Aufgabe 4: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja ☐ nein ☐

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

e) Jede Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 5: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 7: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?