Aufgabe 27: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \qquad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

LÖSUNG: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die beiden Kurven sich im Punkt $x(\phi_0, h_0)$ schneiden und $\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ h_0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{m}(t) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ t \end{pmatrix}$ die zugehörigen Kurven im Parameterbereich sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}(t)\Big|_{t=\phi_0} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\tilde{m}(t)\Big|_{t=h_0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{G\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix}h^2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

d.h. die beiden Kuven auf der Hyperfläche schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 28: Betrachten Sie einen durch

$$
x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}
$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

LÖSUNG: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$
\begin{aligned}
G &= (Dx)^T Dx \\
&= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sqrt{\det G} &= \sqrt{2}h
\end{aligned}
$$

Nun gilt für die Fläche

$$
\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt(Kegel)} &= \int_0^{2\pi}\int_0^H \sqrt{2}h\,dh\,d\phi \\
&= 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{2}H^2 = \sqrt{2}\pi H^2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 29: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$
x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix},
$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).
Berechen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{S}$.

LÖSUNG:

Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \Big(\partial_v x \;\Big|\; \partial_w x\Big) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\sqrt{\det G(v,w)} = r(R + r\cos w)$.

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} da = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\det G(v,w)}\,dv\,dw \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos w)\,dv\,dw \\ &= 2\pi(2\pi r R + \int_0^{2\pi} r^2\cos w\,dw) \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

Aufgabe 30: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

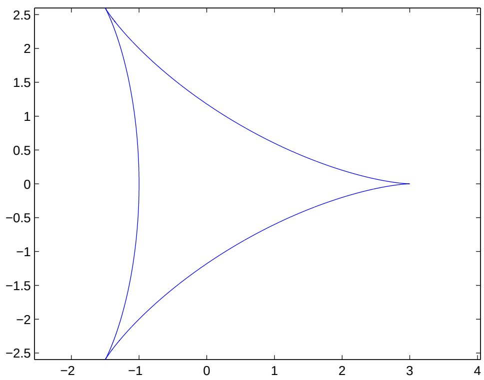
$0 \le t \le 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t\cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

LÖSUNG: Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1 dx = \int_\Omega \mathrm{div}\, F dx\, dy \quad \text{mit div } F = 1, \text{ z.B. } F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_\Gamma F \cdot N\, dl \quad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} ||\dot\gamma(t)||\, dt\,, \quad N = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 4\cos t \cos 2t + 2\cos t \cos 2t - 2\cos^2 2t) dt
\end{aligned}$$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$,

also $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_0^{2\pi} [(2\cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)] dt \\
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$