Aufgabe 47: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$h(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$g(x, y, z) := x - z = 0$$
$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

b) Finden Sie einen Punkt P auf der Schnittmenge mit $x = 1$.

c) Berechnen Sie den Gradienten ∇h, ∇g an dem Punkt P und nutzen sie, um eine Tangentenvektor der Schnittmenge zu finden.

LÖSUNG:

a) It's an intersection between a cylinder aligned with the z-axis and with radius 1 and a plane with normal $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ that goes through the origin. The intersection is an ellipse.

b) If $x = 1$ then because $g(x, y, z) = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow z = x = 1$ and also $h(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = 0$. So the point is $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) We have $\nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ at P. The gradients are normal to the sets $h(x, y, z) = 0$ and $g(x, y, z) = 0$ and therefore to the intersection. It follows that a tangent vector $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ of the intersection needs to be normal to both gradients $v \cdot \nabla h = v \cdot \nabla g = 0$, and so

$$v. \cdot \nabla h = 0 \Rightarrow 2v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

and

$$v \cdot \nabla g = 0 \Rightarrow v_1 - v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = v_1 = 0$$

We conclude that any vector of the form $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ is tangent to the intersection at P.

Aufgabe 48: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos(2\pi t) \\ e^t \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit $t \in [0, 2]$.

a) Berechnen Sie die Punkte $\gamma(\frac{i}{4})$, $i = \{0, \ldots, 8\}$, und skizzieren Sie die Kurve.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

c) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (1, 0) \\
\gamma(\frac{1}{4}) &= (0, e^{1/4}) &&\approx (0, 1.28) \\
\gamma(\frac{1}{2}) &= (-e^{1/2}, 0) &&\approx (-1.65, 0) \\
\gamma(\frac{3}{4}) &= (0, -e^{3/4}) &&\approx (0, -2.12) \\
\gamma(1) &= (e, 0) &&\approx (2.72, 0) \\
\gamma(\frac{5}{4}) &= (0, e^{5/4}) &&\approx (0, 3.5) \\
\gamma(\frac{3}{2}) &= (-e^{3/2}, 0) &&\approx (-4.48, 0) \\
\gamma(\frac{7}{4}) &= (0, -e^{7/4}) &&\approx (0, -5.75) \\
\gamma(2) &= (e^2, 0) &&\approx (7.39, 0)
\end{aligned}$$

The curve is a logarithmic spiral, starting at $(0, e)$ and doing two complete counter-clockwise rotations it ends at $(e^2, 0)$.

b) We first calculate the velocity

$$\begin{aligned}
v(t) &= \|\gamma'(t)\| \\
&= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\
&= \sqrt{(e^t \cos(2\pi t) - 2\pi e^t \sin(2\pi t))^2 + (e^t \sin(2\pi t) + 2\pi e^t \cos(2\pi t))^2} \\
&= \sqrt{(1 + 4\pi^2) e^{2t}} \\
&= \sqrt{(1 + 4\pi^2)}\, e^t
\end{aligned}$$

and so the length is

$$L = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{(1+4\pi^2)} \int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{(1+4\pi^2)}(e^2 - e^0) = \sqrt{(1+4\pi^2)}(e^2-1) \approx 40.65$$

c) For the curvature, we note that the parametrisation is not arc-length and so we need to use the formula

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{v(t)^3}$$

The second derivatives are

$$\begin{aligned} x''(t) &= (e^t\cos(2\pi t) - 2\pi e^t \sin(2\pi t))' \\ &= e^t \cos(2\pi t) - 2\pi e^t \sin(2\pi t) - 2\pi(e^t\sin(2\pi t) + 2\pi e^t\cos(2\pi t)) \\ &= (1-4\pi^2)e^t\cos(2\pi t) - 4\pi e^t \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} y''(t) &= (e^t\sin(2\pi t) + 2\pi e^t \cos(2\pi t))' \\ &= (e^t \sin(2\pi t) + 2\pi e^t \cos(2\pi t)) + 2\pi(e^t\cos(2\pi t) - 2\pi e^t\sin(2\pi t)) \\ &= (1-4\pi^2)e^t\sin(2\pi t) + 4\pi e^t \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &x'(t)y''(t) \\ =&(e^t\cos(2\pi t) - 2\pi e^t\sin(2\pi t))\big((1-4\pi^2)e^t\sin(2\pi t) + 4\pi e^t\cos(2\pi t)\big) \\ =&4\pi e^{2t}\cos^2(2\pi t) + (1-12\pi^2)e^{2t}\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) - 2\pi(1-4\pi^2)e^{2t}\sin^2(2\pi t) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &y'(t)x''(t) \\ =&(e^t\sin(2\pi t) + 2\pi e^t\cos(2\pi t))\big((1-4\pi^2)e^t\cos(2\pi t) - 4\pi e^t\sin(2\pi t)\big) \\ =&2\pi(1-4\pi^2)e^{2t}\cos^2(2\pi t) + (1-12\pi^2)e^{2t}\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) - 4\pi e^{2t}\sin^2(2\pi t) \end{aligned}$$

Subtracting cancels the mixed terms, we have

$$x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 2\pi(1+4\pi^2)e^{2t}\cos^2(2\pi t) + 2\pi(1+4\pi^2)e^{2t}\sin^2(2\pi t) = 2\pi(1+4\pi^2)e^{2t}$$

and finally

$$\kappa(t) = \frac{2\pi(1+4\pi^2)e^{2t}}{(\sqrt{1+4\pi^2}\,e^t)^3} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}\,e^t}$$

Aufgabe 49: Betrachten Sie die Fläche

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \le 1\,,\; x_1 > 0 \right\}.$$

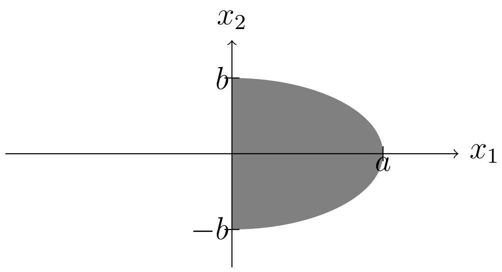
a) Zeichnen Sie die Fläche A.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von A.

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von A, wenn die Dichte $\rho \equiv 1$ konstant ist.

Lösung:

a) Die Fläche A stellt eine halbe Ellipse dar:



b) Alternative (i): Benutze die Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse E mit Halbachsen $a, b > 0$, d.h. $\mathrm{vol}_2(E) = ab\pi$ und leite $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{1}{2}ab\pi$ ab.
Alternative (ii): Benutze die Transformationssatz mit der Substitution

$$x = (x_1, x_2) = g(r, \varphi) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,.$$

Dann folgt

$$|\det Dg| = |\det\begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}| = |abr\,\cos^2\varphi + abr\,\sin^2\varphi| = abr\,.$$

Es gilt $A = g(B)$ mit

$$B = \{(r,\varphi)\,|\,0 < r \le 1\,,\ -\tfrac{\pi}{2} < \varphi < \tfrac{\pi}{2}\}\,.$$

Der Transformationssatz liefert nun

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(A) &= \int_A \mathrm{d}x = \int_{g(B)} \mathrm{d}x = \int_B |\det Dg|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} abr\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= ab\cdot\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi = ab\cdot\Big[\tfrac{1}{2}r^2\Big]_0^1\cdot\Big[\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\,.\end{aligned}$$

Alternative (iii): Schreibe A um als

$$A := \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x_1 < a\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}\,,\quad -b \le x_2 \le b\right\}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(A) &= \int_{-b}^{b}\int_0^{a\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = a\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x_2 \\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{(b\sin(z))^2}{b^2}}\,b\cos(z)\,\mathrm{d}z = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(z)\,\mathrm{d}z \\ &= ab\cdot\frac{1}{2}\Big[z+\sin z\,\cos z\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{2}\end{aligned}$$

wobei die Substitution $x_2 = b\sin(z)$ mit $\frac{dx_2}{dz} = b\cos(z)$ benutzt wurde.

c) Der Schwerpunkt $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ von A ist definiert als

$$s = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(A)} \int_A x \,\mathrm{d}x\,.$$

Wir wissen aus Aufgabenteil (b), dass $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{ab\pi}{2}$. Benutze den Transformationssatz mit der Substitution

$$x = (x_1, x_2) = g(r, \alpha) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,.$$

und $|\det Dg| = abr$ - siehe Alternative (ii) in Teil b).

Dann ist $A = g(B)$ mit $B = \{(r,\varphi)\,|\, 0 < r \le 1\,,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= \mathrm{vol}_2(A)^{-1} \int_A x_1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_{g(B)} x_1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_B ar\cos\varphi |\det Dg| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{ab\pi} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ar\cos\varphi \cdot abr \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \mathrm{vol}_2(A)^{-1} \int_A x_2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_{g(B)} x_2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_B br\sin\varphi |\det Dg| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{ab\pi} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} br\sin\varphi \cdot abr \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{2b}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$