Aufgabe 31: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: grad $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x - 5y \ , \\ f_y(x,y) &= -5x - 4y \ . \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0 \ .$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} (6-\lambda)(-4-\lambda) - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49 \ , \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 50 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50} \, . \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0,0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0,0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0,0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-4<0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned}f(0,0)&=3\ ,\\ f(t,0)&=3t^2+3>3\ ,\\ f(0,t)&=-2t^2+3<3\ ,\end{aligned}$$

wobei $t\neq 0$ sei.

Aufgabe 32: Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto f(x,y):=(y^3-y)\cdot(e^x+e^{-x})\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

LÖSUNG:

a) Kritische Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}(y^3-y)(e^x-e^{-x})\\(3y^2-1)(e^x+e^{-x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \Rightarrow\begin{pmatrix}y(y^2-1)(e^x-e^{-x})\\(3y^2-1)(e^x+e^{-x})\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \Rightarrow x=0 \text{ und } y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Die Hessesche Matrix ist

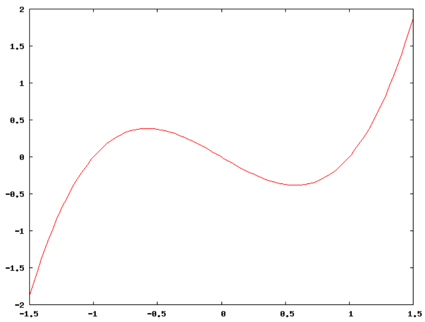
$$H(x,y)=\begin{pmatrix}(y^3-y)(e^x+e^{-x}) & (3y^2-1)(e^x-e^{-x})\\(3y^2-1)(e^x-e^{-x}) & 6y(e^x+e^{-x})\end{pmatrix}$$

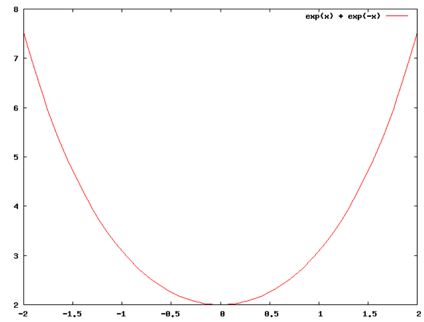
Also

$$\begin{aligned}(x,y)=(0,+\frac{1}{\sqrt{3}})&\Rightarrow H(x,y)=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0\\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\\ (x,y)=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})&\Rightarrow H(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0\\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

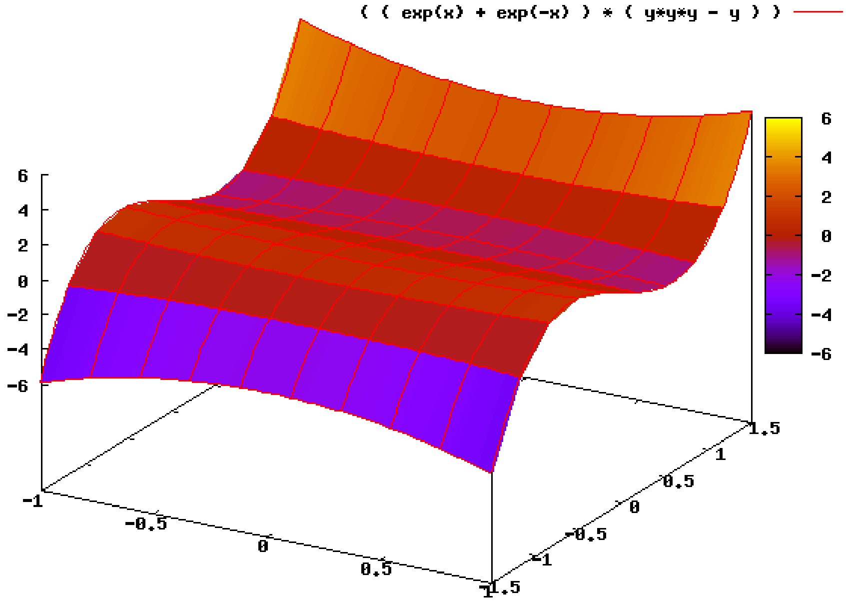
Die Hesse-Matrix ist in beiden Fällen indefinit und beide Punkte $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ sind Sattelpunkte.

b) Wir plotten zunächst die beiden Faktoren von f separat:





und nun den Graphen der gesamten Funktion:



Bemerkung: Für konstantes $y = y_0$ ist $f(x, y_0) = K(e^x + e^{-x})$.

Aufgabe 33: Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

b) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Extremum. ja ☐ nein ☐

c) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

d) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein globales Minimum. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!
Für a) und b) beachtet man dazu $\mathrm{grad} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f_1 ist. Wegen $D^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und $D^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0,0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0,t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da t^3 negativ ist für $t < 0$, $= 0$ für $t = 0$ und positiv ist für $t > 0$.
Für c), d) und e) beachtet man $\mathrm{grad} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt, dass $(0,0)$ kritischer Punkt von f_2 ist. Wegen $D^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$ und $D^2 f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0,0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0,0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0,0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0,\pm 1) = 0$ und $f_2(0,\pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.