S

Aufgabe 23: Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

Aufgabe 24: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \cosh x$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von g zwischen den Punkten $(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$.
Tipp: $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Aufgabe 25: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

Aufgabe 26: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?