Aufgabe 19: Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$a_1 = (1,1,0,0)^T, \quad a_2 = (1,0,1,0)^T \quad a_3 = (0,0,1,0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

LÖSUNG: Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$
- $\tilde{v}_2 = a_2 - (a_2.v_1)v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$
  $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$
- $\tilde{v}_3 = a_3 - (a_3.v_2)v_2 - (a_3.v_1)v_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$
  $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)^T$

Sei $v_4 = (0,0,0,1)^T$, denn

$$\|v_4\| = 1, \quad v_1.v_4 = v_2.v_4 = v_3.v_4 = 0$$

und v_1, v_2, v_3, v_4 ist eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 20: Orthonormalisieren Sie die Polynome

$$p_0 : t \mapsto 1 \quad p_1 : t \mapsto t \quad p_2 : t \mapsto t^2$$

bezüglich des Skalarprodukte $g(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ auf den Interval $[0,1]$.

LÖSUNG: Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $\|p_0\| = 1 \Rightarrow q_0(t) = \frac{p_0(t)}{\|p_0\|} = 1$
- $g(p_1, q_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{q}_1(t) = p_1(t) - g(p_1,q_0)q_0(t) = t - \frac{1}{2}$
  $\|\tilde{q}_1\| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q_1(t) = \frac{\tilde{q}_1(t)}{\|\tilde{q}_1\|} = \sqrt{3}(2t-1)$
- $g(p_2, q_0) = \frac{1}{3}$ und $g(p_2, q_1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, denn

$$\tilde{q}_2(t) = p_2(t) - g(p_2,q_0)q_0(t) - g(p_2,q_1)q_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$\|\tilde{q}_2\| = \frac{1}{6\sqrt{5}} \Rightarrow q_2(t) = \frac{\tilde{q}_2(t)}{\|\tilde{q}_2\|} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$

Aufgabe 21: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

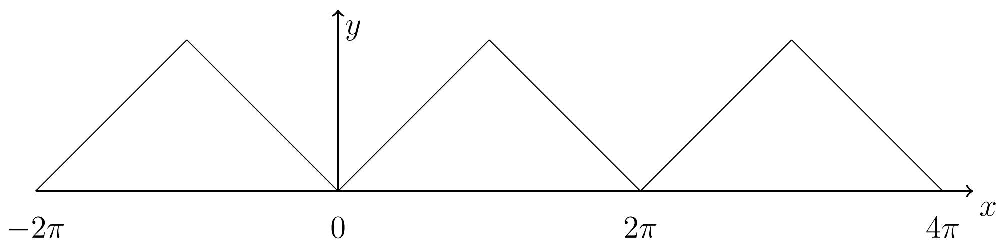
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung:

a) 

b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} x^2 \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[2x - \frac{1}{2\pi} x^2 \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi} 2\pi - \frac{2}{\pi} \pi - \frac{1}{2\pi^2} (2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2} (\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\cos(y)dy\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2-\frac{1}{k\pi}y)\cos(y)dy\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\cos(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\cos(y)dy\\
&\text{partielle Integration}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\left[k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}-(0\cdot\sin(0)+\underbrace{\cos(0)}_{=1})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[\underbrace{\sin(2k\pi)-\sin(k\pi)}_{=0}\right]\\
&-\frac{1}{k^2\pi^2}\left[2k\pi\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}-(k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k})\right]\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1+(-1)^k).
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{4}{\pi^2},\\
a_2 &= 0,\\
a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2},\\
a_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die b_k folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k}) \sin(y) dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} (2 - \frac{1}{k\pi} y) \sin(y) dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \sin(y) dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y \sin(y) dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[-\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - (0 \cdot \cos(0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[-\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-2k\pi \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - (-k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}) \right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-k\pi(-1)^k\right] - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-2k\pi + k\pi(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi} \left[-1 + (-1)^k\right] \\
=& \frac{1}{k\pi} \left[-(-1)^k + 2 - (-1)^k - 2 + 2(-1)^k\right] = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 22: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

LÖSUNG:

a)

$$v_1 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Die Projektion des Punktes p auf die Ebene berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
(p \cdot v_1)v_1 + (p \cdot v_2)v_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{\|\tilde{n}\|} \tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{32}} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Ebene lässt sich also schreiben als

$$\left\{ x \,\middle|\, x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

d)

$$
\begin{aligned}
p-(p\cdot n)n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$