Aufgabe 7: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}\,, \\
A^3 &= AA^2 = A \cdot (-\mathbb{1}) = -A\,, \\
A^4 &= AA^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = \mathbb{1}\,, \\
A^5 &= AA^4 = A \cdot \mathbb{1} = A\,.
\end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\Rightarrow\ A^k = \begin{cases} A & \text{für} \quad k = 4l+1\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ -\mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+2\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ -A & \text{für} \quad k = 4l+3\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ \mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+4\,,\ l = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\right)\mathbb{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\right) A \\
&= \cos t \cdot \mathbb{1} + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned}
A &= C \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{At} &= C \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T .$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\Rightarrow \; B^{-1} = B^T = \left(e^{tA}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1} .$$

Aufgabe 8: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \angle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{\|x\| \; \|y\|}$, gleich dem Winkel $\psi := \angle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{2} = \|y\| , \\
\cos\phi &= \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} . \\
Ax &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} , \; \|Ax\| = 2 , \\
Ay &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} , \; \|Ay\| = 2 , \\
\cos\psi &= \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \cos\phi . \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \,.$$

$A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ impliziert:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \|Ax\| = \|\lambda Q x\| = |\lambda| \|Qx\| = |\lambda| \|x\| \,, \\
& \|Ay\| = \|\lambda Q y\| = |\lambda| \|y\| \,, \\
& Ax \cdot Ay = \lambda Q x \cdot \lambda Q y = \lambda^2 (Qx \cdot Qy) = \lambda^2 (x \cdot y) \,, \\
\Rightarrow & \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{\lambda^2 (x \cdot y)}{|\lambda|^2 \|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \,, \text{ da } \lambda^2 = |\lambda|^2 \,.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist A offensichtlich invertierbar. ($A^{-1} = \lambda^{-1} Q^T$)

c) Allgemein gilt: $A = \lambda Q$

$$\Rightarrow \det A \;=\; \det(\lambda Q) = \lambda^n \det Q$$

Wir wissen: $|\det Q| = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned}
|\det A| &= |\lambda|^n \\
\Leftrightarrow \quad |\det A|^{\frac{1}{n}} &= |\lambda|
\end{aligned}$$

Hier in unserem Beispiel gilt: $\det A = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2} > 0$.
Behauptung: $\lambda = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. Denn

$$(\det A)^{1/3} = \left(2^{3/2}\right)^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q \in O(3)\,!} \,.$$

Beachte: $\lambda = \sqrt{2} =$ Länge der Spaltenvektoren von A!

Im Allgemeinen muss man das Vorzeichen von λ prüfen. Hier ist das klar wegen $n = 3$!

Aufgabe 9: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.

ja $\square$ nein $\square$

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.

ja $\square$ nein $\square$

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.

ja $\square$ nein $\square$

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.

ja $\square$ nein $\square$

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.

ja $\square$ nein $\square$

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.

ja $\square$ nein $\square$

LÖSUNG:

a) Nein! In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix komplex sein können.

b) Ja! Siehe einleitendes Beispiel im Kapitel Diagonalisierung.
Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spiegelungsmatrix eine orthogonale Matrix ist. Zudem wissen wir, dass der Betrag der Eigenwerte einer orthogonalen Matrix jeweils 1 ist. Da die Spiegelungsmatrix zudem symmetrisch ist und nur reelle Einträge hat, kann sie nur reelle Eigenwerte haben. Somit müssen die Eigenwerte ± 1 sein.

c) Nein! Wie im Fall der Drehmatrix können die Eigenwerte auch komplex sein.

d) Ja! Siehe Vorlesung.

e) Ja! Siehe Vorlesung.

f) Nein! Die Matrix $A = 2\mathbb{1}$ ist zwar winkeltreu aber nicht längentreu.

Aufgabe 10: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$. ja ☐ nein ☐

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja ☐ nein ☐

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Ja, denn alle Diagonaleinträge von A sind Null.

b) Nein! Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ja. Man berechnet für eine beliebige schiefsymmetrische 3×3-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = 0 + abc + (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) - 0 - 0 - 0 = 0.$$

d) Ja. $Ax \cdot x = x \cdot A^T x = x \cdot (-A)x = -x \cdot Ax = -Ax \cdot x \Rightarrow 2Ax \cdot x = 0$.

e) Ja. $Ax \cdot x = 0$ bedeutet, dass Ax stets senkrecht auf x steht. Also kann Ax kein Vielfaches von x sein, ausser das Nullfache.

Formal: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann $0 = Ax \cdot x = \lambda x \cdot x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$.

f) Ja, siehe Vorlesung.

g) Ja. $\det(\exp(tA))$ ist stetig (differenzierbar) in t und kann für beliebige t nur die Werte 1 und -1 annehmen, da $\exp(tA)$ stets orthogonal ist. Da die Werte dazwischen nicht möglich sind, muss die (stetige) Funktion für alle t konstant sein. Da

$$\det(\exp(0A)) = \det(\exp(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1,$$

muss auch gelten

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(1A)) = 1.$$