Aufgabe 39: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 7xy + 2x^2y$$

im Punkt $(1, 1)$ mit Restglied der Ordnung 4. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
&f(1,1) = -4\\
&f_x(x,y) = 3x^2 - 7y + 4xy \Rightarrow f_x(1,1) = 0\\
&f_y(x,y) = -7x + 2x^2 \Rightarrow f_y(1,1) = -5\\
&f_{xx}(x,y) = 6x + 4y \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 10\\
&f_{xy}(x,y) = -7 + 4x \Rightarrow f_{xy}(1,1) = -3\\
&f_{yy}(x,y) = 0\\
&f_{xxx}(x,y) = 6\\
&f_{xxy}(x,y) = 4\\
&f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}
f(x,y) = {} & f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)\\
& + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)\\
& + \frac{1}{6}\left(f_{xxx}(1,1)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(x-1)^2(y-1) + 3f_{xyy}(x-1)(y-1)^2 + f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right)\\
& + \mathrm{O}((x-1)^4 + (y-1)^4)\\
= {} & -4-5(y-1)+5(x-1)^2-3(x-1)(y-1)+(x-1)^3+2(x-1)^2(y-1)+\mathrm{O}((x-1)^4+(y-1)^4)
\end{aligned}$$

Ausmultiplikation:

$$\begin{aligned}
& -4 - 5(y-1) + 5(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1)\\
= {} & -4-(5y-5)+(5x^2-10x+5)-(3xy-3x-3y+3)+(x^3-3x^2+3x-1)+(2x^2y-4xy-2x^2+4x+2y-2)\\
= {} & x^3 - 7xy + 2x^2y = f(x,y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 40: Entwicklen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2}$$

nach Taylor an der Stelle $x = x_0$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- Zunächst sehen wir $f(x_0) = e^{-\|x_0 - x_0\|^2} = e^0 = 1$
- Berechnung des Gradienten: $\operatorname{grad} f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0) \Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) = \mathbf{0}$
- Berechnung der zweiten Ableitungen: $D^2 f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2} \cdot \mathbb{1} + 4e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0)(x - x_0)^T$
$$\Rightarrow \quad D^2 f(x_0) = -2 \cdot \mathbb{1}$$
- Somit gilt
$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= 1 + \frac{1}{2}(x_0 + \xi - x_0)^T(-2\mathbb{1})(x_0 + \xi - x_0) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - (\xi)^T(\mathbb{1})(\xi) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - \|\xi\|^2 + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \end{aligned}$$

Aufgabe 41: Gesucht ist die Schnittmenge der beiden Zylinder

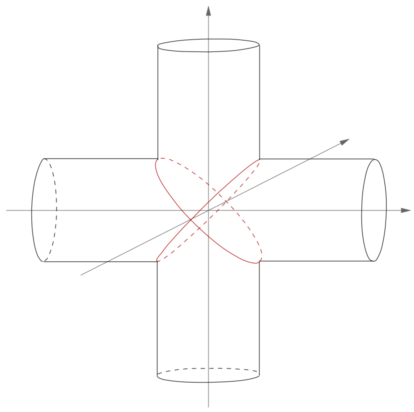
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Schnittmenge aus zwei geschlossenen Kurven besteht und jede der beiden Kurven durch einen Schnitt einer Ebene mit einem Zylinder beschrieben werden kann.

(ii) Finden Sie eine Parameterdarstellung für beide Schnittkurven.

(iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.
Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:



(i) Subtraktion der beiden Gleichungen liefert $y^2 = z^2$. Also gilt für alle Punkte der Schnittmenge $y = \pm z$. Somit liegt die Schnittmenge der beiden Zylinder in der Vereinigung der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} y - z &= 0, \\ y + z &= 0, \end{aligned}$$

und die Schnittmenge der beiden Zylinder liegt natürlich auch im Zylinder $x^2 + y^2 = 1$. Umgekehrt folgt durch Rechnung, dass jeder Punkt, der auf diesem Zylinder und in einer der beiden Ebenen liegt, auch auf dem anderen Zylinder liegt.

(ii) Wir können den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ in Parameterform

$$\begin{aligned} x &= \cos s, \\ y &= \sin s, \\ z &= t \end{aligned}$$

schreiben. Die Bedingung $y = \pm z$ liefert als Parameterdarstellung der beiden Schnittkurven

$$\begin{aligned} x &= \cos s, \\ y &= \sin s, \\ z &= \pm \sin s \end{aligned}$$

(iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.
Die Schnittmenge der beiden Zylinder ist gegeben duch

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\right\},$$

wobei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

ist der Tangentialraum an M im Punkt (x, y, z) gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ -xy \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wie wir aus Aufgabenteil (i) wissen, muss gelten $y = \pm z$, damit $(x, y, z) \in M$ liegt. D.h.

$$\begin{aligned} T_{(x,z,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} z^2 \\ -xz \\ -xz \end{pmatrix} \right\} \\ T_{(x,-z,z)}M &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -z^2 \\ -xz \\ xz \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Wir müssen jedoch aufpassen an den Punkten $(1, 0, 0)$ und $(-1, 0, 0)$. Nach dem, was wir gerade eben berechnet haben wäre $(0, 0, 0)$ in beiden Fällen der Tangentialvektor, was nicht sein kann. Der Grund dafür, dass wir an diesen beiden Stellen ein falsches Ergebnis berechnen, liegt darin, dass

$$DF((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF((-1,0,0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen ist der $\text{Rang}(DF) = 1$, so dass die Voraussetungen für den Satz über implizite Funktionen nicht erfüllt sind.

Aufgabe 42: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\ g(x,y,z) &:= x - 1 = 0\,, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:

a) $h(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt eine Kugel $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 2$ ($R^2 = 4\,!$) und Mittelpunkt $M = (2,0,0)^T$.

$g(x,y,z) = x - 1 = 0$ beschreibt die Ebene $x = 1$, die parallel zur y-z-Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene $x = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = h(1,y,z) &= (1-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ y^2 + z^2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius $\tilde{R} = \sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\tilde{M} = (1,0,0)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \;\Rightarrow\; z = z(y) = \pm\sqrt{3 - y^2} \quad \text{für } |y| \le \sqrt{3}$$
$$\text{(sowie } x(y) = 1\text{)}$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \;\Rightarrow\; y = y(z) = \pm\sqrt{3 - z^2} \quad \text{für } |z| \le \sqrt{3}\,.$$
$$\text{(sowie } x(z) = 1\text{)}$$

Beachte: Wegen der $\pm$ erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3 - z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3 - z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3 - y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3 - y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,.$$