Aufgabe 34: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

LÖSUNG: Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x, y) mit $\nabla f(x, y) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{3\pi}{2} \\ x = 0, \quad \text{oder} \quad x = \pi, \quad \text{oder} \quad y = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pi \end{cases}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_5 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_6 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_7 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_8 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Aufgabe 35: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha) \\
&P_0 = (0,0),\ P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $P_0 = (0,0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 \ &\Leftrightarrow\ (\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\qquad \lambda_1 \lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunk handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha, -\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
(6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$. D.h. $(\alpha,-\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha,-\alpha) = \alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 3y^2 - 12 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow P_0 = (-1,-2),\ P_1 = (-1,2),\ P_2(1,-2),\ P_3(1,2)$$
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

i) Für $P_0 = (-1,-2)$ gilt: $D^2 f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.
$f(-1,-2) = -1 - 8 + 3 + 24 + 20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1 = (-1,2)$ gilt: $D^2 f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.
$f(-1,2) = -1 + 8 + 3 - 24 + 20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.
Für $P_2 = (1,-2)$ gilt: $D^2 f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,
$f(1,-2) = 1 - 8 - 3 + 24 + 20 = 34$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

iii) Für $P_3 = (1,2)$ gilt: $D^2 f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.
$f(1,2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$
$\Rightarrow$ (lokales)Minimum.

Aufgabe 36: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und
$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$
Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass
$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$
für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

LÖSUNG:

a)

$$x_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 \\ r_0 \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \|x_0 - x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi \\ r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi \\ z_0 - z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi)^2 + (r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \partial_\varphi d(\varphi, z) &= 2\,(r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi)\sin\varphi + 2\,(r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)\,(-\cos\varphi) \\ &= 2r_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi - 2r_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2r_0\,(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi) \\ &= 2r_0\,(\cos(-\varphi_0)\sin\varphi + \sin(-\varphi_0)\cos\varphi) \\ &= 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \partial_z d(\varphi, z) &= -2\,(z_0 - z) \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\nabla d(\varphi, z) = 0.$$

Für $r_0 \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi = \varphi_0 \text{ oder } \varphi_0 + \pi \text{ und } z = z_0$$

$\Rightarrow$ (φ_0, z_0) und $(\varphi_0 + \pi, z_0)$ sind kritische Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

Im Fall $r_0 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z_0$$

Kritische Punkte sind in diesem Fall also alle Punkte (φ, z_0) mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

d)

$$D^2 d(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $\underline{r_0 \neq 0}$

$$D^2 d(\varphi_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit} \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$
$$D^2 d(\varphi_0 + \pi, z_0) = \begin{pmatrix} -2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \;\Rightarrow\; \text{Sattelpunkt}$$

Im Fall $r_0 \neq 0$ gilt

$$x_Z = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $r_0 = 0$ ist die Matrix $D^2 d$ positiv semidefinit, so dass wir keine allgemeine Aussage machen können. Allerdings gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + (z_0 - z)^2 \\ &= 1 + (z_0 - z)^2, \end{aligned}$$

d.h. der Abstand hängt nicht mehr von φ sondern nur noch von z ab. Da für $d(z) = d(\varphi, z)$ die zweite Ableitung $d''(z) = 2$ größer Null ist, handelt es sich bei allen kritischen Punkten um Minima. Es gibt in diesem Fall also nicht nur einen Punkt x_z, der auf dem Zylinder Z liegt und minimalen Abstand zum Punkt x_0 hat sondern eine Menge M_Z von Punkten, die alle auf Z liegen und minimalen Abstand zum Punkt x_0 haben.

$$M_Z = \{(\varphi, z_0) \,|\, \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Aufgabe 37: a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit Restglied $O(|x - x_0|^{2n})$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 3.

LÖSUNG:

a) Die Formel für die Taylor-Entwicklung bis Ordnung n an einem Punkt x_0 ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + O(|x - x_0|^{n+1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + O(|x - x_0|^{n+1}) \end{aligned}$$

wobei $f^{(i)}(x_0)$ die $i$te Ableitung an der Stelle x_0 ist.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f^{(1)}(x_0) = -\sin(x_0) \\ f''(x_0) &= f^{(2)}(x_0) = -\cos(x_0) \\ f^{(3)}(x_0) &= \sin(x_0) \\ f^{(4)}(x_0) &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

und dann für alle $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(x_0) &= (-1)^t \sin(x_0) \\ f^{(2t)}(x_0) &= (-1)^t \cos(x_0) \end{aligned}$$

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(\frac{\pi}{2}) &= (-1)^t \\ f^{(2t)}(\frac{\pi}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

und die Taylor-Entwicklung bis Ordnung $(2n-1)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ist:

$$f(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(2t-1)!} (-1)^t (x - \frac{\pi}{2})^{(2t-1)} + O\left(\left| x - \frac{\pi}{2} \right|^{2n} \right)$$

b) Die Taylor-Entwicklungsformel für g an der Stelle x_0 ist:

$$g(x_0 + \xi, y_0 + \zeta) = g(x_0, y_0) + \sum_{n} \sum_{|\alpha| = n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha g}{\partial (x,y)^\alpha} (x_0, y_0) (\xi, \zeta)^\alpha + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^{n+1} \right)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2) \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \\ \frac{\partial^\alpha g}{\partial (x,y)^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}} \\ (\xi, \zeta)^\alpha &= \xi^{\alpha_1} \zeta^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g(\xi, \zeta) = g(0,0) &+ \frac{\partial}{\partial x} g(0,0)\xi + \frac{\partial}{\partial y} g(0,0)\zeta \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(0,0)\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0,0)\xi\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(0,0)\zeta^2 + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^3 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)=-1$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(0,0)=-1$$

und somit

$$g(\xi,\zeta)=1-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\zeta^2+O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^3\right)$$

Aufgabe 38: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwicklen Sie die Funktion $f(x)=\|x-a\|$ nach Taylor an der Stelle x_0 bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

$$f(x)=\|x-a\|=\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

setze $x=x_0+h, h\in\mathbb{R}^n$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\text{grad } f(x_0)\cdot h+\frac{1}{2}D^2f(x_0)h\cdot h+O(\|h\|^3)$$

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x)&=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x),\frac{\partial}{\partial x_2}f(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}f(x)\right)^T\\
&=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\|x-a\|}\cdot 2(x_1-a_1),\ldots,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\|x-a\|}\cdot 2(x_n-a_n)\right)^T\\
&=\left(\frac{x_1-a_1}{\|x-a\|},\ldots,\frac{x_n-a_n}{\|x-a\|}\right)^T=\frac{1}{\|x-a\|}(x-a)\end{aligned}$$

$$H(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}f(x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_n}f(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}f(x)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x)&=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{(x_i-a_i)}{f(x)}\\
&=\frac{1}{f(x)}-\frac{(x_i-a_i)(x_i-a_i)}{f^3(x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|x-a\|} - \frac{1}{\|x-a\|^3}(x_i - a_i)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^3}(x_i - a_i)^2$$

$$i \neq j: \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(x_i - a_i)}{f(x)}$$

$$= -\frac{1}{f^3(x)}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

$$= -\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{\|x-a\|^3}$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right)$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x_0 + h) = \|x_0 - a\| + \frac{(x_0 - a)}{\|x_0 - a\|} \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right) h \cdot h + O(\|h\|^3)$$

Zusätzliche Erläuterung: (Nicht Teil der Lösung!)
Mit der Bezeichnung $g = \operatorname{grad} f(x_0)$ erhalten wir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + g \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|}\left(\|h\|^2 - (g \cdot h)^2\right) + \left(\|h\|^3\right).$$

Dabei ist offenbar $\|g\| = 1$, also ist g der Einheitsvektor, der von a in Richtung x_0 zeigt. Der lineare Term (also die Approximation der Änderung in erster Ordnung) ist daher die Projektion von h auf die Gerade durch x_0 und a. Hier spielt also nur der Anteil von h eine Rolle, der auf a zu oder von a weg zeigt, nicht der Anteil „seitwärts“. In ähnlicher Weise erklärt sich der quadratische Term: Mit $s^2 = \|h\|^2 - (g \cdot h)^2$ ist s der „Seitwärts-Anteil“ von h (Pythagoras!). Der Term zweiter Ordnung berücksichtigt also die Änderung „seitwärts“.
Die Skalierung überlegt man sich beispielsweise folgendermaßen: Mit $a = (0,0)^T$, $x_0 = (1,0)^T$ und $h = (t,s)^T$ erhält man $f(x_0 + h) = 1 + t + \frac{1}{2}s^2 + O(\|h\|^3)$. Zu $x_0 = (L,0)^T$ erhält man die skalierte Gleichung $\frac{f(x_0+h)}{L} = 1 + \frac{t}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{L}\right)^2 + O(\|h\|^3)$. Multiplikation mit $L = \|x_0 - a\|$ ergibt schließlich die obige Form.