Aufgabe 43: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.

a) Bestimmen Sie für die durch $f(x,y,z) = 0$ gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der xy-Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche in Normalenform berechnen (Tipp: Ohne Normierung der Normalen ist die Rechnung einfacher). Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekannten Funktion durch partielle Ableitungen von f auszudrücken.

b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$?

Lösung:

a) Nach Voraussetzung gilt:

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0 \text{ und } \partial_z f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

daher kann lokal (d. h. in einer geeigneten Umgebung des Punktes (x_0,y_0,z_0)) $z = g(x,y)$ geschrieben werden und die durch „$f(x,y,z) = 0$" definierte Fläche wird lokal als Graph der Funktion $z = g(x,y)$ gegeben. Wir suchen also die Tangentialebene an den Graphen

$$G_g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$T_{(x,y,g(x,y))}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x,y) \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_0,y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x g(x_0,y_0) \\ -\partial_y g(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht also senkrecht auf der Tangentialebene an den Graphen G_g im Punkt (x_0, y_0, z_0). Daraus folgt

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\partial_x g(x_0, y_0)\, x - \partial_y g(x_0, y_0)\, y + z = d \right\},$$

wobei d noch zu bestimmen ist. Da der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf der Tangentialeben liegt, gilt

$$d = -\partial_x g(x_0, y_0)\, x_0 - \partial_y g(x_0, y_0)\, y_0 + z_0.$$

$$\Rightarrow T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z - z_0 = \partial_x g(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)\,(y - y_0) \right\}$$

Aus $0 = f(x, y, g(x, y))$ folgt nach der Kettenregel (und dem Satz über implizite Funktionen):

$$\partial_x g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{und} \quad \partial_y g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)}$$

Setzt man dies ein und multipliziert mit $\partial_z f(x_0, y_0, z_0)$ (was nach Vorausetzung $\neq 0!$), ergibt sich

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Bemerkung:
Im Graphenfall wird die Tangentialebene an den Graphen meinst wie oben angegeben definiert, doch es gibt auch Definitionen ohne Aufpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$.
In diesem Fall gilt $d = 0$, so dass der Abschnitt zur Berechnung von d wegfällt und sich folgende Lösung ergibt:

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

b) Wir setzen natürlich $a, b, c > 0$ voraus.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,, \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \quad \checkmark\,, \\ \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)\,, \\ \nabla f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}x+\frac{1}{\sqrt{3}b}y+\frac{1}{\sqrt{3}c}z=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}\right\}
$$

ist damit die Tangentialebene im Punkt $\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$ an das Ellipsoid.

Bemerkung:
Analog zum vorherigen Aufgabenteil gibt es auch hier eine zweite Mögliche Lösung. Diese lautet

$$
\begin{aligned}
T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\\frac{1}{b}\\\frac{1}{c}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\right\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 44: a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$
U(x)=U(x,y,z):=\frac{mG}{||x-a||}=\frac{mG}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}}
$$

eines Punktes $a\in\mathbb{R}^3$ der Masse $m>0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G=(6672\pm 4)10^{-14}m^3s^{-2}kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$
\mathcal{F}_c:=\{x\in\mathbb{R}^3 : U(x)=c\}
$$

von U für jedes $c>0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a,b\in\mathbb{R}^3$ $(a\neq b)$ der Massen $m_1=m_2=m>0$ lautet

$$
V(x)=V(x,y,z):=\frac{m_1G}{||x-a||}+\frac{m_2G}{||x-b||}
$$

Sind die Niveauflächen $\mathcal{S}_c:=\{x\in\mathbb{R}^3 : V(x)=c\}$ von V wiederum für jedes $c>0$ zweidimensionale Flächen?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} U(x) = c \Leftrightarrow \|x-a\| &= \frac{mG}{c} =: R \\ \Leftrightarrow \|x-a\|^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Dies sind Kugeloberflächen vom Radius $R = \frac{mG}{c} > 0$ und Mittelpunkt $M = a \in \mathbb{R}^3$.

Wegen

$$\nabla U(x) = -mG \frac{x-a}{\|x-a\|^3} \text{ für } x \neq a$$

gilt $\nabla U(x) \neq 0$ für alle $c > 0$. Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass es sich bei $\mathcal{F}_c$ um eine zweidimensionale Flächen handelt.

Bemerkung: Der Satz über implizite Funktionen wäre/ist hier nicht absolut nötig, da man die Auflösungen explizit (s. oben) vornehmen kann und damit auch explizit Tangentialvektoren ausrechnen kann!

b) Zuerst zeigen wir, daß diese Menge nicht leer ist. Da $m_1 = m_2 = m$ gilt

$$V(x) = mG \left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|} \right)$$

und

$$\begin{aligned} V(x) &\to 0 \text{ für } \|x\| \to \infty \\ V(x) &\to +\infty \text{ für } x \to a, b. \end{aligned}$$

Also gibt es für alle $c > 0$ Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die in der Niveaumenge

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) = c\}$$

liegen. Sei

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{m_1 G}{\|x-a\|} + \frac{m_2 G}{\|x-b\|} - c \\ &= mG \left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|} \right) - c \end{aligned}$$

die Funktion, die die Niveaumenge $V(x) = c$ als Null-Niveaumenge beschreibt.

$$\nabla g(x) = -mG \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} + \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3} \right)$$

Die Niveaumenge ist keine Fläche, falls

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &- \frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} - \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{a-x}{\|x-a\|^3} = \frac{x-b}{\|x-b\|^3} \end{aligned}$$

Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned}
&\nabla g(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & a - x = x - b \\
\Leftrightarrow & x = \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Solche Punkte gehören zu der Niveauflächen $V(x) = c_0$ wobei

$$c_0 = \frac{mG}{\|\frac{b-a}{2}\|} + \frac{mG}{\|\frac{a-b}{2}\|} = \frac{4mG}{\|a-b\|}$$

Somit sind alle Niveaumengen

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, V(x) = c\}$$

mit $c \neq c_0$ Flächen. F_{c_0} ist hingegen keine Fläche.

Bemerkung:
Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Aufgabenteiles, weil ∇g nur an einer Stelle Null ist, und weil die Niveaumengen sich nicht schneiden, kann man sagen, dass:

- Für $c < c_0$ ist die Niveaumenge $V(x) = c$ ist eine Hyperfäche in $\mathbb{R}^3$, das heißt eine geschlossene 2D Fläche;
- Für $c = c_0$ hat die Niveaumenge $V(x) = c$ einen singulären Punkt (Siehe Abbildung 1)
- Für $c > c_0$ besteht die Niveaumenge $V(x) = c$ aus zwei Hyperfächen in $\mathbb{R}^3$, das heißt zwei geschlossene 2D Flächen.

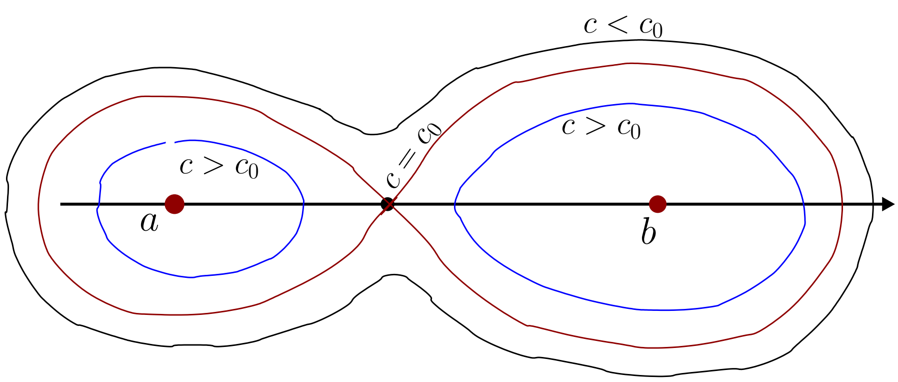

Abbildung 1: Skizze der Niveaufächen in 2D

Aufgabe 45: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

LÖSUNG: Minimieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

f ist das Quadrat des Abstandes!
Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned} &\partial_x F =: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0\,, \\ &\partial_y F =: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y+1) - 2\lambda y = 0\,, \\ &\partial_z F =: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0\,, \\ &\partial_\lambda F = F_\lambda = -g = 0\,. \\ &\qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2z(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y(1-\lambda) = -1 \\ 2x(1-\lambda) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1-\lambda) = 1 \end{array} \right. \\ &\qquad \Rightarrow 1 - \lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} \\ &\qquad \Leftrightarrow \boxed{x = -y} \quad (\lambda \neq 1\,!) \end{aligned}$$

und ($\boxed{z = 0}$ oder $\boxed{\lambda = -1}$).
Fall 1: $x = -y$ und $z = 0$:

$$\Rightarrow\; 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} \\ &= (\sqrt{2}-1)^2\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 \\ &= \frac{2(2+\sqrt{2})^2}{4} = (1+\sqrt{2})^2\,. \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda = -1 \;\Rightarrow\; 1-\lambda = 2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y+2=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}\,, \\ 4x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \text{keine Lösung!}$$

Der minimale Wert ist also: $(\sqrt{2}-1)^2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Beachte: Die Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2$ ist stetig und für jedes feste $z_0 \in \mathbb{R}$ ist $M_{z_0} = \{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1+z_0^2\}$ ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt $M = (0,0,z_0)$ und Radius $R = \sqrt{1+z_0^2}$, also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt f in M_{z_0} sowohl Minimum als auch Maximum.
Bemerkung: Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor (x_0-x, y_0-y, z_0-z) parallel zu $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ liegt.

Aufgabe 46: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.

Lösung: Wir müssen die Funktion

$$f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0$$

minimieren. Dazu bilden wir die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - \lambda(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_x F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2(x-x_0) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y-y_0) - 2\lambda y = 0 \\ 2(z-z_0) = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{array} \right\}$$

Daraus folgt $z = z_0$,

$$x = \frac{x_0}{1-\lambda} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{y_0}{1-\lambda}.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{y_0^2}{(1-\lambda)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad x_0^2 + y_0^2 &= (1-\lambda)^2 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= 1 \pm \sqrt{x_0^2+y_0^2} \end{aligned}$$

und damit können wir nun x und y ausrechnen:

$$x = \frac{x_0}{1-\lambda} = \frac{x_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$
$$y = \frac{y_0}{1-\lambda} = \frac{y_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, z_0\right) &= \frac{x_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} + \frac{y_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\ &= \left(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, z_0\right) &= \frac{x_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} + \frac{y_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\ &= \left(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_Z = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ z_0 \end{pmatrix}$$