a)

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \exp(1 + x_1 x_2) \\ x_1 \exp(1 + x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

b)

$$\operatorname{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \exp(1 + x_1 x_2) & \exp(1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 \exp(1 + x_1 x_2) \\ \exp(1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 \exp(1 + x_1 x_2) & x_1^2 \exp(1 + x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

c) Notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt $\bar{x}$ von f:

$$0 = \text{grad} f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \, \exp(1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2) \\ \bar{x}_1 \, \exp(1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfe Definitheit von

$$\text{Hess}\, f(\bar{x}) = \text{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von Hess $f(0,0)$ lösen die Gleichung

$$-\lambda^2 + e^2 = 0 ,$$

d.h. $\lambda_{1,2} = \pm e$, Hess $f(0,0)$ ist damit indifinit.
Die Funktion f hat in $\bar{x} = (0,0)$ also einen Sattelpunkt.

d) Taylorentwicklung 2. Ordnung um den Punkt $x = (0,0)$:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + \text{grad} f(x) \cdot \xi + \frac{1}{2} D^2 f(x) \xi \cdot \xi + O(\|\xi\|^3) \\ f(\xi) &= \mathrm{e} + 0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}\xi_2 \\ \mathrm{e}\xi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) \\ &= \mathrm{e} + \frac{2\mathrm{e}\xi_1\xi_2}{2} + O(\|\xi\|^3) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Kurve

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 2y^2 = 4\}$$

und der Punkt

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes p zur Kurve M, d.h. den/die Punkte auf M, deren Abstand von p minimal ist und den Abstand dieses Punktes/dieser Punkte von p.
Minimieren Sie hierbei den quadrierten Abstand anstelle des Abstandes und begründen Sie, warum dies zum gewünschten Ergebnis führt.

LÖSUNG: Da die quadratische Funktion auf $\mathbb{R}^+$ monoton ist, liefert die Minimierung der quadratischen Abstandsfunktion dasselbe Ergebnis, wie die Minimierung der Abstandsfunktion.
Zu Minimieren:

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

wobei $x^2 + 2y^2 = 4$ gilt.
Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} h(x,y,\lambda) &= (x-1)^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 4), \\ h_x(x,y,\lambda) &= 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1-\lambda}, \\ h_y(x,y,\lambda) &= 2y - 4\lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ oder } \lambda = \frac{1}{2}, \\ h_\lambda(x,y,\lambda) &= -x^2 + 2y^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

- 1.Fall: $y = 0$, $x = \frac{1}{1-\lambda}$

  $$-\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + 2(0)^2 + 4 = -\frac{1}{(1-\lambda)^2} + 4 = 0$$
  $$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

  Dann gilt

  - $y = 0, \lambda = \frac{1}{2}, x = 2 \Rightarrow$ Abstand $= 1$
  - $y = 0, \lambda = \frac{3}{2}, x = 2 \Rightarrow$ Abstand $= 3$

- 2. Fall: $x = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$

  $$-(2)^2 + 2(y)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Fläche

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

und die Ebenenschar

$$E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \alpha\}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $K \cap E_\alpha$ eine differenzierbare Kurve (im Sinne der Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen)?

b) Beschreiben Sie $K \cap E_\alpha$ geometrisch.

c) Geben Sie, wo möglich, eine Parametrisierung von $K \cap E_\alpha$ als Kurve im $\mathbb{R}^3$ an.

LÖSUNG:

a)

$$K \cap E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} \text{ mit } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ z - \alpha \end{pmatrix}$$

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang $Df = 1$ genau dann, wenn $x = 0$ und $y = 0$ sonst Rang $Df = 1$.
$(x,y) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Also ist $K \cap E_\alpha$ differenzierbare Kurve, falls $\alpha \neq 0$.

b) $x^2 + y^2 = z^2 = \alpha^2$ und $z = \alpha$. Kreis um $(0,0,\alpha)$ in der Ebene $z = \alpha$ mit Radius α

c)

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{\alpha^2 - x^2} \\ \alpha \end{pmatrix}, \; x \in [-\alpha, \alpha].$$

Alternativ: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha\cos(t) \\ \alpha\sin(t) \\ \alpha \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.