Aufgabe 14: a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

b) Lösen Sie deshalb das Approximationsproblem

$$\|Ax - b\|^2 \to \min!$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung von A.

Aufgabe 15: a) Erweitern Sie die Funktion *QRSolve* vom letzten Übungsblatt zu einer Funktion, die lineare Ausgleichsprobleme für nichtquadratische Matrizen A lösen kann.

b) Testen Sie diese Funktion anhand des Beispiels

$$\|Ax - b\|^2 \to \min$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \ \text{ mit } \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x) w(x) \, \mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} \left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x) \right).$$

Aufgabe 17: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 18: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T A x = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung.
ja ☐ nein ☐

b) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja ☐ nein ☐

c) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit.
ja ☐ nein ☐

d) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$.
ja ☐ nein ☐