Aufgabe 11: Es seien $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, dass für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v$ und $S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} S_n u &= u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n = u - \frac{2u \cdot (u-v)}{\|u-v\|^2} \cdot (u-v) \\ 2u \cdot (u-v) &= 2\|u\|^2 - 2u \cdot v\,. \\ \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u \cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\ \Rightarrow\ S_n u &= u - (u-v) = u - u + v = v\,. \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v \cdot n = 2v \cdot (u-v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u-v\|^2$.

b)

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2} &= |\alpha| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 12: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen mit Hilfe von Spiegelungen. Berechnen Sie dabei nur die Matrix R und die Matrizen $Q^{(k)}$. Die Matrizen $Q^{(k)}$ können sie entweder explizit oder in der Form $Q^{(k)} = \mathbb{1} - cvv^T$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ angeben.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie den Rang der Matrizen A und B an.

d) Verwenden Sie die QR-Zerlegung, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = d$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

LÖSUNG:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Wir nehmen

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \|u_1\| &= \sqrt{5} \\ \alpha_1 &= -\text{sign }(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

hierbei sorgt das negative Vorzeichen für Stabilität, vgl. Skript

$$\begin{aligned} n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\ Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1\, n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{10+2\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir $R_1 = {Q^{(1)}}^T A$, indem wir die Matrix ${Q^{(1)}}^T$ nacheinander auf die Spalten der Matrix A anwenden.

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
R_1 = {Q^{(1)}}^T A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

Man sieht, dass

$$
\begin{aligned}
&A = Q^{(1)} R_1, \\
&Q = Q^{(1)}
\end{aligned}
$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Wie oben, setzen wir

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\|u_1\| &= \sqrt{2}, \\
\alpha_1 &= -\text{sign }(u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1\, n_1^T}{\|n_1\|^2} \\
&= \mathbb{1} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} n_1\, n_1^T \\
&= \mathbb{1} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} n_1\, n_1^T
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Wir wenden ${Q^{(1)}}^T$ auf die Spalten der Matrix B an:

$$\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2+2\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{Q^{(1)}}^T \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(6+3\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+3\sqrt{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {Q^{(1)}}^T B &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
u_2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\|u_2\| &= \sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen v_2 als Ergäzung von u_2 mit 0 in der ersten Zeile um einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ zu bekommen.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\|v_2\| &= \sqrt{6}, \\
\alpha_2 &= -\text{sign }(v_{22})\|v_2\| \\
n_2 &= v_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \\ -2 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_2\, n_2^T}{\|n_2\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} n_2\, n_2^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Um $R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T B$ zu berechnen, wenden wir ${Q^{(2)}}^T$ einzeln auf die Spalten der Matrix ${Q^{(1)}}^T B$ an:

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 0 \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} 2\left(3+\sqrt{3}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{Q^{(2)}}^T \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} (-6) \\
&= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}
$$

c) Nach Berechnung der QR-Zerlegung läßt sich einfach bestimmen, ob eine quadratische Matrix vollen Rang hat oder nicht, denn eine Matrix hat genau dann

vollen Rang, wenn sie invertierbar ist und eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Eigenwerte ungleich Null sind. Des weiteren ist das Matrixprodukt zweier Matrizen nur dann invertierbar, wenn beide einzelnen Matrizen invertierbar sind. Da die Matrizen $Q^{(k)}$ grundsätzlich invertierbar sind müssen wir nur noch prüfen, ob die Diagonaleinträge der Matrix R ungleich Null sind. Ist das gegeben, so hat die Matrix QR vollen Rang.
$\mathrm{Rang}(A) = 2$, $\mathrm{Rang}(B) = 3$

d) Um ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer QR-Zerlegung zu lösen, formt man das Gleichungssystem wie folgt um

$$\begin{aligned} && Ax &= b \\ \Leftrightarrow && QRx &= b \\ \Leftrightarrow && Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned} Q^T b = Qb = Q^{(1)} b &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}\,(1+\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \left(7 + 5\sqrt{5}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{\sqrt{5}} \\ -\frac{9}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_2 = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(7 - 4x_2) = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet also $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem $Bx = d$ lösen wir auf die gleiche Weise. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned} Q^T d &= Q^{(2)} Q^{(1)} d \\ &= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2}\left(10\sqrt{2} + 9\right) \right) \\ &= Q^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{10\sqrt{2}+9}{1+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Q^{(2)} \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \left(-2\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}+1\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anschließend lösen wir das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 &=& -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-10\sqrt{2}+\sqrt{2}x_2+3\sqrt{2}x_3\right) \\ x_2 &=& -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(4\sqrt{6}-\sqrt{6}x_3\right) \\ x_3 &=& 3 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 &=& 2 \\ x_2 &=& -1 \\ x_3 &=& 3 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Bx = d$ lautet also $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13:

a) Schreiben Sie eine Matlab Funktion *QRSolve(A,b)*, die unter Verwendung der Funktion *QRDecomposition* aus der Vorlesung das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

b) Testen sie diese Funktion anhand der Beispiele

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

und

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}
$$

Lösung:

a)
```
function x = QRSolve( A, b)
```

```
% solves the system Ax=b by using QR decomposition

[m,n]=size(A);

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    n = size(v);
    for l = k:n
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:n
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end


% QR decomposition
[A,alpha]=QRDecomposition(A);

% we have to solve the system Rx=Q^Tb, thus we have to compute Q^Tb
for i = 1:n-1
    b = ApplyQ(i, alpha(i), A(:,i), b);
end

[alphaM,alphaN] = size(alpha);

% now we solve the system Rx=Q^Tb
x(m) = b(m) / A(m,m);
for k = m-1:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - A(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/alpha(k);
end

end
```

b) Als Lösung des 2×2 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und als Lösung des 3×3 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.