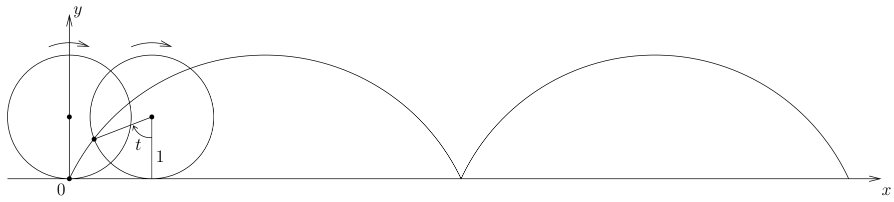
Übungen zur Ingenieur-Mathematik III **WS 2014/15**
Blatt 1 **10.10.2014**

Aufgabe 1: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die bei einer Umdrehung des Kreises entsteht.
Tipp: $\cos(t) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$

LÖSUNG:

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt und im Punkt $(0, -1)$ startet, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \gamma_M(t) + \gamma_P(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot\gamma(t)\| &= \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

e) Für eine Umdrehung des Kreises ist $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} l(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(s)\|\, ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(s)}\, ds \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2(\tfrac{s}{2}) + \sin^2(\tfrac{s}{2})}\, ds \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\sin^2(\tfrac{s}{2})}\, ds \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{s}{2})\, ds \quad (\sin(\tfrac{s}{2}) \geq 0 \text{ für } s \in [0, 2\pi]) \\ &= 2\left[-2\cos(\tfrac{s}{2})\right]_0^{2\pi} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10},\ t \in [0, T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

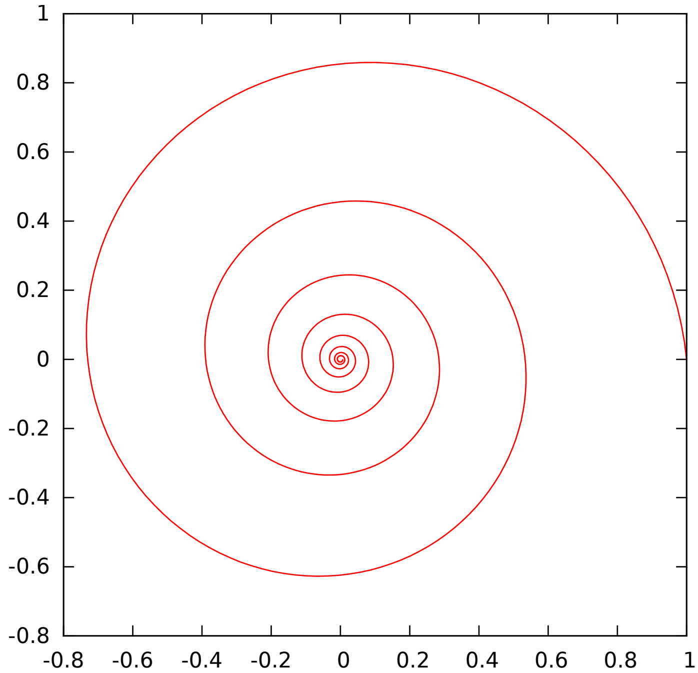
b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \to \infty$.

LÖSUNG:

a) Es handelt sich um die sogenannte *logarithmische Spirale*:



b) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t}\cos(t) + e^{\alpha t} - \sin(t) \\ \alpha e^{\alpha t}\sin(t) + e^{\alpha t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= e^{\alpha t}\sqrt{(\alpha\cos(t) - \sin(t))^2 + (\alpha\sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2\cos^2(t) + \alpha^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} l(T) &= \int_0^T \|\dot{\gamma}(s)\|\, ds = \sqrt{\alpha^2+1}| \int_0^T e^{\alpha s}\, ds \\ &= \sqrt{\alpha^2+1}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha s}\right]_0^T \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) \\ &= -\sqrt{101}\left(e^{-\frac{T}{10}} - 1\right) \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{T\to\infty} l(T) = \sqrt{101}$$

Aufgabe 3: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \to \mathbb{R}^2,\ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\bar{\gamma}\left(-\frac{d}{2}\right) = A, \quad \bar{\gamma}\left(\frac{d}{2}\right) = B, \quad \bar{\gamma} \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\bar{\gamma}}(t)\| = 1$$

$$\int_{\bar{\Gamma}} 1\, dl = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1 \cdot 1\, dt = \frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right) = d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B.

c)

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(-T) &= M + R\begin{pmatrix} -\sin T \\ \sqrt{1-\sin^2 T} \end{pmatrix} \\
&= M + R\begin{pmatrix} -\frac{d}{2R} \\ \frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - R\frac{d}{2R} \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R\frac{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A,
\end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde{\gamma}(T) = B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \sqrt{0 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1\, dl = \int_{-T}^{T} 1 \cdot R\, dt = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde{\Gamma}$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) - d.$$

Für $d = 100$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\| = \tilde{\gamma}_2(0) = -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arcsin''(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} \\
\arcsin'''(x) &= \frac{2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}^5} \\
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin'(0) &= 1 \\
\arcsin''(0) &= 0 \\
\arcsin'''(0) &= 1 \\
\arcsin(x) &= 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \\
L(d) &= 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) \\
&= 2R\left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6}\frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)\right) \\
&= d + \frac{1}{24}\frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \\
\Rightarrow L(d) - d &= \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angebenen Abschätzungen.