

Aufgabe 34: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f .

Aufgabe 35: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

Aufgabe 36: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

- Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.
- Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.
- Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.
- Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.
- Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

Aufgabe 37: a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit Restglied $O(|x - x_0|^{2n})$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \cos(x) \cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 3.

Aufgabe 38: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \|x - a\|$ nach Taylor an der Stelle x_0 bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.