Aufgabe 14: a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

b) Lösen Sie deshalb das Approximationsproblem

$$\|Ax - b\|^2 \to \min!$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung von A.

LÖSUNG:

a) Aus der ersten Zeile ergibt sich sofort $x_1 = 1$, aus der dritten Zeile $x_2 = 1$. Damit steht in der zweiten Zeile $2 + 1 = 1$, was offensichtlich falsch.

b) Wir berechnen die QR-Zerlegung von A. Setzen wir dazu

$$\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|u_1\| &= \sqrt{5}, \\
\alpha_1 &= -\text{sign } (u_{11})\|u_1\| = -\sqrt{5} \\
n_1 &= u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Matrix ${Q^{(1)}}^T = Q^{(1)}$ auf die Spalten der Matrix A an.

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \left(5+\sqrt{5}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} 2 \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
R = {Q^{(1)}}^T A &= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
b_1 = {Q^{(1)}}^T b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung hat also nun die Form

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir merken daran, dass die beiden letzte Zeilen sowohl $x_2 = -1$ als auch $x_2 = 1$ liefern. Das ist unmöglich, daran sieht man ebenfalls, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Im zweiten Schritt setzen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

und ergänzen mit 0 in der ersten Zeile, um den Vektor $u_2 \in \mathbb{R}^3$ zu bekommen.

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\|u_2\| &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \\
\alpha_2 &= -\text{sign }(u_{22})\|u_2\| = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\
n_2 &= u_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_2\, n_2^T}{\|n_2\|^2} = \mathbb{1} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} n_2\, n_2^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Um $R = {Q^{(2)}}^T {Q^{(1)}}^T A = Q^{(2)} Q^{(1)} A$ zu berechnen, wenden wir $Q^{(2)}$ auf die Spalten der Matrix $Q^{(1)}A$ an.

$$
Q^{(2)} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

da $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Vector n_2 steht.

$$
\begin{aligned}
Q^{(2)} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{6+\sqrt{6}}{5} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
R = Q^{(2)}Q^{(1)}A &= \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
b_2 = {Q^{(2)}}^T b_1 = Q^{(2)} b_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{4-\sqrt{6}}{5} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4-\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
A &= QR, \\
Q &= Q^{(1)}Q^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow & \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\sqrt{5}\,x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,x_2 & = & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\,x_2 & = & -\frac{4}{\sqrt{30}} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{3}{5} - \frac{2}{5}x_2 = \frac{1}{3} \\ x_2 & = & \frac{2}{3} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Die Lösung unseres Minimierungsproblems ist also $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Aufgabe 15: a) Erweitern Sie die Funktion *QRSolve* vom letzten Übungsblatt zu einer Funktion, die lineare Ausgleichsprobleme für nichtquadratische Matrizen A lösen kann.

b) Testen Sie diese Funktion anhand des Beispiels

$$\|Ax - b\|^2 \to \min$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

a) Zuerst müssen wir in *QRDecomposition* ein paar kleine Änderungen vornehmen. Zum einen laufen die Schleifen in der Funktion *ApplyQ*, sowie die erste innere Schleife im Hauptprogramm bis m und nicht nur bis n und zum andern muss die äußere for-Schleife im Hauptprogramm bis n und nicht nur $n-1$ laufen.

```
function [A,alpha] = QRDecompositionNonSymmetric( A )
% QR - decomposition
% argument "A" is the matrix we want to decompose

% sign, being either +1 or -1, but not 0
```

```
function sig = pmsign (val)
    if (val < 0)
        sig = -1;
    else
        sig = +1;
    end
end

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    m = size(v);
    for l = k:m
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:m
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end

% main program
% get the length of the vector
[m,n] = size( A );

for k = 1:n
    norm = 0;
    for i =k:m
        norm = norm + A(i,k)*A(i,k);
    end
    norm = sqrt(norm);
    alpha(k) = -pmsign(A(k,k)) * norm;
    A(k,k) = A(k,k) - alpha(k);
    for j = k+1:n
       A(:,j) = ApplyQ( k, alpha(k), A(:,k), A(:,j) );
    end
end

end
```

In *QRSolve* muss man folgende Änderungen vornehmen: Die beiden for-Schleifen in der Funktion *ApplyQ* laufen bis m und nicht nur bis n, bei der Berechnung von $Q^T b$ läuft die Schleife bis n und nicht nur $n-1$ und beim Rückwärts-Einsetzen beginnt die for-Schleife bei n und nicht bei m.

```
function x = QRSolveNonSymmetric( A, b)
```

```
% solves the system Ax=b by using QR decomposition

[m,n]=size(A);

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    m = size(v);
    for l = k:m
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:m
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end


% QR decomposition
[A,alpha]=QRDecompositionNonSymmetric(A);

% we have to solve the system Rx=Q^Tb, thus we have to compute Q^Tb
for i = 1:n
    b = ApplyQ(i, alpha(i), A(:,i), b);
end

% now we solve the system Rx=Q^Tb
for k = n:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - A(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/alpha(k);
end

end
```

Aufgabe 16: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v,w) = \int_0^\pi v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \; x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \; x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot,\cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$

Lösung: Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei a, $b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\begin{aligned} \sin(ax) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \\ \sin(bx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \sin(ax)\sin(bx) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)}{2} - \frac{\left(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x}\right)}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right) \end{aligned}$$

a)

$$
\begin{aligned}
g(\sin(ax), \sin(bx)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2(a-b)}\left[\sin\left((a-b)x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)}\left[\sin\left((a+b)x\right)\right]_0^\pi = 0.
\end{aligned}
$$

weil $a - b \neq 0$ und $a + b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot, \cdot)$ orthogonal sind.

b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3, erhalten wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x),\, \sin(x))}}\sin(x) \\
w_2 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x),\, \sin(2x))}}\sin(2x) \\
w_3 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x),\, \sin(3x))}}\sin(3x)
\end{aligned}
$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
g(\sin(ax), \sin(ax)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(ax)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left((2a)x\right)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^\pi - \frac{1}{2a}\left[\sin\left(2ax\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) \\
w_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) \\
w_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot, \cdot)$ analog zum Vorgehen im $\mathbb{R}^3$.

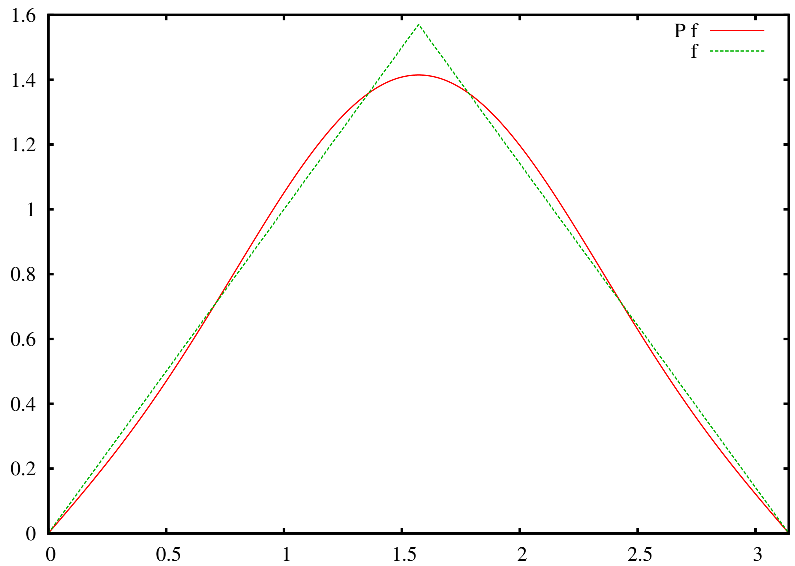
c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot, \cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$
Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)
$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x), w_1(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x), w_2(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \\
g(f(x), w_3(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_1(x) - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(x) - \frac{4}{9\pi}\sin(3x)
\end{aligned}
$$



Aufgabe 17: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Nein! Bsp. $v = e_3$, $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ b) Ja! c) Ja! Ausmultiplizieren $u_i \cdot u_j = 0$. d) Nein! Siehe a) e) Ja! Wegen c) $v = w = u$, dann $Pv = Pw = u$.

Aufgabe 18: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T A x = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung. ja ☐ nein ☐

b) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja ☐ nein ☐

c) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

d) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Nein! Bsp. $A = 0$.

b) Ja! Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $A^T A x = A^T b$. Dann folgt daraus

$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Rightarrow & (x_1 - x_2) A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \|A(x_1 - x_2)\|^2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & Ax_1 & = & Ax_2
\end{array}$$

c) Ja! Rang von A gleich n, daraus folgt:

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\Rightarrow A^T A x \cdot x = \|Ax\|^2 \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Zudem wissen wir, dass die Matrix $A^T A$ positiv semidefinit ist und somit ist $A^T A$ positiv definit.

d) Nein! Beispiel: A sei die Nullmatrix.