Aufgabe 19: Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$a_1 = (1,1,0,0)^T, \quad a_2 = (1,0,1,0)^T \quad a_3 = (0,0,1,0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 20: Orthonormalisieren Sie die Polynome

$$p_0 : t \mapsto 1 \quad p_1 : t \mapsto t \quad p_2 : t \mapsto t^2$$

bezüglich des Skalarprodukte $g(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ auf den Interval $[0,1]$.

Aufgabe 21: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0,\pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 22: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.