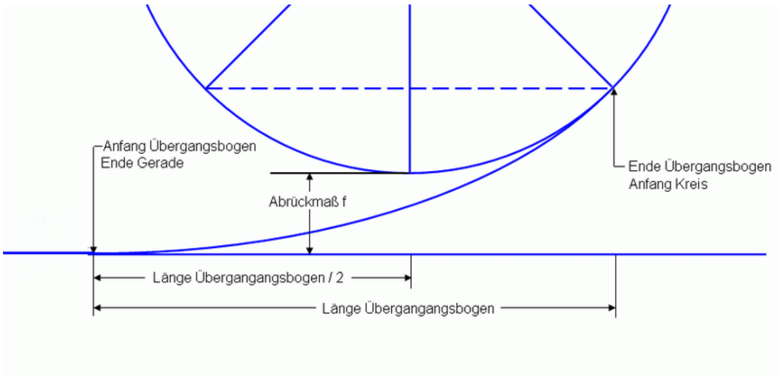
Aufgabe 50: In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der "beste" Looping in einer Achterbahn ein Klothoiden-Looping ist. Eine Klothoide ist eine Kurve $x : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Krümmung an jedem Punkt proportional zur Länge bis zu dieser Stelle ist. Das folgende Bild zeigt den Übergang von einer Geraden zum Kreis mit einer sogenannten Klothoiden im allgemeinen Fall (aus `http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cbergangsbogen`)



Der Looping besteht also aus einem Kreisbogen und zwei Klothoiden, an den Übergangsstellen zum Kreisbogen bzw. zur Geraden stimmen die Ableitungen bis zur Ordnung 2 überein. Wir nehmen zusätzlich an, dass sowohl der Achterbahnzug als auch die Fahrgäste einen einzigen Massenpunkt bilden und es weder Reibung noch Luftwiderstand gibt (Erinnerung: $g = 9.81\frac{m}{s^2}$).

a) Berechnen Sie den Radius R und die Krümmung κ_{Kreis} des Kreisbogens, wenn man davon ausgeht, dass die Fahrgäste bei einer Geschwindigkeit von $20\frac{m}{s}$ im oberen Punkt schwerelos sind.

b) Die Klothoide x erfüllt folgende Bedingungen:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = e_1 \text{ und } \kappa(t) = \frac{1}{A^2}t.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung der bogenlängenparametrisierten Klothoide folgendermaßen gegeben ist:

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \\ \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \end{pmatrix} ds. \tag{1}$$

c) Sei im Folgenden $A = \frac{R}{2}$. Was ist die Länge einer der beiden Klothoiden bis zum Berührpunkt mit dem Kreis?

d) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Klothoiden mit Restglied $O(t^4)$ um den Ursprung an.

LÖSUNG:

a) Es gilt $R = \frac{v^2}{g} = \frac{(20\frac{m}{s})^2}{9{,}81\frac{m}{s^2}} \approx 40.77m$ und für die Krümmung $\kappa = \frac{1}{R} = 0.0245\frac{1}{m}$.

b) Aus den Annahmen folgt $\dot{x}(t) = (\cos(\phi(t)), \sin(\phi(t)))^T$ mit $\phi(0) = 0$ und $|\ddot{x}(t)| = \dot{\phi}(t) = \frac{1}{A^2}t$. Es ergibt sich $\phi(t) = \frac{t^2}{2A^2}$ und damit die Gleichung.

c) Im Berührpunkt gilt $\kappa_{\text{Klothoide}}(t) = \kappa_{\text{Kreis}}$, also $\frac{1}{(R/2)^2}t = \frac{1}{R}$ und damit $t = \frac{R}{4} = 10{,}19m$.

d) Aus den Annahmen folgt $\dot{x}_1(0) = 1$ und $\ddot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \ddot{x}_2(0) = 0$. Weiterhin gilt wegen b)

$$\dddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t))\ddot{\phi}(t) - \cos(\phi(t))(\dot{\phi}(t))^2 \\ \cos(\phi(t))\ddot{\phi}(t) - \sin(\phi(t))(\dot{\phi}(t))^2 \end{pmatrix}$$

also $\dddot{x}_1(0) = 0$ und $\dddot{x}_2(0) = \frac{1}{A^2}$. Daher gilt $x_1(t) = t + O(t^4)$ und $x_2(t) = \frac{1}{6A^2}t^3 + O(t^4)$.

Für weitere Informationen siehe “Rollercoaster loop shapes”

Aufgabe 51: Bestimmen Sie mit einer Programmiersprache Ihrer Wahl das Integral in Gleichung (1) aus obenstehenden Aufgabe für $t =$“Berührpunkt aus c)”, indem Sie die Sinus- bzw. Kosinus-Reihe bis zur Ordnung $2, 4, 6, 8$ komponentenweise integrieren. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den exakten Werten

$$x_1 = 10.1777638111437820 \qquad x_2 = 0.4242628624214808$$

und der Taylor-Entwicklung aus 40d).

LÖSUNG: Die Formeln für die Sinusreihe und die Kosinusreihe sind

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \text{ und } \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots .$$

Integriert man diese Reihen komponentenweise und wertet das Integral bei $t = \frac{R}{4} = \frac{100}{9.81}$ bis zur Ordnung $n = 2, 4, 6, 8$ aus, so ergibt sich folgendes:

Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Kosinus): 0.0159161073067775
Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Sinus): 0.0004738008472925
Man erkennt, dass der absolute Fehler sowohl bei der Taylor-Entwicklung als auch bei der komponentenweisen Intregration der trigonometrischen Reihen gegen 0 konvergiert.

Matlab-Code:

Iteration	Integral des Kosinus	absoluter Fehler
0	10.1936799184505595	0.0159161073067775
2	10.1777522935779814	0.0000115175658006
4	10.1777638152973626	0.0000000041535806
6	10.1777638111428956	0.0000000000008864
8	10.1777638111437820	0.0000000000000000

Iteration	Integral des Sinus	absoluter Fehler
1	0.4247366632687733	0.0004738008472925
3	0.4242626268142323	0.0000002356072485
5	0.4242628624857651	0.0000000000642843
7	0.4242628624214698	0.0000000000000110

```
clear all;
close all;
clc;

t=100/9.81;
A=200/9.81;

%Exakte Werte
X = 0.49921931493660255781 5 * A;
Y = 0.0208100934017736342 88 * A;
fprintf('Exakte Werte: x=%2.16f  y=%2.16f\n',X,Y);

for l=0:2:8
    if l==0
        x1=t;
    else
    x1=x1+(-1)^(l/2)*(1/factorial(l))*((1/(2*A^2))^l)*1/(2*l+1)*t^(2*l+1);
    end
    fprintf('Integral des Kosinus nach Iteration %1.0f: %2.16f      Absoluter Fehler: %2.16f\n',l,
        x1,abs(x1-X));
end

x2=0;
for l=1:2:7
    x2=x2+(-1)^((l-1)/2)*(1/factorial(l))*((1/(2*A^2))^l)*1/(2*l+1)*t^(2*l+1);
    fprintf('Integral des Sinus nach Iteration %1.0f: %2.16f      Absoluter Fehler: %2.16f\n',l,x2,
        abs(x2-Y));
end

%Taylor

fprintf('Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Kosinus): %2.16f\n',abs(t-X));
fprintf('Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Sinus): %2.16f\n',abs((t^3)/(6*A^2)-Y));
```

Aufgabe 52: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s,v) \mapsto X(s,v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

LÖSUNG:

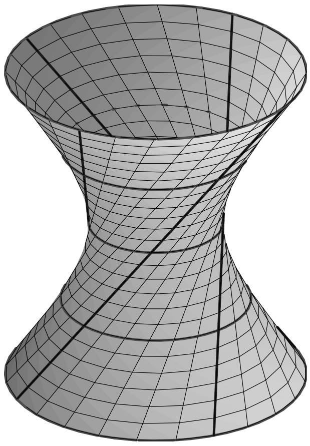
a) Mit

$$\begin{aligned} x &= \cos s - v \sin s \\ y &= \sin s + v \cos s \\ z &= v \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (\cos s - v \sin s)^2 + (\sin s + v \cos s)^2 - v^2 \\ &= \cos^2 s - 2v \cos s \sin s + v^2 \sin^2 s \\ &\quad + \sin^2 s + 2v \cos s \sin s + v^2 \cos^2 s - v^2 \\ &= 1 + v^2 - v^2 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z^2 = x^2 + y^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,.$



b) $\gamma_1(s) = X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{1 + v_0^2}$:

$$\left\| \gamma_1(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + v_0^2$$

$\gamma_2(v) = X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $v = 0$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf obigem einschaligen Drehhyperboloid liegt.

c) Die Absolutkrümmung $\kappa_1(s)$ von $\gamma_1(s)$ ergibt sich als

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + v_0^2}}\,.$$

Denn:

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s - v_0\cos s \\ \cos s - v_0 \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\| &= (\sin^2 s + 2v_0\cos s\sin s + v_0^2\cos^2 s \\
&\quad + \cos^2 s - 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \sin^2 s)^{1/2} \\
&= \sqrt{1+v_0^2}\,, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3 &= \sqrt{1+v_0^2}^{\,3}\,, \\
\ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\cos s + v_0\sin s \\ -\sin s - v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot{\gamma}_1(s)\times\ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sin s - v_0\cos s)(-\sin s - v_0\cos s) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\cos s + v_0\sin s)(\cos s - v_0 \sin s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+v_0^2 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\times\ddot{\gamma}_1(s)\| &= 1+v_0^2\,, \\
\Rightarrow\ \kappa_1(s) &= \frac{\|\dot{\gamma}_1(s)\times\ddot{\gamma}_1(s)\|}{\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3} = \frac{1+v_0^2}{(1+v_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,. \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dies sollte auch so sein, da ein Kreis die Krümmung $\kappa = \frac{1}{\text{Radius}}$ hat!

Die Absolutkrümmung $\kappa_2(s)$ von $\gamma_2(s)$ lautet dementsprechend

$$\kappa_2(v) \equiv 0\,.$$

Anschaulich ist das klar, da $\gamma_2(s)$ eine Gerade beschreibt!

In Formeln:

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konstanter Vektor!} \\
\Rightarrow\ \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \dot{\gamma}_2(v)\times\ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ \kappa_2(v) = 0\,!$$

Beachte: $\|\dot{\gamma}_2(v)\| = \sqrt{2} > 0\,!$

Aufgabe 53: Betrachten Sie die durch $X : [0, 2\pi) \times [0, 100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_2(t) := X(t, 10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_3(t) := X(t, t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_i(t)$, $\ddot{\gamma}_i(t)$ und $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.

LÖSUNG:

a) Drehzylinder mit $x^2 + y^2 = 4$ und Höhe $h = 100$:

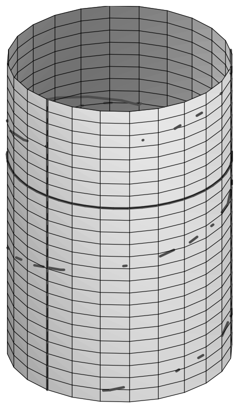
Mit

$$\begin{aligned} x &= 2\cos u\,, \\ y &= 2\sin u \end{aligned}$$

ergibt sich

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4 \quad \checkmark$$

$v \in [0, 100] \;\Rightarrow\; h = 100\,.$



b) $\gamma_1(t) = X(0,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (für $t = 0$) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \partial_t X$, welche ganz auf dem Drehzylinder liegt. Es handelt sich um eine Mantellinie.

$\gamma_2(t) = X(t, 10) = 2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 5 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und Radius $r = 2$, welcher ganz auf dem Drehzylinder liegt.

Es handelt sich um einen Breitenkreis des Drehzylinders in der Höhe $h = z = 10$.

$\gamma_3(t) = X(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie, die auf dem Drehzylinder liegt.

c) $\dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ddot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\gamma}_1 \times \ddot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ddot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\gamma}_2 \times \ddot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\dot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},\ \ddot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\gamma_3} \times \ddot{\gamma_3} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}
N_1(t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_1 \perp \dot{\gamma_1}\,! \\
N_1(t) \cdot (\dot{\gamma_1}(t) \times \ddot{\gamma_1}(t)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_1 \perp (\dot{\gamma_1} \times \ddot{\gamma_1})\,! \\
N_2(t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_2 \perp \dot{\gamma_2}\,! \\
N_2(t) \cdot (\dot{\gamma_2}(t) \times \ddot{\gamma_2}(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_2 \perp (\dot{\gamma_2} \times \ddot{\gamma_2})\,! \\
N_3(t) \cdot \dot{\gamma_3}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_3 \perp \dot{\gamma_3}\,! \\
N_3(t) \cdot (\dot{\gamma_3}(t) \times \ddot{\gamma_3}(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; N_3 \perp (\dot{\gamma_3} \times \ddot{\gamma_3})\,!
\end{aligned}$$